

А. А. ГОЛОВАН, И. М. МАРКОВ, И. В. СОЛОВЬЕВ, М. А. ШАТСКИЙ

ДЕКОМПОЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИНФОРМАЦИИ АППАРАТУРЫ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ

Рассматривается метод оценивания траекторных параметров движения космического аппарата (КА) путем комплексирования измерительной информации аппаратуры спутниковой навигации и данных, полученных при помощи бортовых алгоритмов баллистического прогноза движения. Традиционные подходы к решению задачи основаны на использовании фильтра Калмана для определения координат и вектора скорости КА, при этом к бортовым алгоритмам навигации предъявляется требование о минимизации вычислительной нагрузки на бортовой компьютер. Предлагается способ декомпозиции бортового фильтра на три параллельно работающих фильтра второго порядка, существенно сокращающий вычислительную нагрузку при работе алгоритма практически без потери точности вычислений.

Ключевые слова: навигация, декомпозированный алгоритм, космический аппарат, спутниковая навигация.

Введение

Задача автономной навигации является одной из важнейших для обеспечения функционирования целевой аппаратуры КА. В настоящее время она решается на основе данных бортового алгоритма баллистического прогноза движения КА и информации аппаратуры спутниковой навигации (АСН). Различные подходы к этому вопросу изложены в ряде российских и зарубежных работ [1–5].

Чтобы решить задачу оценивания параметров движения центра масс объекта (координат и компонент вектора скорости) на борту КА, используется два источника информации:

- 1) баллистический прогноз, погрешности которого неограниченно возрастают во времени;
- 2) измерения АСН, погрешности которых моделируются стационарным случайным процессом.

Голован Андрей Андреевич. Доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией управления и навигации, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0001-5628-248X.

Марков Илья Михайлович. Инженер 2-й категории, МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова» (Москва).

Соловьев Игорь Валерьевич. Кандидат технических наук, начальник отдела, МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова».

Шатский Михаил Александрович. Кандидат технических наук, доцент, заместитель генерального конструктора, МОКБ «Марс» – филиал ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова».

Окончательно параметры движения центра масс КА оцениваются путем комплексной обработки указанной информации и выработки комплексированного решения, оптимального по критерию минимума среднеквадратической погрешности (СКП) оценки.

Представим постановку задачи комплексной обработки информации бортового алгоритма баллистического прогноза движения КА и АСН в общем виде – аналогично описанию задачи коррекции бесплатформенной инерциальной навигационной системы в [6].

Пусть поведение динамического объекта – КА можно описать уравнениями

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0,$$

где x – вектор состояния; u – информация о внешних силах, действующих на КА.

Для определения текущего значения x привлекаются следующие данные:

$$x'_0 = x_0 + \delta x_0, \quad u' = u + \delta u,$$

где δx_0 – погрешность начального значения вектора состояния; δu – погрешность моделирования величины u .

Система, определяющая вектор состояния x , описывается уравнениями

$$\dot{x}' = f(x', u'), \quad x'(t_0) = x'_0.$$

Эти уравнения назовем по традиции модельными.

Уравнение погрешностей для величины

$$\delta x = x - x'$$

в линеаризованной форме:

$$\delta \dot{x} = F \delta x + q, \quad F = \frac{\partial f(x', u')}{\partial x'}, \quad q = \frac{\partial f(x', u')}{\partial u'} \delta u.$$

АСН предоставляет данные измерений z вектора x :

$$z = x + \zeta,$$

где ζ – погрешность измерения АСН.

Формируется линеаризованное измерение:

$$\delta z = z - x' = H \delta x + \zeta. \quad (1)$$

Структура алгоритма оценивания с использованием калмановской фильтрации:

$$\delta \dot{x} = F \delta x + K (\delta z - H \delta x), \quad (2)$$

где K – коэффициент усиления, выбирается согласно калмановской процедуре.

Оценка $x^{(+)}$ фазового вектора x определяется как

$$x^{(+)} = x' + \delta x^{(+)}.$$

В практике используются соответствующие дискретные соотношения.

Существующие методы решения задачи основаны на использовании фильтра Калмана для оценивания трех координат и трех составляющих вектора скорости [7]. Это позволяет снизить воздействие шумовых составляющих измерений на точность оценивания, упростить бортовую баллистическую модель, обеспечить контроль и диагностику аномалий измерений АСН.

Численная реализация соответствующего алгоритма в бортовом вычислителе при традиционной реализации фильтра Калмана требует значительных вычислительных затрат. Далее приводится способ декомпозиции полноразмерного фильтра шестого порядка на три параллельно работающих фильтра второго порядка, существенно сокращающий нагрузку на вычислитель без потери точности навигации. Аналогичный метод был ранее использован авторами для решения задачи ориентации КА в режиме астрокоррекции [8].

В [8] параметры ориентации КА (параметры его углового движения как твердого тела относительно центра масс) оцениваются по измерениям астродатчика, который выдает кватернион ориентации своей приборной системы координат относительно инерциальной системы координат (ИСК). В настоящей работе аналогичный подход используется для решения задачи навигации КА, т.е. для оценивания параметров движения центра масс (координат и составляющих вектора линейной скорости) по позиционным и скоростным измерениям АСН. В условиях космического полета эти задачи разделяются. Предлагаемые алгоритмы могут применяться также при навигации разгонных блоков ракет-носителей на пассивных участках полета.

Отметим, что численная реализация фильтра Калмана важна как для экономии вычислительных затрат, так и для обеспечения устойчивости вычислений. Были предложены различные подходы к снижению вычислительной нагрузки при численной реализации фильтра [9, 10]: упрощение модели динамической системы, уменьшение размерности вектора состояния, его декомпозиция на ряд подвекторов меньшей размерности, последовательная обработка измерений, привлечение субоптимальных фильтров. В настоящее время для эффективной численной реализации фильтра Калмана используется *U-D*-модификация метода квадратного корня [11], устойчивая к погрешностям машинного округления, в которой отсутствуют операции извлечения квадратного корня и матричного обращения и на каждой итерации алгоритма применяется последовательная поскалярная обработка измерений. Этот вариант *U-D*-фильтра задействован в описываемых ниже алгоритмах навигации.

