

УДК 528.88:550.388.2  
EDN VZKGED

В. М. АРТЕМЬЕВ, А. О. НАУМОВ, П. А. ХМАРСКИЙ

## АЛГОРИТМ ТРЕХМЕРНОЙ РАДИОТОМОГРАФИИ ИОНОСФЕРЫ ПО ДАННЫМ СИГНАЛОВ ГЛОБАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

*В статье описываются особенности построения алгоритма трехмерной томографии концентрации электронов в ионосфере по радиосигналам глобальной навигационной спутниковой системы. На модельных данных исследуются положенные в его основу алгебраические методы реконструкции. Обсуждаются способы учета априорных сведений и подходы к оптимизации параметров этих алгебраических методов. Приводятся экспериментальные результаты реконструкции ионосферы по данным спутниковой системы точного позиционирования Республики Беларусь.*

**Ключевые слова:** ионосфера, глобальные навигационные спутниковые системы, радиотомография, алгебраическая реконструкция, полное электронное содержание, трехмерная реконструкция, SART-алгоритм.

### Введение

Ионосфера является высокоионизированным слоем атмосферы Земли, состояние которого играет важную роль в радиосвязи, радионавигации и других системах, использующих электромагнитные волны [1, 2]. Достоверная информация о трехмерной структуре концентрации электронов в ионосфере позволяет улучшить точность позиционирования и навигации, а также обеспечить более надежную коротковолновую радиосвязь в условиях изменчивости ионосферы [3–9].

Существенный вклад в развитие методов радиотомографии ионосферы внес профессор В.Е. Куницын совместно со своими учениками. В его работах [1, 10–12] были предложены эффективные алгоритмы радиотомографии ионосферы на основе спутниковых данных. Эти исследования стали основой современного, активно развивающегося в последние десятилетия подхода к трехмерной реконструкции распределения электронной концентрации.

Появление глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) обеспечило доступ к обширной сети спутников, излучающих сигналы на различных частотах,

---

**Артемьев** Валентин Михайлович. Член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Республика Беларусь). ORCID 0009-0007-6246-992X.

**Наумов** Александр Олегович. Кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси. ORCID 0000-0002-4624-9261.

**Хмарский** Петр Александрович. Кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, докторант, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси. Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0003-3404-3917.

Статья по докладом на XXVI конференции молодых ученых «Навигация и управление движением» и XXXI Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2024 [27].

которые взаимодействуют с ионосферой во время прохождения через нее [1–3, 7, 9, 13, 14–16]. Такие данные легли в основу множества методов трехмерной радиотомографии полей концентрации электронов в ионосфере, прежде всего основанных на использовании различных алгоритмов итеративной алгебраической реконструкции [17–20]. Например, на модели IDA3D, представленной в [21], успешно продемонстрирован мультисенсорный подход к реконструкции трехмерных изображений. При этом оригинальный подход к тестированию методов радиотомографии на основе математического моделирования предложен в работе [22]. Обзор [23] посвящен истории развития методов реконструкции ионосферы, текущему состоянию и перспективам применения мультиинструментальных подходов для восстановления электронной плотности, что особенно актуально для глобального мониторинга в реальном времени. В [24] предложена система MIDAS (Multi-Instrument Data Analysis System), которая интегрирует различные источники данных для построения высокоточных трехмерных моделей электронной концентрации ионосферы.

Несмотря на эти достижения, по-прежнему остаются нерешенными ряд задач, связанных с радиотомографией ионосферы по данным ГНСС. Среди них можно выделить [18, 25, 26] следующие: выбор оптимального размера и геометрии элемента реконструкции – вокселя (англ. voxel, образовано от volume и pixel), способы сглаживания реконструируемых данных, обоснование вводимых ограничений и учет априорных сведений о состоянии ионосферы, а также многомерная оптимизация параметров разработанных алгоритмов. В этих условиях особую актуальность приобретают методы, учитывающие априорную информацию для решения задач радиотомографии [10, 12].

