

Д. А. КОШАЕВ

## ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ АВТОНОМНОГО НЕОБИТАЕМОГО ПОДВОДНОГО АППАРАТА ПО ДАННЫМ ОТ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ МАЯКОВ

*Предлагается пригодный для использования в реальном времени алгоритм относительного позиционирования и определения ориентации автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА) по дальномерным измерениям до гидроакустических маяков, расположенных на небольших расстояниях друг от друга на единой платформе. Взаимное расположение АНПА и маяков априорно неизвестно, а их шкалы времени не синхронизированы. Предлагаемый алгоритм позволяет учесть нелинейный характер измерений с меньшими по сравнению с методом максимального правдоподобия вычислительными затратами. Приводятся результаты моделирования и камеральной обработки натурных данных при различных положениях АНПА относительно маяков.*

**Ключевые слова:** автономный необитаемый подводный аппарат, навигация, ориентация, метод наименьших квадратов, нелинейное байесовское оценивание.

### Введение

Определение координат и углов ориентации АНПА может производиться на основе гидроакустических и оптических датчиков [1–11] с привлечением инерциальных навигационных систем, относительного либо абсолютного лага, глубиномера и других приборов. Как правило, в этих задачах нельзя пренебречь нелинейным характером зависимости измеряемых параметров от искомым координат и углов ориентации, поэтому для получения позиционных и угловых решений используются нелинейные же алгоритмы оценивания: расширенный фильтр Калмана [7], фильтр Калмана на основе сигма-точечного преобразования [8], фильтр частиц [1]. Указанные алгоритмы не всегда удовлетворяют требованиям к точности и экономичности получаемых решений. Для расширенного и сигма-точечного фильтров Калмана не нужно выполнять большой объем вычислений, но они могут обеспечить близкую к оптимальной точность только при слабовыраженной нелинейности измерений. Напротив, фильтры частиц более универсальны и способны эффективно работать с существенно нелинейными измерениями, но при этом зачастую оказываются слишком сложными для реализации в бортовом вычислителе АНПА. Нахождение компромисса между точностью и вычислительной простотой по-прежнему является актуальной проблемой для алгоритмов навигации и ориентации АНПА.

---

**Кошаев** Дмитрий Анатольевич. Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

В настоящей работе предполагается использование на борту АНПА гидроакустических датчиков, обеспечивающих выработку измерений дальностей до маяков, закрепленных на единой платформе. Геометрические данные о расположении гидрофонов на АНПА в связанной с АНПА системе координат (СК) и маяков в СК, привязанной к несущей их платформе, известны. При этом априорная информация о взаимном положении АНПА и маяков отсутствует. Географические координаты и углы ориентации платформы с маяками неизвестны и могут изменяться со временем. Шкалы времени гидрофонов и маяков не синхронизированы. Нужно найти координаты контрольной точки (КТ) АНПА и углы его ориентации относительно СК, привязанной к платформе с маяками, – всего шесть параметров. Цель работы – построение алгоритма решения означенной задачи, который обеспечивает точность, близкую к предельно достижимой, и который можно реализовать в бортовой аппаратуре АНПА.

Отметим, что при известной ориентации платформы с маяками и при наличии на борту АНПА угломерных приборов (кренметра, курсоуказателя, инерциальной навигационной системы) ориентацию АНПА относительно маяков можно определить без гидроакустических измерений. Вместе с тем, поскольку в рассматриваемой задаче ориентация платформы с маяками неизвестна и непостоянна, относительные углы ориентации АНПА входят в число оцениваемых параметров, а бортовые угломерные приборы не применяются. Аналогичные соображения касаются глубиномера – он не используется для позиционирования АНПА относительно платформы с маяками, поскольку глубина платформы неизвестна и непостоянна.

Задача в таких условиях рассмотрена в работе [11], где предлагается находить начальное приближение для трех координат и трех углов на основе машинного обучения с учителем с последующим применением поискового алгоритма, определяющего наиболее правдоподобные оценки.

Предлагаемый в данной статье алгоритм также предполагает формирование начального приближения, но это делается с помощью более простых математических инструментов – путем решения линейных и квадратных уравнений, составленных без учета помех измерений. Далее выполняется оценивание с учетом свойств помех. Помимо оценок искомых параметров предусматривается расчет их среднеквадратических погрешностей (СКП). Особенность предлагаемого решения заключается в том, что координаты КТ АНПА и углы его ориентации определяются не напрямую по измерениям дальностей, а по результатам оценивания координат гидрофонов в СК, связанной с маяками. Настоящая статья является продолжением доклада на ту же тему [12], однако в отличие от него здесь рассматривается более общая задача, когда отдельные гидрофоны могут принимать сигналы не всех маяков. Алгоритм решения также доработан и расписан более подробно. Предложенное решение сравнивается с решением на основе метода максимального правдоподобия как по точности, так и по времени выполнения. Добавлен раздел с результатами камеральной обработки натуральных данных.

## 1. Постановка задачи оценивания относительных координат и углов ориентации АНПА

Пусть на борту АНПА расположена группа из  $n \geq 3$  гидрофонов, работающих по единой шкале времени. В то же время имеется  $m \geq 4$  гидроакустических маяков, раз-

мещенных вблизи друг от друга на единой платформе. Маяки излучают сигналы в соответствии с единой шкалой времени, которая не совпадает со шкалой времени гидрофонов на АНПА. Неодинаковые паузы между моментами излучения сигналов разными маяками позволяют однозначно определить, от какого конкретно маяка пришел сигнал. Гидрофоны расположены не на одной прямой, а маяки – не на одной плоскости.

В общем случае  $j$ -м гидрофоном принимаются сигналы не от всех  $m$  маяков, а от некоторых из них в количестве  $0 < m_j \leq m$ . Номера этих наблюдаемых  $j$ -м гидрофоном маяков образуют упорядоченное множество

$$\mu_j = \{\mu_j(1), \dots, \mu_j(m_j)\} \subseteq \{1, \dots, m\}.$$

Отличия между  $\mu_j$  для разных  $j$  могут быть вызваны ограниченными диаграммами направленности гидрофонов и маяков. По принятым на АНПА сигналам формируются относящиеся к одному моменту времени измерения дальности между маяками и гидрофонами:

$$Y_j^i = d_j^i + \delta + v_j^i, j = \overline{1, n}, i \in \mu_j, \quad (1)$$

где  $i$  – номер маяка;  $j$  – номер гидрофона;  $d_j^i$  – истинные значения дальностей;  $v_j^i$  – помехи,  $\delta$  – погрешность, вызванная несовпадением шкал времени маяков и гидрофонов. Общее число измерений составляет  $M = \sum_{j=1}^n m_j$ . Помехи  $v_j^i$  представляют собой случайные взаимно некоррелированные величины, подчиняющиеся гауссовскому центрированному распределению со среднеквадратическими отклонениями (СКО)  $\sigma_j^i$ . Используемое при формировании измерений дальности значение скорости звука в воде считается точным. Известны координаты  $x^i, y^i, z^i, i = \overline{1, m}$  маяков в осях  $x, y, z$  связанной с ними прямоугольной СК, а также координаты  $\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j, j = \overline{1, n}$  гидрофонов в осях  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  связанной с АНПА прямоугольной СК. Для определенности полагаем, что  $y, \tilde{y}$  – продольные оси;  $x, \tilde{x}$  – направленные вправо,  $z, \tilde{z}$  – вверх, если нет наклонов. По аналогии с ориентацией морского объекта относительно географических осей ориентацию АНПА относительно СК, связанной с маяками, будем определять с помощью углов курса  $K$ , дифферента  $\psi$  и крена  $\theta$ . Центром СК, связанной с АНПА, является его КТ, т.е. по определению координаты КТ в этой СК  $\tilde{x}_0 = \tilde{y}_0 = \tilde{z}_0 = 0$ , а в связанной с маяками СК –  $x_0, y_0, z_0$ . Априорная информация об  $x_0, y_0, z_0, K, \psi, \theta$  и  $\delta$  отсутствует: они являются неизвестными параметрами. Известно лишь, что  $|\psi| \neq 90^\circ$ .

Введем обозначения:  $s^i = (x^i, y^i, z^i)^T, i = \overline{1, m}$  – для векторов координат маяков в связанной с ними СК;  $\tilde{p}_j = (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j)^T$  – для векторов координат гидрофонов в СК, связанной с АНПА;  $p_j = (x_j, y_j, z_j)^T, j = \overline{0, n}$  – для векторов координат КТ и гидрофонов в связанной с маяками СК;  $A(K, \psi, \theta)$  – для матрицы перехода от осей  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  к осям  $x, y, z$ , вид которой можно найти, например, в [13]. Отметим, что  $\tilde{p}_0 = (0, 0, 0)^T$ . Рис. 1 поясняет смысл величин, используемых для определения взаимного положения АНПА и маяков. Здесь  $x', y', z'$  – оси, полученные параллельным переносом  $x, y, z$  в КТ.