Следует отметить, что вычислительные затраты при реализации фильтра Калмана нелинейным образом зависят от его размерности: так, число ячеек памяти пропорционально квадрату размерности фазового вектора, а число операций сложения и умножения – ее кубу. В связи с этим, если в конкретной задаче оценивания можно использовать ряд фильтров меньшей размерности, позволяющих решить задачу с требуемой точностью, это будет оправдано с точки зрения уменьшения вычислительной нагрузки на бортовой компьютер.

При построении декомпозированных алгоритмов навигации были задействованы приемы декомпозиции задач оценивания по компонентам вектора измерений. Детали описаны, в частности, в [6].

Важной составляющей рассматриваемой задачи является сравнительный анализ точности предлагаемых декомпозированных алгоритмов и полноразмерного оптимального алгоритма.

Основная цель исследования – разработка декомпозированного алгоритма комплексной обработки информации.

Статья структурирована следующим образом: сначала приводятся опорные математические соотношения исследуемой задачи, далее задача навигации КА рассматривается как коррекция результатов баллистического прогноза при помощи измерений АСН. Ее решение порождает оптимальный алгоритм комплексной обработки информации, который служит образцовой моделью для алгоритма комплексирования. Далее на основе этой модели строятся декомпозированные поканальные алгоритмы оценивания. Описываются результаты ковариационного анализа их точности по сравнению с оптимальным алгоритмом и приводятся некоторые результаты моделирования алгоритмов на примере оценивания параметров движения разгонного блока на пассивном участке траектории.

Опорные математические соотношения задачи навигации как задачи оценивания вектора состояния по измерениям АСН

Ставится задача оценивания вектора состояния

$$x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

по дискретным измерениям АСН

$$z_k = \begin{pmatrix} z_{r,k} \\ z_{v,k} \end{pmatrix} = x(t_k) + \zeta_k = x(t_k) + \begin{pmatrix} \zeta_{r,k} \\ \zeta_{v,k} \end{pmatrix},$$

получаемым в моменты времени t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

Здесь

$$r(t) = (r_1(t) \quad r_2(t) \quad r_3(t))^T -$$

координаты КА в осях ИСК;

$$v(t) = (v_1(t) \quad v_2(t) \quad v_3(t))^T -$$

вектор абсолютной скорости КА в осях ИСК;

$$z_{r,k} = r(t_k) + \zeta_{r,k}, \quad z_{v,k} = v(t_k) + \zeta_{v,k} -$$

позиционные и скоростные данные АСН; $\zeta_{r,k}$ и $\zeta_{v,k}$ – случайные погрешности измерений АСН, представляющие собой белые дискретные гауссовские шумы с заданными априорными характеристиками:

$$M\{\zeta_{r,k}\} = 0_{3 \times 1}, \quad M\{\zeta_{r,i} \zeta_{r,k}^T\} = \sigma_r^2 I_{3 \times 3} \delta_{ik};$$

$$M\{\zeta_{v,k}\} = 0_{3 \times 1}, \quad M\{\zeta_{v,i} \zeta_{v,k}^T\} = \sigma_v^2 I_{3 \times 3} \delta_{ik};$$

$$M\{\zeta_k \zeta_k^T\} = R = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \sigma_v^2 I_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

Здесь $M\{\dots\}$ – символ математического ожидания, I – единичная матрица, δ_{ik} – символ Кронекера.

Будем считать, что ИСК, в которой выдается корректирующая информация АСН, определена следующим образом [12]: начало совпадает с центром масс Земли, ось z направлена в Северный полюс мира, ось x расположена в плоскости экватора и направлена в точку весеннего равноденствия, ось y дополняет систему до правой. Полюс мира и точка весеннего равноденствия соответствуют стандартной эпохе 2000.0 (JD2000.0).

Во избежание перегрузки статьи техническими деталями вопросы синхронизации моментов измерений АСН и моментов формирования результатов баллистического прогноза не рассматриваются: предполагается, что возможная рассинхронизация относительно мала.

Опорные уравнения движения КА:

$$\dot{r}(t) = v(t), \quad (3)$$

$$\dot{v}(t) = g(r) + q_w(t). \quad (4)$$

Здесь $g(r)$ – вектор удельной силы тяготения в инерциальных осях; $q_w(t)$ – случайные возмущения (силы), действующие на КА.

Положим, что на рассматриваемых высотах орбитального движения (геостационарные, высокоэллиптические орбиты) влияние сопротивления атмосферы на движение КА относительно мало и его можно моделировать шумовой составляющей ошибок модели движения. В соответствии с этим допущением вектор $q_w(t)$ далее будем моделировать белым шумом с известными априорными характеристиками:

$$M\{q_w(t)\} = 0_{3 \times 1}, \quad M\{q_w(t)q_w^T(t+\tau)\} = \sigma_w^2 I_{3 \times 3} \delta(\tau) = Q_w \delta(\tau),$$

$$Q_w \equiv \sigma_w^2 I_{3 \times 3}.$$

Уравнения движения (3), (4) можно записать совместно:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + q(t),$$

где

$$f = \begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_6 & -\mu \frac{x_1}{|r|^3} & -\mu \frac{x_2}{|r|^3} & -\mu \frac{x_3}{|r|^3} \end{pmatrix}^T, \\ q = (0 \quad 0 \quad 0 \quad q_{w1} \quad q_{w2} \quad q_{w3})^T.$$

Их можно также представить в матричной форме:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ g(r)_{3 \times 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ q_w(t)_{3 \times 1} \end{pmatrix}.$$

Модельные уравнения баллистического прогноза, используемые в бортовом вычислителе, имеют вид

$$\dot{r}'(t) = v'(t),$$

$$\dot{v}'(t) = g'(r').$$

Здесь $r'(t)$ – модельные инерциальные координаты КА; $v'(t)$ – вектор модельной абсолютной скорости КА в осях ИСК; $g'(r')$ – вычисляемый по известной модели вектор удельной силы тяготения в осях ИСК.