В настоящей статье рассматривается разработанный алгоритм трехмерной радиотомографии ионосферы, демонстрируется его работоспособность на модельных и экспериментальных данных. В основу алгоритма положен метод алгебраической реконструкции. Чтобы обеспечить устойчивость решения задачи, введены ограничения. Продемонстрирована перспективность применения предложенного подхода в радионавигационных системах.

Статья состоит из четырех разделов. В первом описываются исходные данные для радиотомографии ионосферы, полученные с помощью сигналов ГНСС. Во втором разделе изложен алгоритм трехмерной радиотомографии ионосферы на основе алгебраических методов реконструкции с учетом априорной информации. Третий раздел посвящен компьютерному моделированию методов реконструкции ионосферы. В четвертом обсуждаются результаты экспериментальной проверки алгоритма трехмерной радиотомографии ионосферы по данным системы точного позиционирования Республики Беларусь. В заключении подведены итоги работы и намечены перспективы дальнейших исследований.

## **1. Описание исходных данных и постановка задачи**

Радиотомография ионосферы, выполняемая с использованием данных ГНСС, требует реконструкции изображения в интересующей области путем анализа множества интегральных проекций (рис. 1). Эти проекции соответствуют прохождению радиосигналов по различным траекториям (лучам), формируемым разной геометрией расположения спутников и приемных станций, что эквивалентно раз-

личным направлениям (углам) распространения лучей относительно исследуемой области. Обратные математические задачи, связанные с реконструкцией изображения по измерениям, собранным вдоль лучей, которые либо проходят непосредственно через исследуемую область, либо огибают ее по периферии (вокруг области), сложны, поскольку искомая информация, такая как распределение электронной плотности, непосредственно недоступна [17–20]. Вместо этого доступны только ее определенные преобразования или проекции. На практике эти измерения представляют собой неполные и зашумленные выборки данных [1, 9, 13, 15, 17, 27]. Радиотомография ионосферы, основанная на спутниковых сигналах, может быть затруднена ввиду ограниченного количества спутников и наземных станций и апертуры приема и требует учета дополнительной априорной информации.

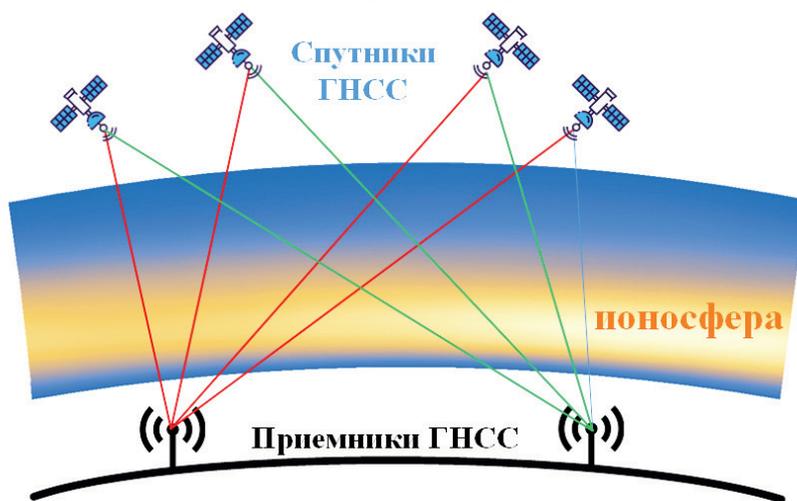


Рис. 1. Принцип радиотомографии ионосферы на основе данных ГНСС

Для восстановления трехмерных изображений электронной плотности ионосферы необходимо рассчитать линейные интегралы по данным, полученным в разных положениях и ориентациях распространения луча через зондируемую область. Эти линейные интегралы имеют вид полного электронного содержания (*total electron content – TEC*), которое может быть записано для произвольного момента времени  $t$  как [1]

$$TEC(t) = \int_l Ne(t, l) dl, \quad (1)$$

где  $Ne(t, l)$  – электронная плотность ионосферы, а  $l$  задает траекторию распространения сигнала между спутником и приемником.