Для измеряемых дальностей можно записать выражения

$$d_j^i = |p_j - s^i| = |p_0 + A(K, \psi, \theta)\tilde{p}_j - s^i|. \quad (2)$$

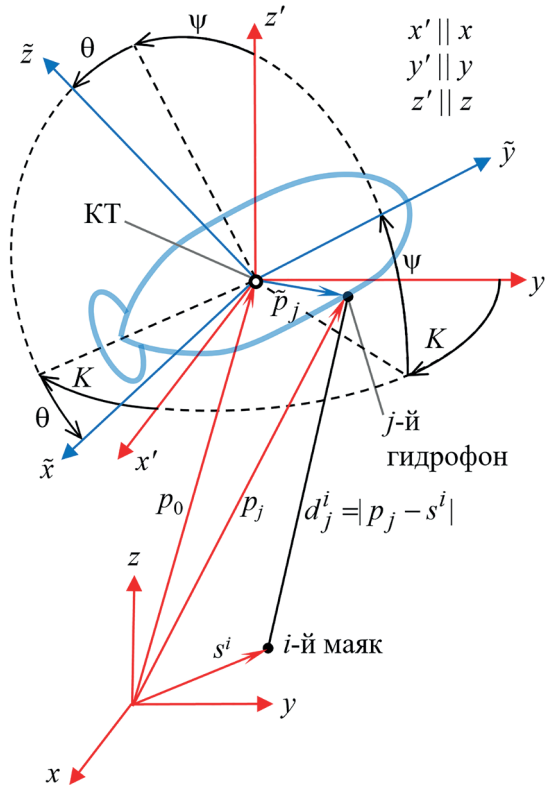


Рис. 1. Взаимное положение АНПА и маяков

В то же время согласно сказанному выше о количестве и расположении гидрофонов и маяков

$$r = \text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \dots & \tilde{p}_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \{3, 4\}, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} s^1 & \dots & s^m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Для упрощения последующих выкладок будем считать, что на АНПА при  $r = 4$  первые четыре гидрофона не лежат в одной плоскости, а при  $r = 3$  первые три гидрофона не находятся на одной прямой, т.е.

$$r = \text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \dots & \tilde{p}_r \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \dots & \tilde{p}_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \{3, 4\}. \quad (3)$$

Назовем первые  $r$  гидрофонов базовыми. Вместе с тем предположим, что каждый базовый гидрофон принимает сигналы не менее чем от 4 маяков, которые не лежат в одной плоскости, т.е.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} s^{\mu_j(1)} & \dots & s^{\mu_j(m_j)} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 4, j = \overline{1, r}. \quad (4)$$

Условие (3) обеспечивает возможность определения всех трех углов ориентации АНПА относительно связанной с маяками СК по  $p_j, j = \overline{1, r}$ , тогда как условие (4) позволяет определить  $p_j$  по  $m_j$  измерениям  $Y_j^i, i \in \mu_j, j = \overline{1, r}$ .

С помощью измерений (1) с учетом (2)–(4) требуется оценить вектор  $p_0$  координат КТ АНПА в связанной с маяками СК и углы  $K, \psi, \theta$  ориентации АНПА относительно этой СК. Помимо оценок указанных параметров нужно также вычислить их СКП. Алгоритм оценивания должен быть достаточно простым для выполнения в бортовом вычислителе АНПА в реальном времени. Заметим, что речь идет об одномоментной задаче, задача фильтрации не рассматривается.

## 2. Алгоритм решения

Априорная неопределенность параметров  $p_0$  и  $K, \psi, \theta$ , нелинейно входящих в (2), не позволяет ограничиться для их оценивания методами на основе линеаризации измерений [14, 15]. В настоящей работе предлагается достаточно экономичный для применения в реальном времени алгоритм оценивания  $p_0$  и  $K, \psi, \theta$ , в котором сочетаются элементы линейных и нелинейных методов оценивания. Алгоритм не предполагает непосредственное оценивание  $p_0$  и  $K, \psi, \theta$  на основе второго выражения в (2) для измеряемых дальностей. В нем оцениваются векторы  $p_j, j = 1, r$  координат базовых гидрофонов с использованием первого выражения в (2) и данных о взаимном расположении гидрофонов. Оценки  $p_j, j = 1, r$  и ковариационная матрица их погрешностей пересчитываются в оценки  $p_0, K, \psi, \theta$  и соответствующие СКП. Алгоритм решения включает четыре этапа.

Первый этап преследует утилитарную цель – обеспечить возможность линеаризации измеряемых дальностей  $d_j^i = |p_j - s^i|$ . Для этого определяются сравнительно грубые начальные оценки для  $p_j, j = 1, r$  путем аналитического решения уравнений, составленных без учета помех измерений  $v_j^i$ . Оценки для  $p_j$  здесь формируются не одновременно для всех базовых гидрофонов, а по отдельности для каждого  $j = 1, r$  и при использовании ограниченного набора измерений.

Итак, рассмотрим гидрофон с номером  $j$ , каковым может быть не только базовый ( $j = 1, r$ ), но и любой другой ( $j = r + 1, n$ ), для которого выполняется условие типа (4). Вектор  $p_j$  координат гидрофона представим в виде функции  $\delta$ :

$$p_j = b_j + c_j \delta, \tag{5}$$

где  $b_j = \frac{1}{2} G_j U_j$ ;

$U_j$  –  $m_j$ -мерный вектор, элементами которого являются  $|s^i|^2 - (Y_j^i)^2, i \in \mu_j$ ;

$c_j = G_j Y_j^T$ ;  $Y_j$  –  $m_j$ -мерный вектор, образованный из  $Y_j^i, i \in \mu_j$ ;  $G_j = (F_j S_j^T)^+ F_j$ ;

$+$  – операция псевдообращения матрицы [16, 17];  $S_j$  –  $3 \times m_j$ -матрица, столбцы которой – это векторы  $s^i, i \in \mu_j$ ;

$F_j = \begin{pmatrix} -J_{m_j-1} & E_{m_j-1} \end{pmatrix}$ . Здесь и далее  $J_N$  –  $N$ -мерный вектор, состоящий из единиц;  $E_N$  – единичная  $N \times N$ -матрица. Выражение (5) вытекает из системы уравнений

$$(p_j - s^i)^T (p_j - s^i) = (Y_j^i - \delta)^2, i \in \mu_j, \tag{6}$$

предполагающих отсутствие помех, т.е.  $v_j^i = 0$ . Вычитая первое уравнение этой системы из остальных, получим систему из  $(m_j - 1)$  линейного уравнения

$$-2(s^i - s^{\mu_j(1)})^T p_j + |s^i|^2 - |s^{\mu_j(1)}|^2 = (Y_j^i)^2 - (Y_j^{\mu_j(1)})^2 - 2(Y_j^i - Y_j^{\mu_j(1)})\delta, \quad (7)$$

$$i \in \{\mu_j(2), \dots, \mu_j(m_j)\},$$

решением которой в предположении, что погрешность  $\delta$  известна, и является (5). Возможность необходимого при получении  $G_j$  псевдообращения матрицы обеспечивается условием (4). При  $m_j = 4$  псевдообращение совпадает с обращением.

Значение  $\delta$  определяется исходя из равенств

$$(p_j - p_k)^T (p_j - p_k) = L_{j,k}^2, \quad j \neq k, \quad (8)$$

где  $L_{j,k}^2 = |\tilde{p}_j - \tilde{p}_k|^2$  – известные величины. Равенства (8) передают неизменность расстояния между гидрофонами в двух системах координат. В отличие от уравнений (6), которые имеют приближенный характер из-за допущения  $v_j^i = 0$ , равенства (8) являются точными. Подставляя (5) в (8), получаем квадратные уравнения для определения  $\delta$ :

$$\Delta c_{j,k}^T \Delta c_{j,k} \delta^2 + 2\Delta c_{j,k}^T \Delta b_{j,k} \delta + \Delta b_{j,k}^T \Delta b_{j,k} - L_{j,k}^2 = 0, \quad (9)$$

где  $\Delta b_{j,k} = b_j - b_k$ ,  $\Delta c_{j,k} = c_j - c_k$ .

Решениями (9) при условии, что

$$D_{j,k} = (\Delta c_{j,k}^T \Delta b_{j,k})^2 - \Delta c_{j,k}^T \Delta c_{j,k} (\Delta b_{j,k}^T \Delta b_{j,k} - L_{j,k}^2) \geq 0,$$

являются

$$\delta_{j,k}^{\pm} = \left( -\Delta c_{j,k}^T \Delta b_{j,k} \pm \sqrt{D_{j,k}} \right) / \left( \Delta c_{j,k}^T \Delta c_{j,k} \right).$$

При  $D_{j,k} > 0$  выбор между  $\delta_{j,k}^+$  и  $\delta_{j,k}^-$  делается по невязкам измерений  $Y_j^{\mu_j(1)}$ ,  $Y_k^{\mu_k(1)}$ . Однозначная оценка  $\delta$  для пары  $j, k$  определяется по правилу

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} \delta_{j,k}^+, & \text{если } \max(|\rho_j(\delta_{j,k}^+)|, |\rho_k(\delta_{j,k}^+)|) < \max(|\rho_j(\delta_{j,k}^-)|, |\rho_k(\delta_{j,k}^-)|); \\ \delta_{j,k}^-, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (10)$$

где  $\rho_\ell(\delta) = Y_\ell^{\mu_\ell(1)} - |b_\ell + c_\ell \delta - s^{\mu_\ell(1)}| - \delta$  – невязка измерения  $Y_\ell^{\mu_\ell(1)}$ , сформированная с учетом (1), (2), (5) для данного значения  $\delta$ ,  $\ell = j, k$ . Если  $D_{j,k} < 0$ , оценка  $\delta_{j,k}$  не формируется. Чем больше разнесение гидрофонов  $j, k$ , тем точнее оценки  $\delta_{j,k}$ . При сближении гидрофонов все параметры уравнения (9) стремятся к нулю, и оно вырождается. Целесообразно использовать не все возможные пары  $j, k$ , а только те, которые соответствуют достаточно удаленным друг от друга гидрофонам. Из  $\delta_{j,k}$  формируется единая оценка  $\bar{\delta}$ , например в виде среднего значения или медианы. Подстановка этой оценки в (5) вместо истинного значения  $\delta$  приводит к начальным оценкам векторов  $p_j$  для базовых гидрофонов:

$$\bar{p}_j = b_j + c_j \bar{\delta}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (11)$$

Понятно, что для грубой оценки координат гидрофонов можно применять и другие аналитические методы, например метод Банкрофта (Bancroft) и его разновидности [18–22], которые используются при решении задачи навигации по псевдодалностям спутниковых навигационных систем. В этой задаче в роли маяков выступают спутники, гидрофона – приемник спутниковой навигации, а  $\delta$  – это расхождение шкал времени спутниковой системы и приемника. Исходя из [19, 20], при  $m_j = 4$  координаты гидрофонов могут быть получены путем совместного решения системы, состоящей из 3 линейных уравнений (7), и первого уравнения в (6). При этом из двух возможных решений нужно каким-то образом выбрать одно. Если же  $m_j > 4$ , количество уравнений в линейной системе (7) превышает 3, и эта система может быть однозначно разрешена относительно  $p_j$  и  $\delta$ . Тем не менее в рассматриваемой задаче такие приемы приводят к более грубым оценкам, чем получаемые на основе (10), где учитывается знание точных расстояний  $L_{j,k}$  между гидрофонами и обоснованно выбирается одно из двух решений квадратного уравнения для  $\delta$ .