Для определенности будем использовать модель центрального поля тяготения. Тогда имеем:

$$g'(r') = \begin{pmatrix} -\mu \frac{r'_1}{|r'|^3} & -\mu \frac{r'_2}{|r'|^3} & -\mu \frac{r'_3}{|r'|^3} \end{pmatrix}^T, \\ |r'| = \sqrt{(r'_1)^2 + (r'_2)^2 + (r'_3)^2},$$

где $\mu = 398600,4415 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационная постоянная Земли.

Введем вектор погрешностей баллистического прогноза

$$\delta x(t) = x(t) - x'(t) = \begin{pmatrix} \delta r(t) \\ \delta v(t) \end{pmatrix}, \quad x'(t) = \begin{pmatrix} r'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

и вектор разности между измерениями АСН и модельными параметрами

$$\delta z_k = x'(t_k) - z_k = \begin{pmatrix} z_{r,k} - r'(t_k) \\ z_{v,k} - v'(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta z_{r,k} \\ \delta z_{v,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta r(t_k) + \zeta_{r,k} \\ \delta v(t_k) + \zeta_{v,k} \end{pmatrix}.$$

Уравнения погрешностей баллистического прогноза:

$$\delta \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \delta \dot{r}(t) \\ \delta \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ G_{3 \times 3}(r) & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \delta x(t) + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ I_{3 \times 1} \end{pmatrix} q_w(t) = F(t) \delta x(t) + B q_w(t), \\ F(t) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ G_{3 \times 3}(r) & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ I_{3 \times 1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $G(r) = g_{ij}(r) = \partial g_i(r) / \partial r_j$, $i, j = 1, 2, 3$ – гравитационный тензор.

Для модели центрального поля имеем:

$$G(r) = -\frac{\mu}{|r|^3} I_{3 \times 3} + \frac{3\mu}{|r|^5} \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & r_3^2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения измерений:

$$\delta z_k = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} \delta x(t_k) + \begin{pmatrix} \zeta_{r,k} \\ \zeta_{v,k} \end{pmatrix} = H \delta x(t_k) + \zeta_k, \\ H = I_{6 \times 6}, \quad \zeta_k = \begin{pmatrix} \zeta_{r,k} \\ \zeta_{v,k} \end{pmatrix}.$$

Задача оценивания, оптимальный фильтр Калмана

Сформулируем задачу оценивания вектора состояния $x(t)$ по измерениям z_k в непрерывном времени:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + q(t), \\ z_k = Hx(t_k) + \zeta_k.$$

Для построения расширенного фильтра Калмана проведем линеаризацию модели динамической системы в окрестности прогнозируемой траектории:

$$x(t) = \hat{x}(t) + \delta x(t),$$

где $\delta x(t)$ – вектор погрешностей оценок; $\hat{x}(t) = M\{x(t)\}$.

Тогда

$$\delta \dot{x}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=\hat{x}} \delta x(t) + q(t) = F(t) \delta x(t) + q(t).$$

Отсюда получаем линейную задачу оценивания вектора погрешностей $\delta x(t)$ по разностным корректирующим измерениям z_k в соответствии с уравнениями (1), (2):

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= F(t) \delta x(t) + B q_w(t), \\ \delta z_k &= H \delta x(t_k) + \zeta_k. \end{aligned}$$

Соответствующая линейная задача оценивания в дискретном времени:

$$\begin{aligned} \delta x_k &= \Phi_{k|k-1} \delta x_{k-1} + B q_{w,k}, \\ \delta z_k &= H \delta x_k + \zeta_k. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_{k|k-1}$ – переходная матрица; матрицы B, H совпадают с аналогичными матрицами для непрерывной во времени модели; $q_{w,k}$ – дискретный во времени белый шум, эквивалентный шуму q_w , с матрицей интенсивностей Q_k .

Переходная матрица $\Phi_{k|k-1}$ и матрица шума системы Q_k :

$$\begin{aligned} \Phi_{k|k-1} &\approx I + F(t_{k-1}) \Delta t = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \Delta t \\ G(r') \Delta t & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \Delta t = t_k - t_{k-1}, \\ Q_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{k|k-1}(t_k, \tau) B q_w B^T \Phi_{k|k-1}^T(t_k, \tau) d\tau = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3}(t_k - \tau) \\ G(t_k - \tau) & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & Q_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & G(t_k - \tau) \\ I_{3 \times 3}(t_k - \tau) & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{pmatrix} Q_w(t_k - \tau)^2 & Q_w(t_k - \tau) \\ Q_w(t_k - \tau) & Q_w \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} \Delta t^2 / 3 & I_{3 \times 3} \Delta t / 2 \\ I_{3 \times 3} \Delta t / 2 & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} \sigma_w^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$\delta x_k^{(-)}, \delta x_k^{(+)}$ – априорная и апостериорная оценки вектора погрешностей δx_k ;

$\Delta x_k^{(-)} = \delta x_k - \delta x_k^{(-)}, \Delta x_k^{(+)} = \delta x_k - \delta x_k^{(+)}$ – априорная и апостериорная погрешности оценивания;

$P_{\Delta x, k}^{(-)} \equiv P_k^{(-)} = M\{\Delta x_k^{(-)} \Delta x_k^{(-)T}\}$, $P_{\Delta x, k}^{(+)} \equiv P_k^{(+)} = M\{\Delta x_k^{(+)} \Delta x_k^{(+)T}\}$ – ковариационные матрицы априорных и апостериорных погрешностей оценивания соответственно.