При реконструкции ионосферы сутки, как правило, делятся на ряд временных периодов длительностью не более 30 мин. Детально все этапы определения полного электронного содержания: вычисление *TEC* по кодовым и фазовым псевдодалностям, устранение проскальзывания цикла и расчет дифференциальных кодовых задержек сигналов ГНСС – описаны в предыдущей работе авторов [13], так что здесь задействованы результаты вычисления *TEC* по готовым методикам.

В рамках подхода компьютерной томографии [1], а также с учетом того, что распределение электронной плотности стабильно в течение выбранного периода времени, ионосфера разбивается на регулярную сетку из  $n$  вокселей (см. рис. 2, *a*). Такой

подход основывается на пространственной корреляции ионосферы и предполагает, что в пределах вокселя электронная плотность одинакова. Ряд исследований посвящен выбору геометрии вокселей [28, 29], а также применению вокселей переменного размера [30]. На рис. 2, б приведены возможные варианты геометрии вокселя в прямоугольной системе координат (воксель 1); в прямоугольной системе координат с учетом кривизны Земли (воксель 2); в географической системе координат (воксель 3).

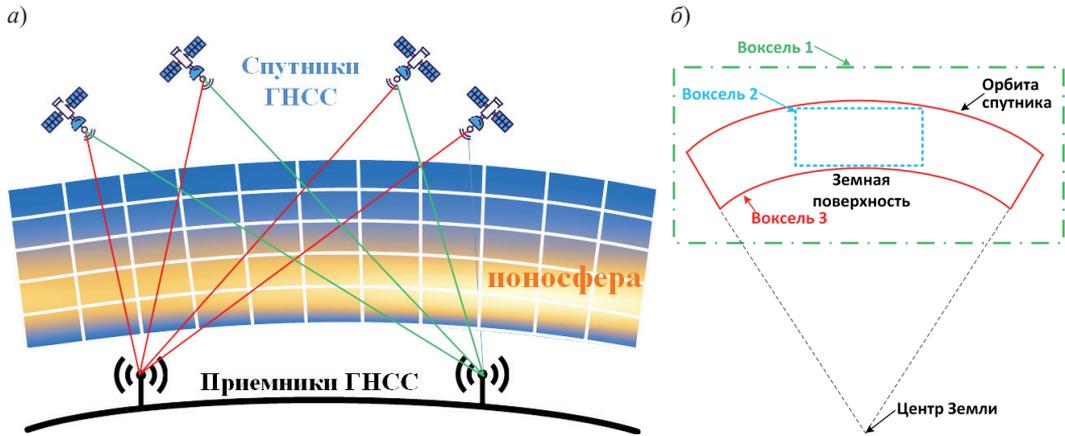


Рис. 2. Дискретизация ионосферы: трехмерные воксели ионосферы (а); подходы к выбору геометрии одного вокселя (б)

Крайне важным при томографии ионосферы является выбор размера элементарного вокселя [18, 25, 26, 28, 29]. При малом размере вокселя пространственное разрешение велико, но при этом возрастают вычислительные затраты и многие воксели могут остаться неучтенными. Увеличение размера вокселя упрощает задачу реконструкции, но при этом снижает качество интерпретации протекающих в ионосфере процессов, что недопустимо в практических задачах (навигации, локации и связи). Определение оптимального размера вокселя по результатам измерений позволяет достичь наилучшего баланса разрешающей способности и точности.

Таким образом, при реконструкции непрерывное распределение плотности  $Ne(l)$  дискретизируется вектором-столбцом  $\mathbf{x}$  размерности  $n \times 1$ . Набор измерений  $TEC$  записывается в виде вектор-столбца  $\mathbf{y}$  размерности  $m \times 1$ . Линейный интеграл в уравнении (1) включает наклонный вклад  $TEC$  на всем пути луча от спутника до приемника. Параметрическое представление уравнения (1) может быть следующим:

$$TEC = \sum_{i=1}^n a_i Ne(r, t) + \varepsilon, \quad (2)$$

где  $i$  и  $a$  – точка выборки и вес для численного интегрирования по точкам выборки соответственно;  $n$  – общее количество вокселей в ионосферной сетке;  $\varepsilon$  – погрешность измерения и моделирования.