**Второй этап** – совместное оценивание  $p_j, j = \overline{1, r}$  по всей совокупности измерений (1) с учетом свойств их помех.

При  $n > r$  векторы  $p_j, j = \overline{r+1, n}$  представляются в виде линейных функций от  $p_j, j = \overline{1, r}$ , для определения которых введем в рассмотрение разности  $\Delta p_{j,1} = p_j - p_1, \Delta \tilde{p}_{j,1} = \tilde{p}_j - \tilde{p}_1, j = \overline{2, n}$ . Очевидно, существуют такие коэффициенты  $q_{j,k}, k = \overline{1, r-1}$ , среди них хотя бы один ненулевой, что

$$\Delta p_{j,1} = \sum_{k=1}^{r-1} \Delta p_{k+1,1} q_{j,k}, \Delta \tilde{p}_{j,1} = \sum_{k=1}^{r-1} \Delta \tilde{p}_{k+1,1} q_{j,k}, j = \overline{r+1, n}. \quad (12)$$

Поскольку  $\Delta \tilde{p}_{j,1}, j = \overline{2, n}$  известны, коэффициенты  $q_{j,k}, k = \overline{1, r-1}, j = \overline{r+1, n}$  можно найти из второго равенства в (12):

$$\left. \begin{aligned} (q_{j,1} \mid q_{j,2} \mid q_{j,3})^T &= (\Delta \tilde{p}_{2,1} \mid \Delta \tilde{p}_{3,1} \mid \Delta \tilde{p}_{4,1})^{-1} \Delta \tilde{p}_{j,1} \quad \text{при } r = 4; \\ (q_{j,1} \mid q_{j,2})^T &= (\Delta \tilde{p}_{2,1} \mid \Delta \tilde{p}_{3,1})^+ \Delta \tilde{p}_{j,1} \quad \text{при } r = 3, \end{aligned} \right\} j = \overline{r+1, n}. \quad (13)$$

Обращение  $(\Delta \tilde{p}_{2,1} \mid \Delta \tilde{p}_{3,1} \mid \Delta \tilde{p}_{4,1})$  при  $r = 4$  и псевдообращение  $(\Delta \tilde{p}_{2,1} \mid \Delta \tilde{p}_{3,1})$  при  $r = 3$  возможно благодаря условию (3). Располагая  $q_{j,k}$  из первого равенства в (12) получаем выражение для определения векторов  $p_j$ , не относящихся к базовым гидрофонам:

$$p_j = p_1 + \Delta p_{j,1} = (1 - \sum_{k=1}^{r-1} q_{j,k}) p_1 + \sum_{k=1}^{r-1} q_{j,k} p_{k+1} = Q_j p, \quad j = \overline{r+1, n}, \quad (14)$$

где

$$Q_j = \left( 1 - \sum_{k=1}^{r-1} q_{j,k} \mid q_{j,1} \mid \dots \mid q_{j,r-1} \right) \otimes E_3, \quad (15)$$

$\otimes$  – произведение Кронекера,  $p = (p_1^T \mid \dots \mid p_r^T)^T$ .

Чтобы придать выражениям (14), (15) универсальный характер, распространив их и на  $j = \overline{1, r}$ , в дополнение к (13) определим

$$q_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{при } j > 1, k = j-1, \\ 0 & \text{при } j = 1 \text{ или } k \neq j-1, \end{cases} \quad k = \overline{1, r-1}, j = \overline{1, r}.$$

С такими коэффициентами матрицы  $Q_j, j = \overline{1, r}$  представляют собой вертикальные  $3 \times 3r$ -блоки единичной  $3r \times 3r$ -матрицы, т.е.

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_r \end{pmatrix} = E_{3r}.$$

С использованием предварительных оценок (11) координат базовых гидрофонов, выражений (14) для координат остальных гидрофонов и первого выражения в (2) для дальностей производится обработка  $M$ -мерного вектора измерений  $Y = (Y_1^T, \dots, Y_n^T)^T$  с помощью метода наименьших квадратов (МНК) [15–17]. Измеряемые дальности  $d_j^i = |p_j - s^i|$  представляются в линеаризованном в точках  $p_j = \bar{p}_j$  виде:

$$d_j^i = |\bar{p}_j - s^i| + \frac{(\bar{p}_j - s^i)^T}{|\bar{p}_j - s^i|} (Q_j p - \bar{p}_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad i \in \mu_j, \quad (16)$$

где  $\bar{p}_j = Q_j \bar{p}$ ,  $\bar{p} = (\bar{p}_1^T \mid \dots \mid \bar{p}_r^T)^T$ .

Общая для всех измерений составляющая погрешности  $\delta$  считается мешающим параметром и не оценивается. Ее присутствие в измерениях учитывается в обратной ковариационной матрице погрешностей измерений:

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \lim_{\sigma_\delta^2 \rightarrow \infty} (R_v + \sigma_\delta^2 J_M J_M^T)^{-1} = \lim_{\sigma_\delta^2 \rightarrow \infty} \left( R_v^{-1} - \frac{R_v^{-1} J_M J_M^T R_v^{-1}}{1/\sigma_\delta^2 + J_M^T R_v^{-1} J_M} \right) = \\ &= R_v^{-1} - \frac{R_v^{-1} J_M J_M^T R_v^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i \in \mu_j} 1/(\sigma_j^i)^2}, \end{aligned}$$

где  $R_v$  – диагональная  $M \times M$ -матрица с диагональными элементами

$$(\sigma_1^{\mu_1(1)})^2, \dots, (\sigma_1^{\mu_1(m_1)})^2, \dots, (\sigma_n^{\mu_n(1)})^2, \dots, (\sigma_n^{\mu_n(m_n)})^2.$$

Матрица  $R^{-1}$  является вырожденной ( $J_M^T R^{-1} J_M = 0$ ), поэтому  $R$ , вообще говоря, не существует, но она в МНК и не требуется. Альтернативным вариантом, позволяющим не добавлять  $\delta$  к оцениваемым параметрам, является обработка попарных разностей измерений (1), в которых  $\delta$  исключается.

В результате применения МНК по совокупности имеющихся дальномерных измерений вычисляются оценка  $\bar{p}$  вектора координат базовых гидрофонов и ковариационная матрица  $\bar{P}$  для вектора  $\delta \bar{p} = p - \bar{p} = (\delta \bar{p}_1^T \mid \dots \mid \delta \bar{p}_r^T)^T$  погрешностей оценивания.

Стоит подчеркнуть, что полученная на первом этапе алгоритма оценка  $\bar{p}$  на втором этапе используется исключительно для линеаризации дальностей. С точки зрения информативности  $\bar{p}$  не является априорной оценкой. Априорная информация в рассматриваемой задаче – это данные о взаимном расположении гидрофонов на АНПА. Их учет является целью следующего этапа алгоритма.

Третий этап – уточнение результатов оценивания  $p_j, j = \overline{1, r}$  с помощью дополнительных измерений, значения которых определяются известной геометрией взаимного расположения базовых гидрофонов. Как вариант, такими параметрами могут быть квадраты расстояний между базовыми гидрофонами  $L_{j,k}^2 = |\bar{p}_j - \bar{p}_k|^2, j = \overline{1, r-1}, k = j+1, r$ , и тогда дополнительные измерения – это



$$\overbrace{Z_1 = L_{1,2}^2, Z_2 = L_{1,3}^2, Z_3 = L_{2,3}^2, Z_4 = L_{1,4}^2, Z_5 = L_{2,4}^2, Z_6 = L_{3,4}^2}^{\text{при } r = 3}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{при } r = 4}$$

либо, без указания конкретного  $r$ ,

$$Z_l = L_{j,k}^2, l = \overline{1, r(r-1)/2}; j = \begin{cases} 1 & \text{при } l \in \{1, 2, 4\}, \\ 2 & \text{при } l \in \{3, 5\}, \\ 3 & \text{при } l = 6; \end{cases} k = \begin{cases} 2 & \text{при } l = 1, \\ 3 & \text{при } l \in \{2, 3\}, \\ 4 & \text{при } l \in \{4, 5, 6\}. \end{cases} \quad (17)$$

Обращаем внимание, что разность между числом оцениваемых на втором этапе параметров – координат  $x_j, y_j, z_j, j = \overline{1, r}$  базовых гидрофонов и числом дополнительных измерений (17) составляет  $3r - r(r-1)/2 = r(7-r)/2$ , т.е. и при  $r = 3$ , и при  $r = 4$  разность равна 6. Это совпадает с количеством искомым независимых параметров в рассматриваемой задаче – трех координат  $x_0, y_0, z_0$  КТ АНПА и трех углов  $K, \psi, \theta$ .