Оптимальный алгоритм оценивания описывается формулами (5)–(13) [10].

Априорные оценки (прогноз):

$$x_k^{(-)} = f(x_{k-1}^{(+)}), \quad (5)$$

$$\delta x_k^{(-)} = 0. \quad (6)$$

(математическое ожидание априорной погрешности оценивания тождественно равно нулю),

$$P_k^{(-)} = \Phi_{k|k-1} P_{k-1}^{(+)} \Phi_{k|k-1}^T + Q_k. \quad (7)$$

Апостериорные оценки (обработка измерений):

$$\delta z_k = z_k - x_k^{(-)}, \quad (8)$$

$$K_k = P_k^{(-)} H^T (H P_k^{(-)} H^T + R)^{-1}, \quad (9)$$

$$\delta x_k^{(+)} = \delta x_k^{(-)} + K_k (\delta z_k - H \delta x_k^{(-)}) = K_k \delta z_k, \quad (10)$$

$$P_k^{(+)} = (I - K_k H) P_k^{(-)}, \quad (11)$$

$$x_k^{(+)} = x_k^{(-)} + \delta x_k^{(+)}. \quad (12)$$

Начальные условия:

$$x_0^{(+)} = z_0, \quad \delta x_0^{(+)} = 0, \quad P_0^{(+)} = P_0. \quad (13)$$

Задача оценивания, декомпозированный алгоритм

Введем три вектора погрешностей

$$\delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix}, \quad \delta x^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta r_2 \\ \delta v_2 \end{pmatrix}, \quad \delta x^{(3)} = \begin{pmatrix} \delta r_3 \\ \delta v_3 \end{pmatrix}$$

и три вектора корректирующих разностных измерений

$$\delta z^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_{r,1} \\ \zeta_{v,1} \end{pmatrix}, \quad \delta z^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta r_2 \\ \delta v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_{r,2} \\ \zeta_{v,2} \end{pmatrix}, \quad \delta z^{(3)} = \begin{pmatrix} \delta r_3 \\ \delta v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_{r,3} \\ \zeta_{v,3} \end{pmatrix}.$$

Дискретная форма уравнений погрешностей баллистического прогноза:

$$\begin{aligned} \delta r_{i,k} &= \delta r_{i,k-1} + \delta v_{i,k-1} \Delta t, \\ \delta v_{i,k} &= \delta v_{i,k-1} + g_{ii,k-1} \delta r_{i,k-1} \Delta t + u_{i,k-1}, \end{aligned}$$

где параметры $u_{i,k}$:

$$\begin{aligned} u_{1,k-1} &= (g_{12,k-1} \delta r_{2,k-1} + g_{13,k-1} \delta r_{3,k-1}) \Delta t, \\ u_{2,k-1} &= (g_{12,k-1} \delta r_{1,k-1} + g_{23,k-1} \delta r_{3,k-1}) \Delta t, \\ u_{3,k-1} &= (g_{13,k-1} \delta r_{1,k-1} + g_{23,k-1} \delta r_{2,k-1}) \Delta t. \end{aligned}$$

Далее при реализации декомпозированных алгоритмов коррекции на этапе прогноза оценок величины $u_{i,k}$ будут рассматриваться как известные управления, формируемые по оценкам соответствующих декомпозированных фильтров:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{1,k-1} &= (g_{12,k-1}\delta r_{2,k-1}^{(+)} + g_{13,k-1}\delta r_{3,k-1}^{(+)})\Delta t, \\ \tilde{u}_{2,k-1} &= (g_{12,k-1}\delta r_{1,k-1}^{(+)} + g_{23,k-1}\delta r_{3,k-1}^{(+)})\Delta t, \\ \tilde{u}_{3,k-1} &= (g_{13,k-1}\delta r_{1,k-1}^{(+)} + g_{23,k-1}\delta r_{2,k-1}^{(+)})\Delta t.\end{aligned}$$

Переходные матрицы декомпозированных фильтров:

$$\Phi_{k|k-1}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ g_{ii,k-1}\Delta t & 1 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3.$$

Смысл введения параметров $u_{i,k}$ состоит в том, чтобы разбить фильтр шестого порядка на три фильтра второго порядка, работающие независимо и последовательно. В каждом из них параметр $u_{i,k}$ известен и рассматривается как заданное управление, непосредственно воздействующее на оцениваемые параметры.

Декомпозированный алгоритм оценивания описывается формулами (14)–(43).

Априорные оценки (прогноз):

$$x_k^{(-)} = f(x_{k-1}^{(+)}) \tag{14}$$

$$\tilde{u}_{1,k-1} = (g_{12,k-1}\delta x_{k-1}^{(2)(+)} + g_{13,k-1}\delta x_{k-1}^{(3)(+)})\Delta t, \tag{15}$$

$$\tilde{u}_{2,k-1} = (g_{12,k-1}\delta x_{k-1}^{(1)(+)} + g_{23,k-1}\delta x_{k-1}^{(3)(+)})\Delta t, \tag{16}$$

$$\tilde{u}_{3,k-1} = (g_{13,k-1}\delta x_{k-1}^{(1)(+)} + g_{23,k-1}\delta x_{k-1}^{(2)(+)})\Delta t, \tag{17}$$

$$\delta x_k^{(1)(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}_{1,k-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\delta x_k^{(2)(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}_{2,k-1} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\delta x_k^{(3)(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}_{3,k-1} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$P_k^{(1)(-)} = \Phi_{k|k-1}^{(1)} P_{k-1}^{(1)(+)} \Phi_{k|k-1}^{(1)T} + Q_k^{(1)}, \tag{21}$$