Совокупность всех  $m$  измерений (2) может быть представлена в виде дискретной математической задачи. Для этого вводится матрица  $\mathbf{A}$ , связывающая распределения плотности электронов с измерениями  $TEC$ . Тогда выражение (2) можно записать как

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица размерности  $m \times n$ , связывающая распределения плотности электронов с измерениями  $TEC$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор-столбец шумов наблюдений размерности  $m \times 1$ .

Задача радиотомографии в данном случае сводится к вычислению неизвестного распределения электронной плотности  $x$  в заданной области зондирования по известным значениям измерений  $TEC$   $y$  и матрицы коэффициентов  $A$ .

## 2. Алгоритм трехмерной радиотомографии ионосферы

Чтобы решить задачу радиотомографии ионосферы, в последние годы было предложено множество алгоритмов реконструкции [1, 17–20, 25, 26]. Из них наибольшее распространение получили итеративные методы, которые можно разделить на две категории [25, 26]:

- итеративные алгебраические методы реконструкции (Algebraic Reconstruction Technique – ART) – метод Качмажа (Kaczmarz), или классический ART; рандомизированный и симметричный методы Качмажа;
- итеративные методы одновременной алгебраической реконструкции (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique – SART) – классический алгоритм SART, метод усреднения по компонентам (Component Averaging – CAV), методы Чиммино (Cimmino), Ландвебера (Landweber) и диагонально-релаксационных ортогональных проекций (Diagonally Relaxed Orthogonal Projections – DROP).

Основной недостаток алгоритмов ART заключается в их высокой чувствительности к начальному приближению и больших вычислительных затратах. Такие методы позволяют хорошо реконструировать высококонтрастные (резко отличающиеся от окружающего фона) детали изображений, которые, однако, при радиотомографии ионосферы могут отсутствовать в начальных приближениях. В то же время реконструкция общего фона выполняется менее точно и более медленно и часто сопровождается возникновением артефактов в виде «волн» и «биений» в фоновых областях реконструируемого изображения. В таких случаях целесообразно переходить к более сложным алгоритмам SART с регуляризацией, где лучше учитывается априорная информация, в результате чего они более эффективно справляются с указанными проблемами.

Итеративные методы одновременной алгебраической реконструкции SART применяются в том случае, когда доступные измерения или наблюдения являются неполными, зашумленными или имеют ограничения [18]. SART позволяют находить оптимальное решение обратной задачи реконструкции с учетом всех доступных данных и ограничений и получить более точные и высококачественные оценки в сравнении с классическими алгоритмами ART, что может быть полезно для понимания ионосферных процессов и прогнозирования ионосферной активности.

Тем не менее при определении начальных значений для SART также необходимо использовать эмпирические ионосферные модели, которые отражают лишь среднемесячную вариацию ионосферы, поэтому точность томографических результатов невысока. Эти недостатки устраняются с помощью методов алгебраической реконструкции с вводимыми ограничениями (Constrained algebraic reconstruction technique – CART) [25, 26].

В ходе исследований был проведен сопоставительный анализ алгоритмов реконструкции, показавший, что в основу разрабатываемого алгоритма реконструкции ионосферы с ограничениями целесообразно положить метод Ландвебера [18, 25], который характеризуется наименьшей вычислительной сложностью и высокой скоростью сходимости. Алгоритм Ландвебера базируется на итеративной процедуре

минимизации функционала рассогласования путем последовательного обновления решения в направлении антиградиента. На каждом шаге текущая оценка уточняется с учетом разности между расчетными и измеренными данными, взвешенной матрицей оператора прямой задачи, что обеспечивает устойчивую сходимость алгоритма при малой вычислительной сложности.