Поскольку расстояния между гидрофонами в разных системах координат одинаковы, то

$$Z_l = L_{j,k}^2 = (p_j - p_k)^T (p_j - p_k) =$$

$$= \underbrace{(\check{p}_j - \check{p}_k)^T (\check{p}_j - \check{p}_k)}_{\check{Z}_l} + \underbrace{2(\check{p}_j - \check{p}_k)^T (\delta\check{p}_j - \delta\check{p}_k)}_{\delta Z_l^1} + \underbrace{(\delta\check{p}_j - \delta\check{p}_k)^T (\delta\check{p}_j - \delta\check{p}_k)}_{\delta Z_l^2}, \quad (18)$$

$$l = \overline{1, r(r-1)/2}.$$

В приведенном выражении  $\check{Z}_l$  – известные величины. Вектор погрешностей  $\delta\check{p} = (\delta\check{p}_1^T \dots \delta\check{p}_r^T)^T$  считается случайным с центрированным гауссовским распределением и ковариационной матрицей  $\check{P}$ . Исходя из этого, квадратичные (с точки зрения разностей погрешностей) составляющие  $\delta Z_l^2$  в (18) трактуются как случайные помехи измерений, которые имеют нецентрированное распределение и не коррелированы с линейными составляющими  $\delta Z_l^1$ , причем между собой  $\delta Z_l^2$  для разных  $l$  коррелированы. Для  $\delta Z_l^2$  справедливо представление  $\delta Z_l^2 = \delta\check{p}^T B^{(j,k)} \delta\check{p}$ , где  $B^{(j,k)} - 3r \times 3r$ -матрица, имеющая только четыре ненулевых  $3 \times 3$ -блока  $B_{j,j}^{(j,k)} = B_{k,k}^{(j,k)} = E_3, B_{j,k}^{(j,k)} = B_{k,j}^{(j,k)} = -E_3$  (первый нижний индекс у  $B^{(j,k)}$  – номер блока по вертикали, второй – по горизонтали). Отсюда вытекают следующие выражения для математического ожидания  $\delta Z_l^2$  и ковариации между  $\delta Z_l^2$  и  $\delta Z_{l^*}^2$  [15, 23]:

$$\delta\check{Z}_l^2 = \mathbf{M}[\delta Z_l^2] = \mathbf{Sp}[B^{(j,k)} \check{P}] = \mathbf{Sp}[\check{P}_{j,j} - 2\check{P}_{j,k} + \check{P}_{k,k}] =$$

$$= \sum_{f=1}^3 ([\check{P}_{j,j}]_{f,f} - 2[\check{P}_{j,k}]_{f,f} + [\check{P}_{k,k}]_{f,f});$$

$$\check{R}_{l,l^*} = \mathbf{M}[(\delta Z_l^2 - \delta\check{Z}_l^2)(\delta Z_{l^*}^2 - \delta\check{Z}_{l^*}^2)] = 2\mathbf{Sp}[B^{(j,k)} \check{P} B^{(j^*,k^*)} \check{P}] = \quad (19)$$

$$= 2\mathbf{Sp}[\underbrace{(\check{P}_{j,j^*} - \check{P}_{j,k^*} - \check{P}_{k,j^*} + \check{P}_{k,k^*})^2}_{\check{P}_{k,k^*}^{j,j^*}}] = 2 \sum_{e=1}^3 \sum_{f=1}^3 [\check{P}_{k,k^*}^{j,j^*}]_{e,f} [\check{P}_{k,k^*}^{j,j^*}]_{f,e},$$

где  $\mathbf{M}[\cdot]$  – математическое ожидание;  $\mathbf{Sp}[\cdot]$  – след матрицы;  $[\cdot]_{ef}$  – элемент матрицы;  $l, l^* = \overline{1, r(r-1)/2}$ ; индексы  $j^*, k^*$  определяются по  $l^*$  так же, как в (17) индексы  $j, k$  определяются по  $l$ ;  $\check{P}_{j,k} - 3 \times 3$ -блоки матрицы  $\check{P}$  ( $j$  – номер блока по вертикали,  $k$  – по горизонтали).

Составленные согласно (17) измерения  $Z_j$  с учетом выражений (18) и параметров помех (19) используются для получения байесовской оценки  $p$ . Измерения  $Z_j$  обрабатываются с помощью выражений фильтра Калмана [14, 15]. По существу речь идет об одношаговом применении фильтра второго порядка [15, 23], поскольку в  $Z_j$  учитывается квадратичная составляющая  $\delta Z_j^2$ . При этом в качестве оценок прогноза и ковариационной матрицы их погрешностей выступают полученные на втором этапе  $\check{p}$  и  $\check{P}$ . В результате вычисляется оценка вектора координат базовых гидрофонов  $\hat{p} = (\hat{p}_1^T \mid \dots \mid \hat{p}_r^T)^T$ , в которой наряду с измерениями дальностей учтены (именно благодаря  $Z_j$ ) априорные данные о взаимном расположении гидрофонов.

Можно использовать итерационную процедуру, где в рамках одной итерации последовательно определяются  $\check{p}$ ,  $\check{P}$  (второй этап) и  $\hat{p}$ . При этом начиная со второй итерации для линеаризации дальностей в (16) вместо оценок  $\check{p}_j$ , полученных на первом этапе, используются  $\hat{p}_j$ ,  $j = 1, r$  с предыдущей итерации.

Для финальной (если применяются итерации, то полученной на последней из них) оценки  $\hat{p}$  вычисляется ковариационная матрица их погрешностей  $P$ . Отметим, что учет нелинейных составляющих в выражениях (18) для измерений  $Z_j$  актуален при сопоставимых с уровнем погрешностей  $\delta p_j = p_j - \check{p}_j$  расстояниях между гидрофонами.

**Четвертый этап** – пересчет результатов оценивания координат базовых гидрофонов в оценку  $\hat{p}_0$  вектора координат КТ АНПА в осях  $x, y, z$  связанной с маяками СК, оценки  $\hat{K}, \hat{\psi}, \hat{\theta}$  углов ориентации АНПА относительно  $x, y, z$  и соответствующие СКП. Не вдаваясь в подробности, приведем ключевые соображения, на которых основано получение  $\hat{p}_0, \hat{K}, \hat{\psi}, \hat{\theta}$  и их СКП.

При оценивании  $p_0$  в дополнение к  $r$  нужно принять во внимание величину

$$r_0 = \text{rank} \left( \begin{array}{c|c|c|c} \check{p}_0 & \check{p}_1 & \dots & \check{p}_r \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right) = \text{rank} \left( \begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \check{p}_1 & \dots & \check{p}_r \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

С учетом условия (3) очевидно, что  $r \leq r_0 \leq 4$ . Следует различать три варианта взаимного расположения гидрофонов и КТ:

- 1)  $r = r_0 = 4$  – гидрофоны не лежат в одной плоскости, положение КТ не имеет значения;
- 2)  $r = r_0 = 3$  – гидрофоны и КТ лежат в одной плоскости;
- 3)  $r = 3, r_0 = 4$  – гидрофоны лежат в одной плоскости, но КТ этой плоскости не принадлежит.

Существуют такие коэффициенты  $q_{0,k}, k = \overline{1, r_0 - 1}$ , из них как минимум один ненулевой, что

$$\left. \begin{array}{l} \Delta p_{0,1} = \sum_{k=1}^{r_0-1} \Delta p_{k+1,1} q_{0,k}, \\ \Delta \check{p}_{0,1} = \sum_{k=1}^{r_0-1} \Delta \check{p}_{k+1,1} q_{0,k}, \end{array} \right\} \text{при } r = r_0 = 4 \text{ или } r = r_0 = 3;$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta p_{0,1} = \Delta p_{2,1} q_{0,1} + \Delta p_{3,1} q_{0,2} + \Delta p_{2,1} \times \Delta p_{3,1} q_{0,3}, \\ \Delta \check{p}_{0,1} = \Delta \check{p}_{2,1} q_{0,1} + \Delta \check{p}_{3,1} q_{0,2} + \Delta \check{p}_{2,1} \times \Delta \check{p}_{3,1} q_{0,3}, \end{array} \right\} \text{при } r = 3, r_0 = 4. \quad (20)$$

Разности  $\Delta\tilde{p}_{j,1}$ ,  $j = \overline{2, n}$  известны, и  $\Delta\tilde{p}_{0,1} = -\tilde{p}_1$ . Это позволяет определить коэффициенты  $q_{0,k}$ ,  $k = \overline{1, r_0 - 1}$  из второй и четвертой строк (20) как

$$\begin{aligned} (q_{0,1} \mid q_{0,2} \mid q_{0,3})^T &= -(\Delta\tilde{p}_{2,1} \mid \Delta\tilde{p}_{3,1} \mid \Delta\tilde{p}_{4,1})^{-1} \tilde{p}_1 \quad \text{при } r = r_0 = 4; \\ (q_{0,1} \mid q_{0,2})^T &= -(\Delta\tilde{p}_{2,1} \mid \Delta\tilde{p}_{3,1})^+ \tilde{p}_1 \quad \text{при } r = r_0 = 3; \\ (q_{0,1} \mid q_{0,2} \mid q_{0,3})^T &= -(\Delta\tilde{p}_{2,1} \mid \Delta\tilde{p}_{3,1} \mid \Delta\tilde{p}_{2,1} \times \Delta\tilde{p}_{3,1})^{-1} \tilde{p}_1 \quad \text{при } r = 3, r_0 = 4. \end{aligned}$$

При  $r = r_0 = 4$  и  $r = r_0 = 3$  по аналогии с (14), (15) имеем

$$p_0 = p_1 + \Delta p_{0,1} = (1 - \sum_{k=1}^{r-1} q_{0,k}) p_1 + \sum_{k=1}^{r-1} q_{0,k} p_{k+1} = Q_0 p, \quad (21)$$

где  $Q_0 = (1 - \sum_{k=1}^{r-1} q_{0,k} \mid q_{0,1} \mid \dots \mid q_{0,r-1}) \otimes E_3$ .