$$P_k^{(2)(-)} = \Phi_{k|k-1}^{(2)} P_{k-1}^{(2)(+)} \Phi_{k|k-1}^{(2)T} + Q_k^{(2)}, \tag{22}$$

$$P_k^{(3)(-)} = \Phi_{k|k-1}^{(3)} P_{k-1}^{(3)(+)} \Phi_{k|k-1}^{(3)T} + Q_k^{(3)}, \tag{23}$$

$$Q_k^{(1)} = \begin{pmatrix} Q_{11,k} & Q_{14,k} \\ Q_{14,k} & Q_{44,k} \end{pmatrix}, Q_k^{(2)} = \begin{pmatrix} Q_{22,k} & Q_{25,k} \\ Q_{25,k} & Q_{55,k} \end{pmatrix}, Q_k^{(3)} = \begin{pmatrix} Q_{33,k} & Q_{36,k} \\ Q_{36,k} & Q_{66,k} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Апостериорные оценки (обработка измерений):

$$\delta z_k^{(1)} = z_k^{(1)} - x_k^{(1)(-)}, \quad (25)$$

$$\delta z_k^{(2)} = z_k^{(2)} - x_k^{(2)(-)}, \quad (26)$$

$$\delta z_k^{(3)} = z_k^{(3)} - x_k^{(3)(-)}, \quad (27)$$

$$K_k^{(1)} = P_k^{(1)(-)} H^T \left(H P_k^{(1)(-)} H^T + R^{(1)} \right)^{-1}, \quad (28)$$

$$K_k^{(2)} = P_k^{(2)(-)} H^T \left(H P_k^{(2)(-)} H^T + R^{(2)} \right)^{-1}, \quad (29)$$

$$K_k^{(2)} = P_k^{(2)(-)} H^T \left(H P_k^{(2)(-)} H^T + R^{(2)} \right)^{-1}, \quad (30)$$

$$R_k^{(1)} = \begin{pmatrix} R_{11,k} & R_{14,k} \\ R_{14,k} & R_{44,k} \end{pmatrix}, \quad R_k^{(2)} = \begin{pmatrix} R_{22,k} & R_{25,k} \\ R_{25,k} & R_{55,k} \end{pmatrix}, \quad R_k^{(3)} = \begin{pmatrix} R_{33,k} & R_{36,k} \\ R_{36,k} & R_{66,k} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\delta x_k^{(1)(+)} = \delta x_k^{(1)(-)} + K_k^{(1)} \left(\delta z_k^{(1)} - H \delta x_k^{(1)(-)} \right), \quad (32)$$

$$\delta x_k^{(2)(+)} = \delta x_k^{(2)(-)} + K_k^{(2)} \left(\delta z_k^{(2)} - H \delta x_k^{(2)(-)} \right), \quad (33)$$

$$\delta x_k^{(3)(+)} = \delta x_k^{(3)(-)} + K_k^{(3)} \left(\delta z_k^{(3)} - H \delta x_k^{(3)(-)} \right), \quad (34)$$

$$P_k^{(1)(+)} = \left(I - K_k^{(1)} H \right) P_k^{(1)(-)}, \quad (35)$$

$$P_k^{(2)(+)} = \left(I - K_k^{(2)} H \right) P_k^{(2)(-)}, \quad (36)$$

$$P_k^{(3)(+)} = \left(I - K_k^{(3)} H \right) P_k^{(3)(-)}. \quad (37)$$

Коррекция вектора состояния:

$$x_{1,k}^{(+)} = x_{1,k}^{(-)} + \delta x_{1,k}^{(1)(+)}, \quad (38)$$

$$x_{2,k}^{(+)} = x_{2,k}^{(-)} + \delta x_{1,k}^{(2)(+)}, \quad (39)$$

$$x_{3,k}^{(+)} = x_{3,k}^{(-)} + \delta x_{1,k}^{(3)(+)}, \quad (40)$$

$$x_{4,k}^{(+)} = x_{4,k}^{(-)} + \delta x_{2,k}^{(1)(+)} + \tilde{u}_{1,k-1}, \quad (41)$$

$$x_{5,k}^{(+)} = x_{5,k}^{(-)} + \delta x_{2,k}^{(2)(+)} + \tilde{u}_{2,k-1}, \quad (42)$$

$$x_{6,k}^{(+)} = x_{6,k}^{(-)} + \delta x_{2,k}^{(3)(+)} + \tilde{u}_{3,k-1}. \quad (43)$$

Ковариационный анализ точности декомпозированного алгоритма

Из оценок декомпозированных фильтров сформируем составной вектор состояния декомпозированного алгоритма оценивания:

$$\delta\tilde{x}_{6 \times 1} = \begin{pmatrix} \delta x_1^{(1)} & \delta x_1^{(2)} & \delta x_1^{(3)} & \delta x_2^{(1)} & \delta x_2^{(2)} & \delta x_2^{(3)} \end{pmatrix}^T.$$

Введем априорные и апостериорные погрешности оценок декомпозированного алгоритма

$$\Delta\tilde{x}_k^{(-)} = \delta x_k - \delta\tilde{x}_k^{(-)}, \quad \Delta\tilde{x}_k^{(+)} = \delta x_k - \delta\tilde{x}_k^{(+)}$$

и соответствующие ковариационные матрицы

$$\tilde{P}_{\Delta\tilde{x},k}^{(-)} \equiv \tilde{P}_k^{(-)} = M \left\{ \Delta\tilde{x}_k^{(-)} \Delta\tilde{x}_k^{(-)T} \right\}, \quad \tilde{P}_{\Delta\tilde{x},k}^{(+)} \equiv \tilde{P}_k^{(+)} = M \left\{ \Delta\tilde{x}_k^{(+)} \Delta\tilde{x}_k^{(+)T} \right\}.$$

Декомпозированный алгоритм отличается от оптимального только выбором составной матрицы коэффициентов $\tilde{K}_k$, сформированной из коэффициентов усиления, выработанных декомпозированными фильтрами:

$$\tilde{K}_k = \begin{pmatrix} k_{11}^{(1)} & 0 & 0 & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & 0 & 0 & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(3)} & 0 & 0 & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(1)} & 0 & 0 & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & 0 & 0 & k_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & 0 & 0 & k_{22}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Здесь $k_{11}^{(i)}, k_{12}^{(i)}, k_{21}^{(i)}, k_{22}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ – коэффициенты усиления трех декомпозированных фильтров второго порядка.