Сопоставительный анализ, результаты которого представлены в таблице, подтверждает, что алгоритм Ландвебера в наибольшей степени подходит для разрабатываемого метода трехмерной реконструкции, поскольку демонстрирует одно из лучших соотношений между вычислительной эффективностью (время выполнения 0,23 с) и точностью (невязка по измерениям 0,249, невязка по изображениям 0,956).

Это справедливо и в отношении методов Качмажа: по сравнению с ними алгоритм Ландвебера обеспечивает более высокую точность при сопоставимом времени выполнения. Хотя такие алгоритмы, как DROP и CAV, обладают сходной вычислительной эффективностью, они требуют большего количества итераций и показывают худшие результаты.

Т а б л и ц а

Сравнение методов трехмерной реконструкции

Метод реконструкции	Время выполнения, с	Число итераций	Нормированная невязка по измерениям $y$	Нормированная невязка по изображению $x$
<b>Итеративные алгебраические методы реконструкции ART</b>				
Метод Качмажа	248,14	458	0,357	0,684
Рандомизированный метод Качмажа	684,1	587	0,116	0,783
Симметричный метод Качмажа	212,98	172	0,127	0,846
<b>Итеративные методы одновременной алгебраической реконструкции SART</b>				
Классический алгоритм SART	0,48	1483	0,109	0,992
Метод Ландвебера	0,23	584	0,249	0,956
Метод Чиммино	0,368	746	0,277	0,908
CAV	0,288	897	0,288	0,892
DROP	0,562	751	0,281	0,921

Все алгоритмы проверялись на одинаковом вычислительном оборудовании: процессоре AMD Ryzen 7 7700 (8 ядер, 3,8 ГГц) с 32 Гб оперативной памяти DDR4. Для их реализации использовалась среда MATLAB со встроенными функциями для работы с матрицами. Расчет производился на восьмиядерном процессоре. Приведенные в таблице значения времени – средние по 10 независимым запускам для каждого алгоритма на одном и том же наборе данных размерностью 14 850 (число вокселей по широте – 18, по долготе – 33, по высоте – 25). Следует отметить, что хотя время выполнения программы специфично для каждой конкретной вычислительной платформы и реализации, относительные соотношения скорости выполнения алгоритмов позволяют сравнить их между собой по вычислительной эффективности.

На других аппаратных платформах абсолютные значения времени могут отличаться, однако соотношение между алгоритмами сохранится.

Приведенные в таблице результаты были получены при моделировании, выполненном для оценки эффективности различных алгоритмов реконструкции. Подробно условия моделирования, включая параметры шума, используемую модель и методику проведения эксперимента, описываются в разделе 3.

Для учета ограничений на гладкость распределения плотности электронов вводится матрица  $\mathbf{B}$  размерности  $n \times n$ , которая связывает соседние воксели с помощью девятиточечной конечно-разностной аппроксимации оператора Лапласа [25, 26]. Для этого уравнение наблюдения (3) дополняется следующим:

$$\alpha \mathbf{B} \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_{sm} = 0, \quad (4)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_{sm}$  – шумы аппроксимации;  $\alpha$  – весовой коэффициент, при котором шумы аппроксимации и шумы  $\boldsymbol{\varepsilon}$  одинаковы по уровню.

Разработанный алгоритм был модифицирован под исходные данные и сводится к итеративному вычислению выражения

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \beta \lambda_k \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}^k), \quad (5)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}^k$  – оценка вектора электронной концентрации  $\mathbf{x}$  в узлах сетки  $m \times n$  на  $k$ -й итерации;  $\beta$  – коэффициент, учитывающий вес априорных значений вектора  $\hat{\mathbf{x}}^0$ ;  $\lambda_k$  – коэффициент релаксации, который учитывает априорное распределение концентрации электронов;  $\tilde{\mathbf{A}} = \|\mathbf{A} \quad \mathbf{B}\|^T$  – расширенная матрица наблюдения, дополненная матрицей ограничений  $\mathbf{B}$ ;  $\tilde{\mathbf{y}} = \|\mathbf{y} \quad \mathbf{O}\|^T$  – расширенный вектор наблюдения, дополненный нулевым  $n$ -мерным вектором  $\mathbf{O}$ .