При  $r = 3$ ,  $r_0 = 4$  зависимость  $p_0$  от  $p$  – квадратичная из-за векторного произведения в уравнении для  $\Delta p_{0,1}$  (см. третью строку в (20)). С учетом равенств  $\Delta p_{j,1} = \Delta \hat{p}_{j,1} + (\delta \hat{p}_j - \delta \hat{p}_1)$ , где  $\delta \hat{p}_j = p_j - \hat{p}_j$  – погрешность вектора координат  $j$ -го гидрофона, вектор  $p_0$  может быть записан в виде

$$\begin{aligned} p_0 = p_1 + \Delta p_{0,1} &= \Delta \hat{p}_{2,1} \times \Delta \hat{p}_{3,1} q_{0,3} + (1 - \sum_{k=1}^2 q_{0,k}) p_1 + \sum_{k=1}^2 q_{0,k} p_{k+1} + \\ &+ [\Delta \hat{p}_{2,1} \times (\delta \hat{p}_3 - \delta \hat{p}_1) - \Delta \hat{p}_{3,1} \times (\delta \hat{p}_2 - \delta \hat{p}_1) + (\delta \hat{p}_2 - \delta \hat{p}_1) \times (\delta \hat{p}_3 - \delta \hat{p}_1)] q_{0,3}. \end{aligned} \quad (22)$$

При этом  $\delta \hat{p} = (\delta \hat{p}_1^T \mid \delta \hat{p}_2^T \mid \delta \hat{p}_3^T)^T$  считается гауссовским центрированным вектором с ковариационной матрицей  $P$ .

Выражения (21), (22) позволяют получить из  $\hat{p}$  и  $P$  оценку  $\hat{p}_0$  и соответствующие ей три СКП. Понятно, что третий вариант расположения гидрофонов и КТ ( $r = 3$ ,  $r_0 = 4$ ) наименее удачный, и его по возможности следует избегать.

Чтобы оценить углы  $K$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , определяется матрица  $A$  перехода от осей  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для получения  $A$  применяется одно из выражений:

$$A = \begin{cases} (\Delta p_{2,1} \mid \Delta p_{3,1} \mid \Delta p_{4,1}) (\Delta \tilde{p}_{2,1} \mid \Delta \tilde{p}_{3,1} \mid \Delta \tilde{p}_{4,1})^{-1} & \text{при } r = 4; \\ (\Delta p_{2,1} \mid \Delta p_{3,1} \mid \Delta p_{2,1} \times \Delta p_{3,1}) (\Delta \tilde{p}_{2,1} \mid \Delta \tilde{p}_{3,1} \mid \Delta \tilde{p}_{2,1} \times \Delta \tilde{p}_{3,1})^{-1} & \text{при } r = 3. \end{cases}$$

С учетом соотношений между элементами  $A$  и искомыми углами [13]

$$\begin{aligned} A_{12} &= \sin K \cos \psi, \quad A_{22} = \cos K \cos \psi, \\ A_{31} &= -\cos \psi \sin \theta, \quad A_{32} = \sin \psi, \quad A_{33} = \cos \psi \cos \theta, \end{aligned}$$

а также оговоренного в постановке задачи условия  $|\psi| \neq 90^\circ$  углы определяются в виде

$$K = \text{atan2}(A_{12}, A_{22}), \quad \psi = \arcsin(A_{32}), \quad \theta = -\text{atan2}(A_{31}, A_{33}). \quad (23)$$

Заметим, что в особых случаях взаимного расположения гидрофонов и КТ вместо (21)–(23) для оценивания  $p_0$ ,  $K$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  могут использоваться более простые выражения.

Предложенный алгоритм оценивания  $p_0$ ,  $K$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  не требует выполнения трудоемких математических операций и может быть легко реализован в реальном времени. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 2. На ней  $u$  – номер итерации,  $u_{\max}$  – заданное число итераций,  $p_j^*$  – точка линеаризации дальностей  $d_j^i$ , в качестве которой на 1-й итерации

выступает  $\bar{p}_j$ , а на последующих –  $\hat{p}_j$ ,  $\bar{p} = (\bar{p}_1^T \mid \dots \mid \bar{p}_r^T)^T$ ,  $\hat{p} = (\hat{p}_1^T \mid \dots \mid \hat{p}_r^T)^T$ . Заметим, что объединить второй и третий этапы алгоритма для совместной обработки дальномерных измерений  $Y$  и квадратов расстояний между базовыми гидрофонами  $Z_l, l = \overline{1, r(r-1)/2}$  нельзя. На третьем этапе выполняется байесовское оценивание  $p$ . Для этого требуется ковариационная матрица погрешностей оценок координат гидрофонов, которая вырабатывается на втором этапе.

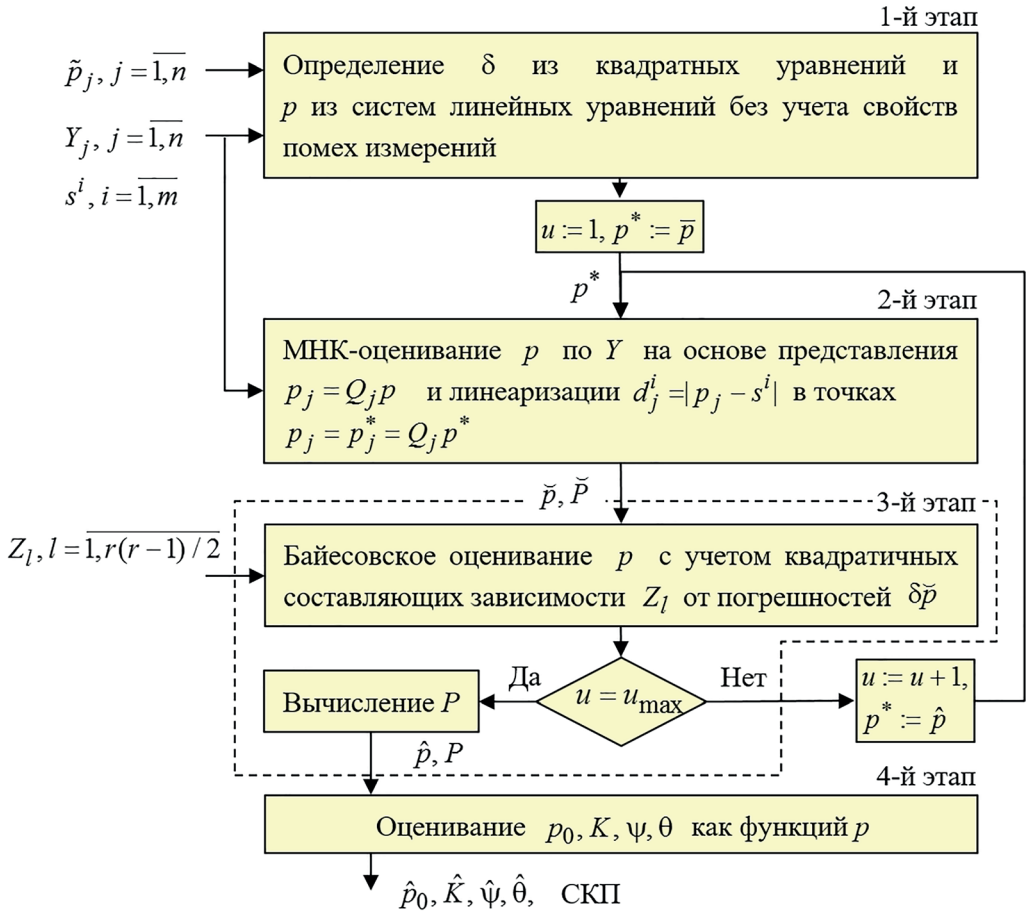


Рис. 2. Блок-схема алгоритма оценивания относительных координат и углов ориентации АНПА

### 3. Результаты моделирования

Для проверки эффективности представленного алгоритма проведено моделирование решения задачи позиционирования и определения ориентации АНПА с использованием  $n = 10$  гидрофонов и  $m = 4$  маяков, когда для каждого гидрофона имеются измерения по 4 маякам –  $m_j = m = 4, j = \overline{1, 10}$ . Общее число измерений –  $M = nm = 40$ . Координаты гидрофонов и маяков указаны в табл. 1 и 2. Они удовлетворяют условиям (3), (4): гидрофоны не находятся на одной прямой, а маяки – не в одной плоскости. Гидрофоны и КТ лежат в одной плоскости –  $r = r_0 = 3$ , т.е. в данном случае имеем три базовых гидрофона.

Таблица 1

Координаты гидрофонов, мм

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_j$	0	0	75	75	0	0	0	0	-75	-75
$\tilde{y}_j$	800	-800	800	-800	875	-725	725	-875	800	-800
$\tilde{z}_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2

Координаты маяков, мм

$i$	1	2	3	4
$x^i$	0	0	-437	437
$y^i$	-797	803	424	424
$z^i$	255	234	802	802

Нетрудно видеть, что боковое разнесение гидрофонов (по оси  $\tilde{x}$ ) более чем в 20 раз меньше, чем продольное (по оси  $\tilde{y}$ ). Это обуславливает сравнительно низкую точность определения угла крена. КТ АНПА находится на продольной оси  $\tilde{y}$  вместе с гидрофонами 1 и 2, что благоприятно сказывается на точности расчета координат КТ  $x_0, y_0, z_0$ .

Моделирование проводилось для примеров с различными углами  $K, \psi, \theta$  ориентации АНПА при фиксированных значениях координат КТ  $x_0, y_0, z_0$  и при  $\sigma_v^j = \sigma_v = 10$  мм,  $j = \overline{1,10}$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Намеренно рассматривались примеры с неблагоприятным геометрическим фактором, т.е. существенно превышающим 1 отношением СКП оценок параметров к СКО помех измерений дальностей  $\sigma_v$ . Погрешность измерений  $\delta$ , вызванная рассинхронизацией гидрофонов и маяков, – неизвестный параметр, поэтому ее истинное значение не играет роли. Для каждого примера моделировалось  $10^4$  решений со случайными реализациями помех  $v_j^i, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,10}$ . По совокупности  $10^4$  решений рассчитывались действительные и расчетные значения СКП [15] оценок координат КТ АНПА и углов его ориентации. В алгоритме решения оценки  $\tilde{p}_j, j = \overline{1,3}$  и ковариационная матрица  $\tilde{P}$  второго этапа и оценки  $\hat{p}_j, j = \overline{1,3}$  третьего этапа определялись за две итерации. Применение двух итераций повышает точность оценок по сравнению с безытерационным решением, тогда как дальнейшее увеличение числа итераций не дает ощутимого эффекта. Для получения на четвертом этапе алгоритма оценок  $p_0, K, \psi, \theta$  и их СКП с учетом специфики взаимного расположения гидрофонов и КТ (см. табл. 1) применялись выражения

$$p_0 = \frac{|\tilde{p}_2| p_1 + |\tilde{p}_1| p_2}{L_{1,2}},$$

$$K = \text{atan2}(\Delta x_{12}, \Delta y_{12}), \psi = \arcsin\left(\frac{\Delta z_{12}}{L_{1,2}}\right), \theta = \arcsin\left(-\frac{\Delta z_{31}}{L_{1,3} \cos \psi}\right),$$

в которых  $\Delta x_{12} = x_1 - x_2, \Delta y_{12} = y_1 - y_2, \Delta z_{12} = z_1 - z_2, \Delta z_{31} = z_3 - z_1$ . Моделирование проводилось в среде MATLAB.