При создании составного декомпозированного алгоритма параметры управлений $u_{i,k}$ входят в переходную матрицу $\Phi_{k|k-1}$, в силу чего она остается неизменной.

Декомпозированный алгоритм в составной форме можно описать выражениями (44)–(48).

Априорные оценки:

$$\delta\tilde{x}_k^{(-)} = 0, \quad (44)$$

$$\tilde{P}_k^{(-)} = \Phi_{k|k-1} \tilde{P}_{k-1}^{(+)} \Phi_{k|k-1}^T + Q_k. \quad (45)$$

Апостериорные оценки:

$$\delta\tilde{x}_k^{(+)} = \delta\tilde{x}_k^{(-)} + \tilde{K}_k \left(\delta z_k - H \delta\tilde{x}_k^{(-)} \right) = \tilde{K}_k \delta z_k, \quad (46)$$

$$\tilde{P}_k^{(+)} = \left(I - \tilde{K}_k H \right) \tilde{P}_k^{(-)} \left(I - \tilde{K}_k H \right)^T + \tilde{K}_k R \tilde{K}_k^T, \quad (47)$$

$$\delta\tilde{x}_0^{(+)} = 0, \quad \tilde{P}_0^{(+)} = P_0. \quad (48)$$

Введем априорные и апостериорные относительные погрешности декомпозированного алгоритма:

$$Dx_k^{(-)} = \Delta\tilde{x}_k^{(-)} - \Delta x_k^{(-)} = \delta\tilde{x}_k^{(-)} - \delta x_k^{(-)},$$

$$Dx_k^{(+)} = \Delta\tilde{x}_k^{(+)} - \Delta x_k^{(+)} = \delta\tilde{x}_k^{(+)} - \delta x_k^{(+)}.$$

Они удовлетворяют уравнениям:

$$Dx_k^{(-)} = 0, \quad (49)$$

$$Dx_k^{(+)} = (I - \tilde{K}_k H) Dx_k^{(-)} - \Delta K_k H \delta x_k^{(-)} + \Delta K_k \delta z_k = \Delta K_k \delta z_k, \quad (50)$$

$$\Delta K_k = \tilde{K}_k - K_k, \quad (51)$$

$$Dx_0^{(+)} = 0. \quad (52)$$

Введем матрицы кросс-ковариаций априорных и апостериорных погрешностей оценок оптимального и декомпозированного алгоритмов:

$$P_{c,k}^{(-)} = M \left\{ \Delta \tilde{x}_k^{(-)} \Delta x_k^{(-)T} \right\} = M \left\{ \Delta x_k^{(-)} \Delta \tilde{x}_k^{(-)T} \right\},$$

$$P_{c,k}^{(+)} = M \left\{ \Delta \tilde{x}_k^{(+)} \Delta x_k^{(+T)} \right\} = M \left\{ \Delta x_k^{(+)} \Delta \tilde{x}_k^{(+T)} \right\},$$

$$P_{c,0}^{(-)} = P_{c,0}^{(+)} = 0.$$

Они удовлетворяют уравнениям:

$$P_{c,k}^{(-)} = \Phi_{k|k-1} P_{c,k-1}^{(+)} \Phi_{k|k-1}^T + Q_k, \quad (53)$$

$$P_{c,k}^{(+)} = (I - K_k H) P_{c,k}^{(-)} (I - \tilde{K}_k H)^T + K_k R \tilde{K}_k^T. \quad (54)$$

Поскольку из (9) следует, что

$$K_k R = (I - K_k H) P_k^{(-)} H^T,$$

имеем

$$P_{c,k}^{(+)} = P_k^{(+)} = (I - K_k H) P_k^{(-)}.$$

Введем составные векторы априорных и апостериорных погрешностей

$$Dy_k^{(-)} = \begin{pmatrix} Dx_k^{(-)} \\ \delta x_k^{(-)} \end{pmatrix}, \quad Dy_k^{(+)} = \begin{pmatrix} Dx_k^{(+)} \\ \delta x_k^{(+)} \end{pmatrix}$$

и соответствующие ковариационные матрицы

$$P_{y,k}^{(\pm)} = M \left\{ Dy_k^{(\pm)} Dy_k^{(\pm)T} \right\} = \begin{pmatrix} Dx_k^{(\pm)} \\ \delta x_k^{(\pm)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dx_k^{(\pm)T} & \delta x_k^{(\pm)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{DD,k}^{(\pm)} & P_{D\delta,k}^{(\pm)} \\ P_{\delta D,k}^{(\pm)} & P_{\delta\delta,k}^{(\pm)} \end{pmatrix},$$

$$P_{y,0}^{(\pm)} = 0.$$

Ковариационные матрицы априорных оценок:

$$\begin{aligned}
 P_{DD,k}^{(-)} &= \Phi_{k|k-1} P_{DD,k-1}^{(+)} \Phi_{k|k-1}^T, \\
 P_{D\delta,k}^{(-)} &= \Phi_{k|k-1} \underbrace{\left(P_{c,k-1}^{(+)} - P_{k-1}^{(+)} \right)}_{=0} \Phi_{k|k-1}^T + Q_k = Q_k, \\
 P_{\delta\delta,k}^{(-)} &= P_k^{(-)} = \Phi_{k|k-1} P_{k-1}^{(+)} \Phi_{k|k-1}^T + Q_k.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Ковариационные матрицы апостериорных оценок:

$$\begin{aligned}
 P_{DD,k}^{(+)} &= (I - \tilde{K}_k H) P_{DD,k}^{(-)} (I - \tilde{K}_k H)^T + \Delta K_k (H P_k^{(-)} H^T + R) \Delta K_k^T - \\
 &\quad - \underbrace{(I - \tilde{K}_k H) (P_{c,k}^{(-)} - P_k^{(-)}) H^T \Delta K_k^T - \Delta K_k H (P_{c,k}^{(-)} - P_k^{(-)}) (I - \tilde{K}_k H)^T}_{=0}, \\
 P_{D\delta,k}^{(+)} &= (I - \tilde{K}_k H) \underbrace{(P_{c,k}^{(-)} - P_k^{(-)})}_{=0} - \Delta K_k H P_k^{(-)}, \\
 P_{\delta\delta,k}^{(+)} &= P_k^{(+)} = (I - K_k H) P_k^{(-)}.
 \end{aligned}$$

Окончательно имеем для апостериорных погрешностей:

$$\begin{aligned}
 P_{DD,k}^{(+)} &= (I - \tilde{K}_k H) P_{DD,k}^{(-)} (I - \tilde{K}_k H)^T + \Delta K_k (H P_k^{(-)} H^T + R) \Delta K_k^T, \\
 P_{D\delta,k}^{(+)} &= -\Delta K_k H P_k^{(-)}, \\
 P_{\delta\delta,k}^{(+)} &= P_k^{(+)} = (I - K_k H) P_k^{(-)}.
 \end{aligned} \tag{56}$$

Выражения (55) и (56) описывают поведение во времени относительных погрешностей декомпозированного алгоритма по сравнению с оптимальным. Отметим, что при их выводе не использовались свойства конкретной рассматриваемой динамической системы, т.е. они характеризуют снижение точности оценок любого алгоритма калмановского типа, отличающегося от фильтра Калмана выбором матрицы коэффициентов усиления, в сравнении с точностью оптимального алгоритма.

Анализ вычислительной сложности (количества арифметических операций) оптимального и декомпозированного алгоритмов показывает, что программная реализация декомпозированного алгоритма требует примерно в пять раз меньше операций умножения и деления.

Результаты моделирования

Приведем результаты моделирования работы декомпозированного алгоритма при оценке параметров движения разгонного блока ракеты-носителя на пассивном участке траектории (при выключенном маршевом двигателе) продолжительностью 2858 с.

При моделировании аномального гравитационного потенциала Земли учитывались члены его разложения в ряд по сферическим функциям вплоть до восьмого порядка. При моделировании бортового алгоритма принималось в расчет только

центральное поле тяготения. Параметры модели шумовых погрешностей измерений АСН: $\sigma_r = 15$ м, $\sigma_v = 0,05$ м/с. Частота измерений АСН – 1 Гц.

На рис. 1 приведены графики погрешностей по оси x измерений АСН, погрешности оценивания координат и составляющих вектора скорости объекта с помощью декомпозированного алгоритма, а также соответствующие им оценки СКП.

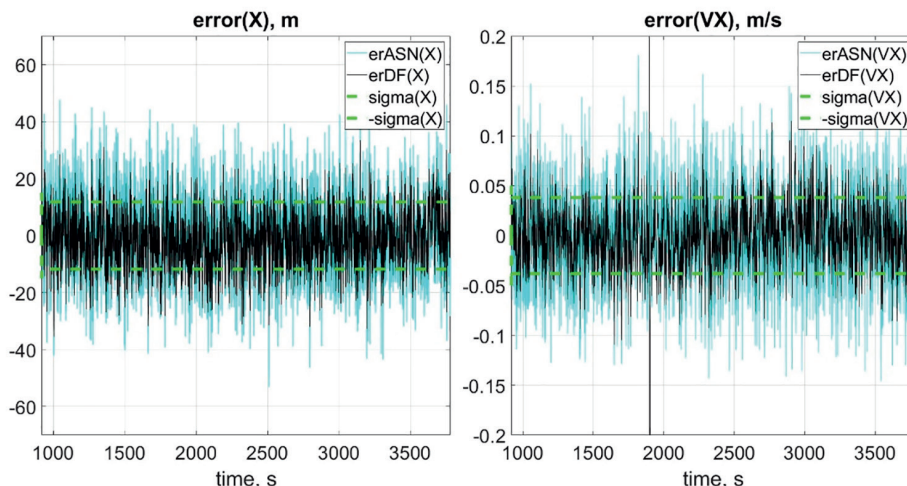


Рис. 1. Погрешности оценивания координат по оси x и x -компоненты вектора скорости по измерениям АСН (голубые линии: $erASN(X)$, $erASN(VX)$) и с помощью декомпозированного алгоритма (черные линии: $erDF(X)$, $erDF(VX)$) с соответствующими оценками СКП (± 1 СКП, $\sigma(X)$, $\sigma(VX)$)

На рис. 2 представлены графики разности погрешностей оценивания координат и составляющих вектора скорости по оси x с помощью декомпозированного и оптимального алгоритмов и их СКП, рассчитанные по (55), (56). Колебания погрешностей обусловлены совершением разгонным блоком оборотов вокруг Земли на пассивном участке траектории полета. Графики демонстрируют снижение точности оценок по сравнению с оптимальным алгоритмом порядка 1 мм (0,07 %) по координатам и 10^{-2} мм/с (0,02 %) по компонентам вектора скорости, т.е. пренебрежимо малое.