Для сравнения с результатами предложенного алгоритма по тем же данным были получены оценки вектора  $p_0$  и углов  $K, \psi, \theta$  на основе максимизации функции правдоподобия [15] для  $(M-1)$ -мерного вектора разностей измерений  $\Delta Y = FY$ , где  $F = (-J_{M-1} \mid E_{M-1})$ , не содержащего  $\delta$ . Функция правдоподобия – условная по отношению к параметрам  $p_0, K, \psi, \theta$  плотность вероятности  $\Delta Y$  – с учетом гауссовости помех измерений представляет собой

$$\mathbf{f}(\Delta Y \mid p_0, K, \psi, \theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\Delta Y - \Delta d(p_0, K, \psi, \theta))^T R_{\Delta}^{-1}(\Delta Y - \Delta d(p_0, K, \psi, \theta))\right],$$

где  $\Delta d(p_0, K, \psi, \theta)$  – вектор-функция, образованная из дальностей  $d_j^i = |p_0 + A(K, \psi, \theta)\tilde{p}_j - s^i|$  подобно тому, как вектор  $\Delta Y$  образован из  $Y_j^i$ ;  $R_\Delta = FR_\nu F^T$ . Значениями  $p_0, K, \psi, \theta$ , максимизирующими функцию правдоподобия, являются

$$p_0^m, K^m, \psi^m, \theta^m = \arg \max_{p_0, K, \psi, \theta} \mathbf{f}(\Delta Y | p_0, K, \psi, \theta) = \arg \min_{p_0, K, \psi, \theta} |\zeta(p_0, K, \psi, \theta)|^2, \quad (24)$$

где  $\zeta(p_0, K, \psi, \theta) = C(\Delta Y - \Delta d(p_0, K, \psi, \theta))$ ,  $C$  – верхнетреугольная матрица разложения Холецкого (Cholesky) [17] для  $R_\Delta^{-1}$  ( $C^T C = R_\Delta^{-1}$ ). Согласно (24) поиск максимума функции правдоподобия сводится к минимизации суммы квадратов компонент вектор-функции  $\zeta(p_0, K, \psi, \theta)$ . С этой целью применялась MATLAB-функция `lsqnonlin` [24], предназначенная для решения именно таких задач. Для начального приближения использовались результаты первого этапа предложенного алгоритма, по которым определялись значения  $p_0, K, \psi$ , но не значение  $\theta$ , которое из-за грубости такого приближения принималось нулевым. В `lsqnonlin` были задействованы аналитические выражения для матрицы частных производных от вектор-функции  $\zeta(p_0, K, \psi, \theta)$  (матрица Якоби (Jacobi)), ускоряющие процесс минимизации. Применялись сбалансированные – между достижимой СКП и временем выполнения – условия остановки итерационной процедуры в функции `lsqnonlin`. Проверено, что более жесткие условия приводят к уменьшению СКП не более чем на 1%. В качестве рабочего алгоритма в `lsqnonlin` выбран алгоритм Левенберга–Марквардта (Levenberg–Marquardt) как более быстрый по сравнению с алгоритмом доверительной области (trust-region-reflective) [25, 26]. Как известно, алгоритм Левенберга–Марквардта обладает худшей устойчивостью к значительным отклонениям начального приближения от точки минимума функции, но в данных условиях этот недостаток не проявлялся: результаты `lsqnonlin` с алгоритмами Левенберга–Марквардта и доверительной области получаются идентичными. Расчетные значения СКП для  $p_0^m$  и  $K^m, \psi^m, \theta^m$  определялись вне функции `lsqnonlin`, где это не предусмотрено, с помощью матрицы Якоби при  $p_0 = p_0^m, K = K^m, \psi = \psi^m, \theta = \theta^m$ .

Приведенные на рис. 3 диаграммы показывают, что по точности предложенное решение не уступает решению методом максимального правдоподобия по всем параметрам, кроме курса: сказывается малость поперечного (по оси  $\tilde{x}$ ) разнесения гидрофонов, сопоставимого с уровнем помех измерений, и плохой геометрический фактор. Наихудшая ситуация складывается при  $\theta = -30^\circ, K = 0$  и  $K = 315^\circ$ , когда действительная СКП курса, выработанного с помощью предложенного алгоритма, может превышать СКП максимального правдоподобия почти вдвое. В то же время действительная и расчетная СКП представленного алгоритма неплохо согласованы за исключением СКП крена, опять же для случаев  $\theta = -30^\circ, K = 0$  и  $K = 315^\circ$ . Здесь алгоритм вырабатывает заниженное значение расчетной СКП крена по отношению к действительной СКП примерно на 20%. Но и такая расчетная СКП позволяет контролировать уровень реальных погрешностей оценок.

Отметим, что при двукратном увеличении поперечного разнесения гидрофонов 3, 4, 9, 10 ( $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = 150$  мм,  $\tilde{x}_9 = \tilde{x}_{10} = -150$  мм) или двукратном уменьшении СКО помех измерений ( $\sigma_\nu = 5$  мм) расхождение между расчетной и действительной СКП курса устраняется, и они значительно сближаются с СКП оценок максимального правдоподобия.

По диаграммам рис. 3 видно, что из координат КТ АНПА хуже всего оценивается  $z_0$ . Это связано с тем, что в рассматриваемых примерах  $z_0$  значительно превышает расстояния между гидрофонами и  $\partial d_j^i / \partial z_0 \approx 1$  для всех  $j, i$ . Получается, что координата

$z_0$  трудноразличима на фоне погрешности  $\delta$ , входящей во все измерения дальности, иначе говоря,  $z_0$  плохо наблюдаема. С координатами  $x_0, y_0$  такого не происходит. Хотя  $|\partial d_j^i / \partial x_0| \ll 1, |\partial d_j^i / \partial y_0| \ll 1$ , производные  $\partial d_j^i / \partial x_0, \partial d_j^i / \partial y_0$  для разных  $j, i$  отличаются друг от друга более существенно по сравнению с  $\partial d_j^i / \partial z_0$ , и поэтому наблюдаемость  $x_0, y_0$  лучше. Из углов хуже всего оценивается крен  $\theta$  из-за малого поперечного разнесения гидрофонов.

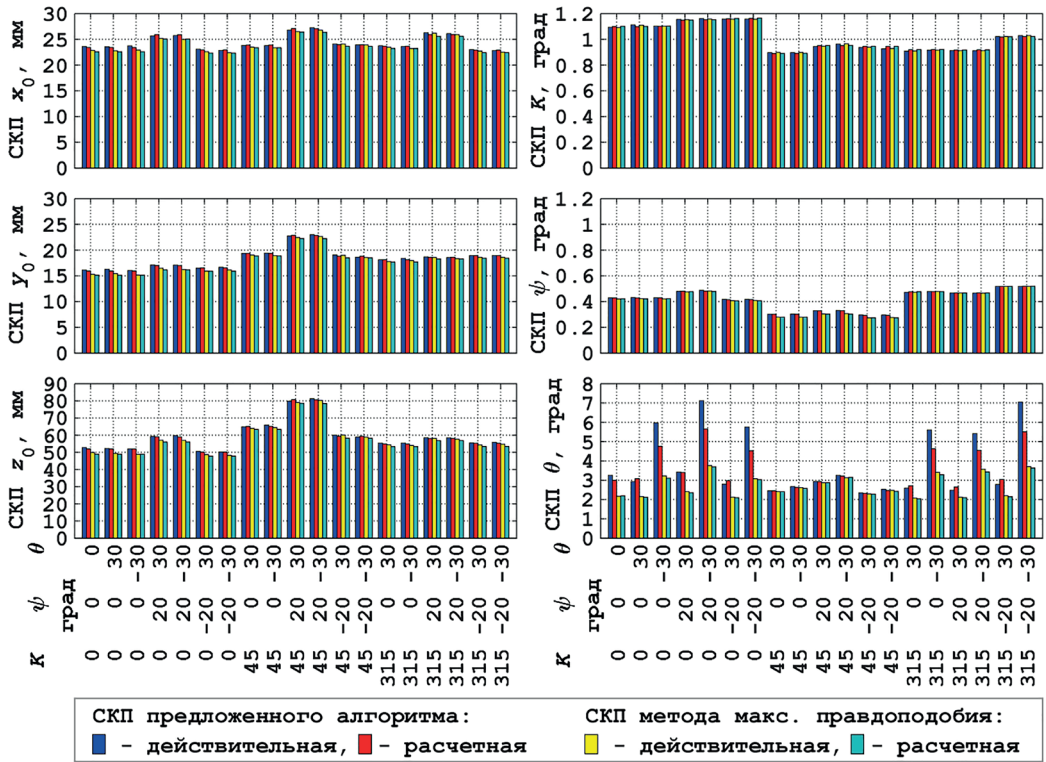


Рис. 3. СКП оценок координат КТ и углов ориентации АНПА по результатам моделирования при  $x_0 = y_0 = 1$  м,  $z_0 = 3,5$  м и различных значениях  $K, \psi, \theta$

Помимо СКП определялось время решения с помощью предложенного алгоритма и метода максимального правдоподобия. Решения были реализованы на персональных компьютерах с различными процессорами в среде MATLAB. Установлено, что предложенный алгоритм выполняется в среднем в 3 раза быстрее по сравнению с методом максимального правдоподобия с применением алгоритма Левенберга–Марквардта, а при использовании алгоритма доверительной области – в 5 раз быстрее. Напомним, что начальное приближение для метода максимального правдоподобия определялось по результатам первого этапа предложенного алгоритма, т.е. задача для этого метода была облегчена. Понятно, что соотношение между временами выполнения двух решений в бортовом вычислителе будет другим. Тем не менее полученная сравнительная оценка трудоемкости предложенного и стандартного решений показывает, что при ограниченных вычислительных ресурсах в бортовой аппаратуре АНПА предложенное решение является предпочтительным.