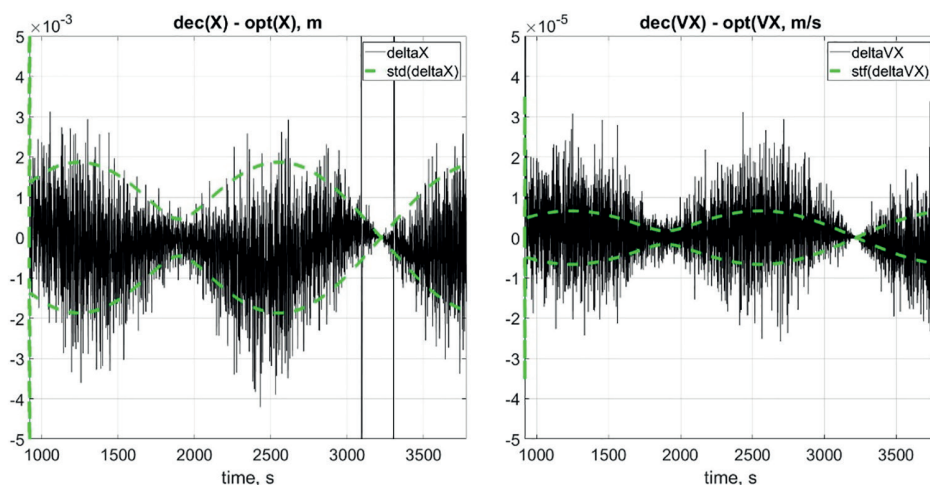


Рис. 2. Разности погрешностей оценивания координат по оси x и x -компоненты вектора скорости с помощью декомпозированного и оптимального алгоритмов (черные линии: δX , δVX) с их СКП (зеленые линии: $\sigma(\delta X)$, $\sigma(\delta VX)$)

Выводы

Рассмотрена задача комплексной обработки информации АСН и алгоритма бортового баллистического прогноза с целью оценки параметров движения КА или разгонного блока на пассивном участке полета. Предложен метод декомпозиции оптимального фильтра Калмана шестого порядка на три фильтра второго порядка, что позволяет существенно снизить вычислительную сложность алгоритма.

Получены соотношения, описывающие поведение во времени ковариационных матриц относительных погрешностей декомпозированного алгоритма по сравнению с оптимальным, справедливые для алгоритма калмановского типа, отличающегося от фильтра Калмана выбором матрицы коэффициентов усиления.

Ковариационный анализ точности результатов работы декомпозированного алгоритма по сравнению с оптимальным алгоритмом показывает потери точности оценивания координат и составляющих вектора скорости аппарата порядка нескольких миллиметров по координатам и нескольких сотых долей миллиметра в секунду по скорости (сотые доли процента), т.е. пренебрежимо малые по сравнению с характерными погрешностями АСН, что доказывает состоятельность предложенного подхода.

В настоящее время алгоритм внедряется в состав бортового программного обеспечения перспективных космических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аншаков Г.П., Голяков А.Д., Петрищев В.Ф., Фурсов В.А. Автономная навигация космических аппаратов. Самара: ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», 2011. 569 с.
2. Михайлов Н.В. Автономная навигация космических кораблей с использованием GPS // Гироскопия и навигация. 2008. №1. С. 3–21.
3. Михайлов Н.В. Автономное определение параметров орбиты искусственных спутников Земли с использованием спутниковых радионавигационных систем // Гироскопия и навигация. 2010. №4. С. 41–52. DOI: 10.17285/0869-7035.2014.22.4.016-033.
4. Тучин Д.А. Автономное определение параметров движения околоземного космического аппарата по измерениям спутниковых навигационных систем: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 / Тучин Денис Андреевич. М., 2004. 111 с.
5. Yoon, Y.T., Eidener, M., Yague-Martinez, N., Montenbruck, O., TerraSAR-X precise trajectory estimation and quality assessment, *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions*, 2009, vol. 47, no. 6, pp. 1859–1868, doi:10.1109/TGRS.2008.2006983.
6. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации / изд. 2-е, испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2012. 172 с.
7. Vallado, D.A., McClain, W.D., *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, McGraw-Hill, 1997, doi: 10.17285/0869-7035.00104.
8. Голован А.А., Моргунова С.Н., Соловьев И.В., Шатский М.А. Декомпозированный алгоритм оценки ориентации космического аппарата в режиме астрокоррекции // Гироскопия и навигация. 2022. №4 (119). С. 71–86.
9. Gelb, A., *Applied Optimal Estimation*, The M.I.T. PRESS, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 2001.
10. Grewal, M.S., Andrews, A.P., *Kalman Filter: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
11. Kailath, T., Sayed A.H., Hassibi, B., *Linear Estimation*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2000.
12. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11). Справочный документ. М., 2014.

Golovan, A.A. (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia), **Markov, I.I., Solov'ev, I.V., and Shatskii, M.A.** (Moscow Experimental Design Bureau MOKB Mars – Branch of Dukhov Russian National Research Institute of Automation, Moscow, Russia)

Decomposed Algorithm for Spacecraft Motion Parameters Estimation by GNSS Data, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2025, vol. 33, no. 2 (129), pp. 32–47.

Abstract. This article discusses the problem of estimating spacecraft trajectory parameters based on data provided by a GNSS (Global Navigation Satellite System) receiver and onboard spacecraft motion prediction algorithms. The traditional approach to solving the mentioned problem relies on Kalman filtering techniques for estimating the spacecraft's coordinates and velocity. The navigation algorithms in the onboard computer must meet the technical requirements for maximum reduction in computational load. The paper proposes a method of decomposition for onboard integration algorithm using three parallel second-order filters. This algorithmic approach significantly reduces the computational load of the algorithm, while maintaining accuracy. The main goal of this paper is to design a decomposed algorithm for estimation problem posed.

Key words: navigation, decomposed algorithm, spacecraft, GNSS-based navigation.

Материал поступил 21.04.2025