#### 4. Результаты камеральной обработки натуральных данных

Помимо моделирования проведена апробация алгоритма позиционирования и определения ориентации АНПА на основе камеральной обработки натуральных данных, полученных в бассейне. В экспериментах задействовано 10 гидрофонов и 4 маяка. Их координаты приведены табл. 1, 2. Маяки монтировались на единой конструкции, размещенной на дне бассейна, гидрофоны – на макете АНПА. Истинное положение макета АНПА в связанной с маяками системе координат  $x, y, z$  определялось с помощью поплавковых индикаторов, привязанных к придонной конструкции с маяками, и известных перемещений подвижной части стенда с макетом АНПА. Углы  $K, \psi, \theta$  ориентации макета АНПА относительно осей  $x, y, z$  были нулевыми. Макет АНПА перемещался по вертикали и в горизонтальной плоскости, решения выполнялись при его различных статических положениях. В каждом положении записывались данные для как минимум 140 решений, относящихся к разным моментам времени. В ходе экспериментов не каждый из 10 гидрофонов обрабатывал сигналы от всех 4 маяков, поэтому общее число измерений  $M < 40$ . Как и при моделировании, в алгоритм решения закладывалось единое для всех измерений СКО помех  $\sigma_y = 10$  мм и использовалось 2 итерации.

На рис. 4–6 представлены графики погрешности определения координат КТ  $x_0, y_0, z_0$  и углов ориентации  $K, \psi, \theta$  для трех положений макета АНПА, а также графики утроенных расчетных СКП, вырабатываемых алгоритмом решения. В надписях под рисунками указаны условия, при которых выполнялись решения: положение макета АНПА, число  $n$  рабочих гидрофонов и множества  $\mu_j$  номеров маяков, наблюдаемых гидрофонами.

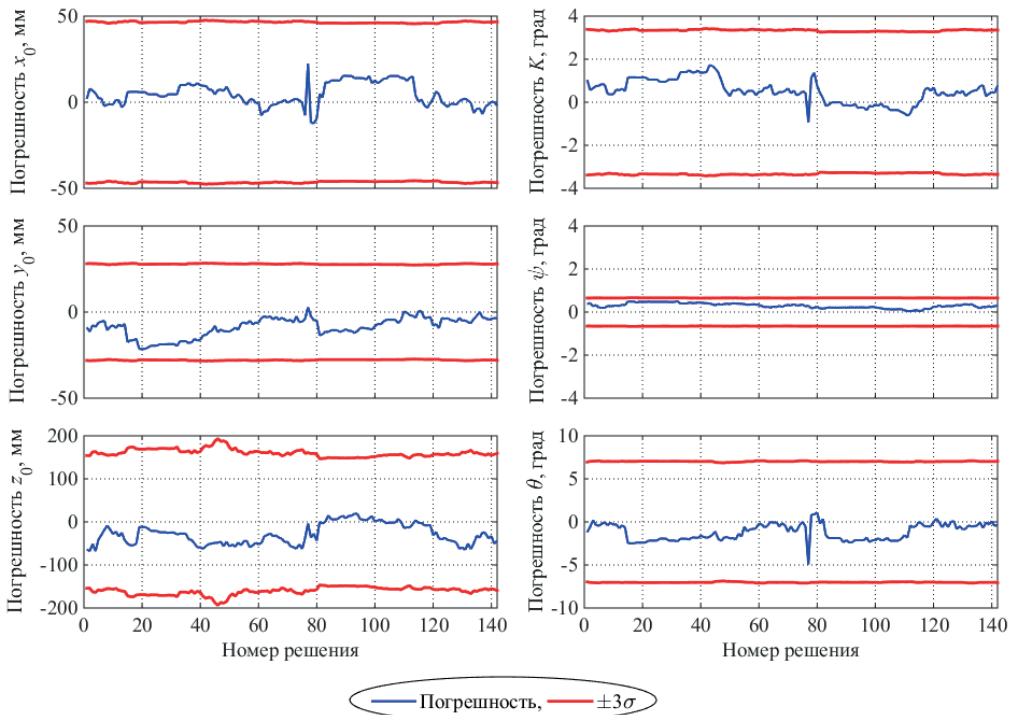


Рис. 4. Погрешности решений по натурным данным при  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 3,5$  м,  $K = \psi = \theta = 0$ ,  $n = 10, \mu_j = \{1, 2, 3, 4\}, j = 1, 9, \mu_{10} = \{4\}$



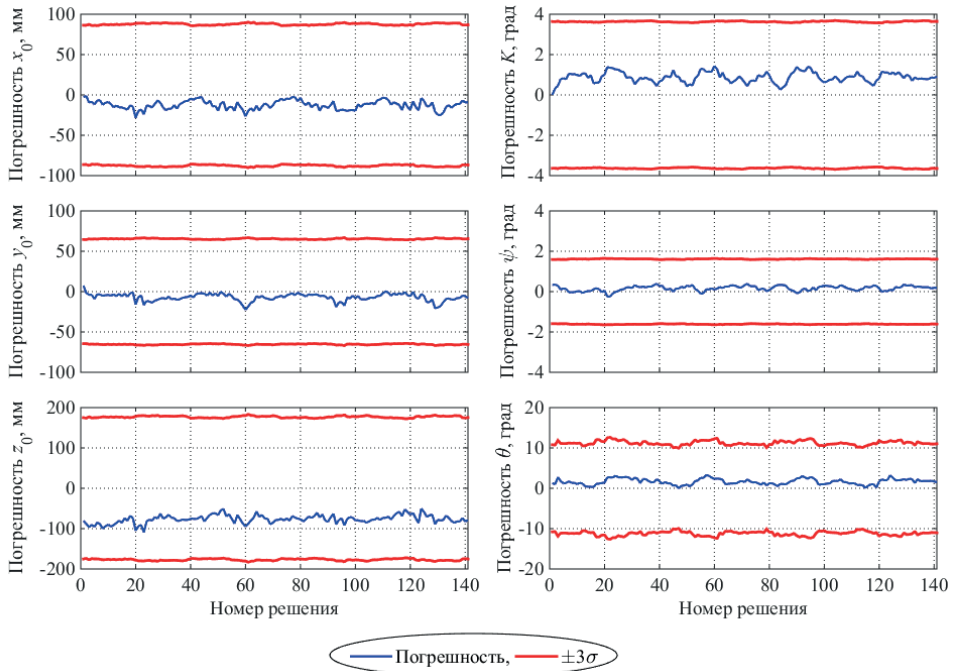


Рис. 5. Погрешности решений по натурным данным при  $x_0 = y_0 = 1,2$  м,  $z_0 = 3,5$  м,  $K = \psi = \theta = 0$ ,  $n = 10$ ,  $\mu_j = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j = 1, 9$ ,  $\mu_{10} = \{4\}$

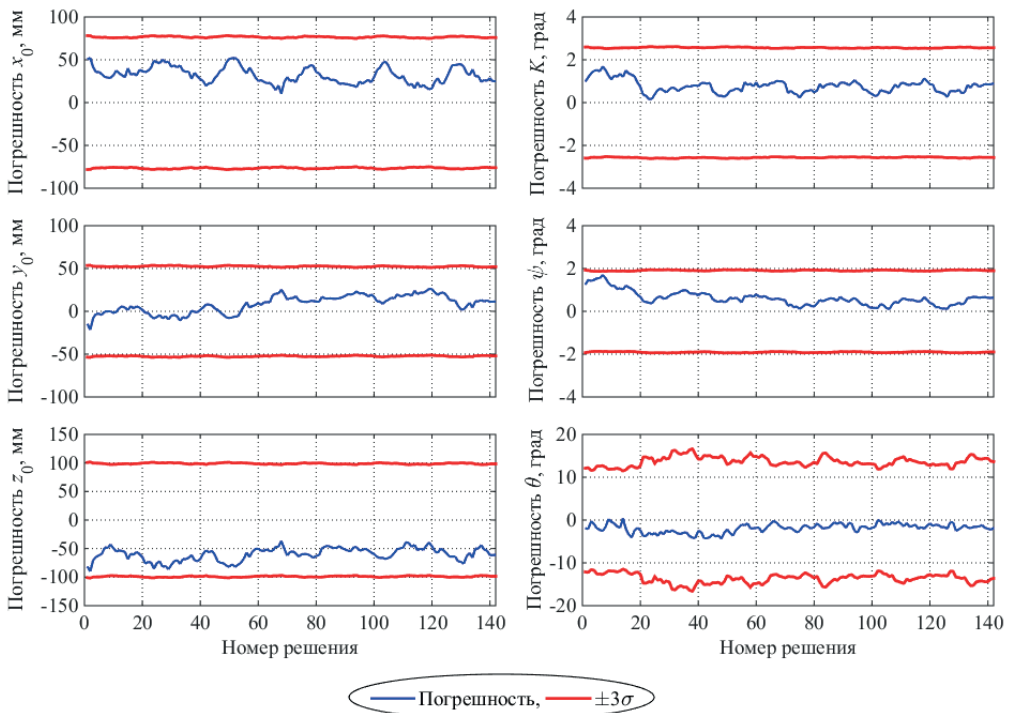


Рис. 6. Погрешности решений по натурным данным при  $x_0 = 1,3$  м,  $y_0 = -1,3$  м,  $z_0 = 2,3$  м,  $K = \psi = \theta = 0$ ,  $n = 9$ ,  $\mu_j = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j = 1, 9$

Отмечаем, что по всем оцениваемым параметрам расчетные СКП не противоречат реальным погрешностям. Вырабатываемые в алгоритме решения ковариационные матрицы  $\tilde{P}$ ,  $P$  зависят от реализации измерений  $Y$ . Этим объясняется изменчивость СКП от решения к решению.

Сопоставляя результаты, представленные на рис. 4 и 5, которые получены при одном и том же вертикальном смещении АНПА  $z_0 = 3,5$  м, заметим, что в первом примере (рис. 4) точность для большинства параметров выше. Это объясняется тем, что здесь имеет место симметричное расположение АНПА относительно маяков, тогда как во втором примере (рис. 5) АНПА смещен вперед и вправо на 1,2 м. Смещение АНПА ухудшает геометрический фактор наблюдаемых маяков и снижает точность оценок. Результаты для второго примера близки к результатам моделирования, где рассматривался вариант с тем же значением  $z_0 = 3,5$  м, но с меньшими  $x_0, y_0$ .

Результаты, показанные на рис. 6, получены при меньшем вертикальном смещении АНПА  $z_0 = 2,3$  м, что, несмотря на несимметричное расположение аппарата относительно маяков, благоприятно отразилось на геометрическом факторе и существенно повысило точность оценивания, особенно  $x_0, y_0$ .

### Заключение

Сформулирована задача определения относительных координат КТ и углов ориентации АНПА по дальномерным мультигидрофонным измерениям как задача оценивания неизвестных параметров. Априорная неопределенность искомым параметров, нелинейно входящих в измерения, не позволяет обойтись для их оценивания методами на основе линеаризации измерений.

Предложен достаточно экономичный для работы в реальном времени алгоритм решения, в котором искомые координаты КТ и углы ориентации АНПА определяются не напрямую, а по результатам оценивания координат базовых гидрофонов. Если все гидрофоны размещены в одной плоскости, в качестве базовых выбираются 3 из них, не лежащие на одной прямой, а если гидрофоны не находятся в одной плоскости, то в роли базовых выступают 4 из них, не расположенные в одной плоскости. Координаты остальных гидрофонов выражаются через координаты базовых. Алгоритм решения состоит из четырех этапов. На первом с помощью простых аналитических выражений вычисляются начальные оценки координат каждого базового гидрофона по измерениям, полученным только от одного рассматриваемого гидрофона. При этом погрешность из-за рассинхронизации гидрофонов и маяков заменяется оценкой, вытекающей из известных расстояний между гидрофонами. На втором этапе с помощью МНК оцениваются координаты гидрофонов по всей совокупности дальномерных измерений, представленных в линеаризованной форме. На третьем этапе оценки координат базовых гидрофонов уточняются по данным о взаимном расположении гидрофонов с применением выражений фильтра второго порядка. Предусматривается выполнение итерационной процедуры, охватывающей второй и третий этапы. Полученные таким образом оценки координат базовых гидрофонов и ковариационная матрица их погрешностей на четвертом этапе пересчитываются в оценки координат КТ АНПА и углов его ориентации относительно связанной с маяками СК с соответствующими СКП.

Проведено моделирование решения задачи с помощью предложенного алгоритма в неблагоприятных для точности условиях: при значительном линейном смещении АНПА относительно платформы с маяками и наклонах, а также при малом поперечном разнесении гидрофонов на АНПА, которое сопоставимо с уровнем помех дальномерных измерений. Несмотря на неблагоприятные условия, алгоритм показал способность эффективно оценивать координаты КТ и углы ориентации. Вырабатываемые в алгоритме расчетные СКП позволяют адекватно оценивать уровень реальных погрешностей решения. Несовпадение между расчетной и действительной СКП возникает только для оценок крена при сильной бортовой качке. При моделировании установлено, что решения, полученные с помощью предложенного алгоритма, по точности не проигрывают оценкам максимального правдоподобия, кроме оценок курса. Время, за которое реализуется разработанный алгоритм, кратно меньше затраченного при решении методом максимального правдоподобия, несмотря на использование в последнем начального приближения в виде оценок, полученных на первом этапе предложенного алгоритма. В дополнение к моделированию рассматриваемый алгоритм апробирован путем камеральной обработки натурных данных, полученных в бассейне. Достигнутые результаты согласуются с результатами моделирования в аналогичных условиях.

### Благодарность

Автор выражает благодарность коллегам из АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон» А.М. Грузликову (нач. отд.), Д.А. Мухину (нач. сект.), Н.А. Шалаеву (инж. 1 кат.), В.Г. Караулову (инж.-программист), проводившим испытания макета АНПА и гидроакустических маяков в бассейне и предоставившим данные этих испытаний для апробации предложенного в статье алгоритма.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Sotiropoulos, P., Tosi, N., Andritsos, F., et al.**, Optimal docking pose and tactile hook-localisation strategy for AUV intervention: the DIFIS deployment case, *Ocean Eng.*, 2012, 46: 33–45.
2. **Palomeras, N., Ridao, P., Ribas, D., Vallicrosa, G.**, Autonomous I-AUV Docking for Fixed-base Manipulation, *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Aug. 24–29, 2014, Cape Town, South Africa, pp. 12160–12165, <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01878>.
3. **Vallicrosa, G., Bosch, J., Palomeras, N., Ridao, P., Carreras, M., Gracias, N.**, Autonomous homing and docking for AUVs using Range-Only Localization and Light Beacons, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, issue 23, pp. 54–60, <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.321>.
4. **Кебкал К.Г., Машошин А.И.** Гидроакустические методы позиционирования автономных необитаемых подводных аппаратов // *Гироскопия и навигация*. 2016. №3. С. 115–130.
5. **Zhong, I., Li, D., Lin, M., Lin, R., Yang, C.**, A Fast Binocular Localisation Method for AUV Docking, *Sensors (Basel)*, 2019, Apr., 19(7): 1735.
6. **Uchihori, H., Yamamoto, I., Morinaga, A.**, Concept of Autonomous Underwater Vehicle Docking Using 3D Imaging Sonar, *Sensors and Materials*, 2019, vol. 31, no. 12, pp. 4223–4230.
7. **Fan, S., Liu, C., Li, B., et al.**, AUV docking based on USBL navigation and vision guidance, *J. Mar. Sci. Technol.*, 2019, 24: 673–685.
8. **Wang, J., Xu, T. and Wang, Z.**, Adaptive robust unscented Kalman filter for AUV acoustic navigation, *Sens.*, 2020, 20: 60.
9. **Zuo, M., Wang, G., Xiao, Y., Xiang, G.**, A Unified Approach for Underwater Homing and Docking of over-Actuated AUV, *J. Mar. Sci. Eng.*, 2021, 9, 884, <https://doi.org/10.3390/jmse9080884>.
10. **Lin, R., Zhang, F., Li, D., Lin, M., Zhou, G., Yang, C.**, An Improved Localization Method for the Transition between Autonomous Underwater Vehicle Homing and Docking, *Sensors*, 2021, 21, 2468, <https://doi.org/10.3390/s21072468>.

11. Грузликов А.М. Навигация АНПА в ближнем поле в интересах решения задачи приведения к причальному устройству // Сборник материалов XXIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб., 2022. С. 138–140.
12. Кошаев Д.А. Относительное позиционирование и определение ориентации автономного необитаемого подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // Материалы XXXIII конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. СПб., 2022. С. 70–77.
13. Емельянец Г.И., Степанов А.П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ Электронприбор», 2016.
14. Дмитриев С.П. Высокоточная морская навигация. СПб.: Судостроение, 1991. 224 с.
15. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации / 3-е изд. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2003.
16. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.
17. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
18. Bancroft, S., An algebraic solution of the GPS equations, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1985, vol. 21, no. 7, pp. 56–59.
19. Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич И.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / под ред. Шебшаевича В.С. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1993. 408 с.
20. Барабанов О.О., Барабанова Л. П. Математические задачи дальномерной навигации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 272 с.
21. Деревянкин А.В., Матасов А.И. О конечном алгоритме определения местоположения объекта по разностям измерений псевдодальностей // Гироскопия и навигация. 2015. №2. С. 106–117.
22. Бедин Д.А. Позиционирование по измерениям псевдодальностей с помощью метода Банкрофта: подходы к описанию нелинейного распределения ошибок // Сборник материалов XXIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб., 2022. С. 319–322.
23. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Басин М.В. Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Часть 1. Описание алгоритма // Гироскопия и навигация. 2021. №3 (114). С. 3–33.
24. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html>
25. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/least-squares-model-fitting-algorithms.html#f204>
26. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

---

**Koshaev, D.A.** (Concern CSRI Elektronpribor, St. Petersburg, Russia)

AUV Relative Position and Attitude Determination Using Acoustic Beacons, *Гироскопия и Навигация*, 2022, vol. 30, no. 4 (119), pp. 122–141.

**Abstract.** The proposed real-time algorithm for autonomous underwater vehicle (AUV) relative position and attitude determination uses range measurements to acoustic beacons positioned at small distances to each other on a common platform. Mutual arrangement of AUV and beacons is a priori unknown, and their time scales are not synchronized. The developed algorithm considers the nonlinear character of measurements while featuring a lower computational burden compared to the maximum likelihood method. Results from simulation and postprocessing of real data with different AUV arrangement relative to the beacons are provided.

**Key words:** autonomous underwater vehicle (AUV), navigation, attitude determination, least squares method, nonlinear Bayesian estimation.

Материал поступил 14.11.2022