Предложенный алгоритм трехмерной реконструкции ионосферы на основе модифицированного алгоритма Ландвебера с введенными ограничениями состоит из следующих этапов [27]:

- определение пространственной разрешающей способности;
- прием поступающих входных измерений  $\mathbf{y}$ ;
- вычисление составляющих матрицы  $\mathbf{A}$  на основании данных о координатах спутников и наземных станций;
- установка начальных значений  $\mathbf{x}^0$  с учетом данных модели ионосферы IRI-2016 [31–33] или ограничений по Чепману [1] при отсутствии априорных сведений;
- инициализация  $\lambda_k$  данными об априорном распределении концентрации электронов [31–33];
- вычисление матрицы ограничений  $\mathbf{B}$  [25, 26] и дополнение ею матрицы  $\mathbf{A}$ ;
- вычисление выражения (4) до достижения требуемой точности (решение об остановке итераций).

На вход алгоритма реконструкции поступает вектор измерений  $\mathbf{y}$  (размерностью  $m \times 1$ ), имеющий в своем составе значения полного электронного содержания в ионосфере по линиям «спутник – наземная приемная станция» (1)–(3). Разрешающая способность по пространству определяется количеством вокселей по высоте  $n_h$ , широте  $n_{lat}$  и долготе  $n_{lon}$ . Общая размерность  $n$  реконструируемого вектора  $\mathbf{x}$  будет равна:

$$n = n_h \times n_{lat} \times n_{lon}.$$

В процессе вычисления матрицы наблюдения  $\mathbf{A}$  для каждого луча (спутник – наземная станция) определяются те воксели, которые пересекает этот луч. В соответствующих ячейках матрицы записывается длина пересечения луча с каждым таким вокселем; элементы, соответствующие вокселям, через которые луч не проходит, равны нулю.

Пример рассчитанной матрицы наблюдения приведен на рис. 3 для следующих исходных данных: общее число вокселей – 108 000 (число вокселей по широте – 60, по долготе – 60, по высоте – 30); общее количество измерений  $TEC$  – 564 (для 94 станций и 6 спутников на каждую станцию).

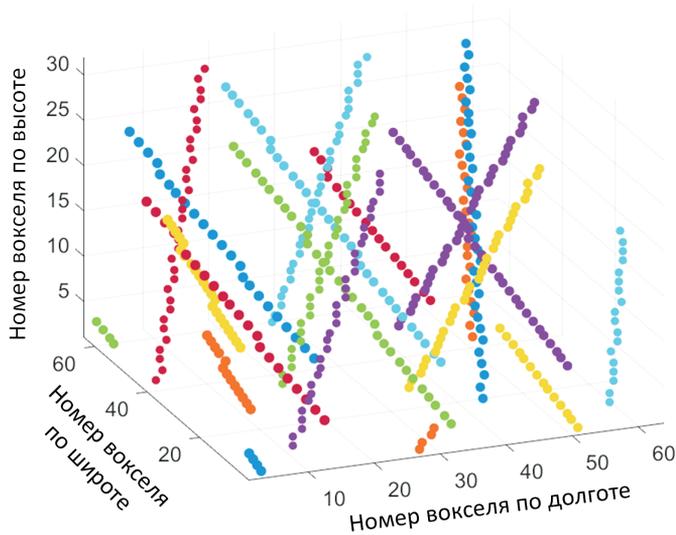


Рис. 3. Пример рассчитанной матрицы наблюдения  $\mathbf{A}$

Для определения начального состояния электронной плотности в узлах воксельной сетки  $\mathbf{x}^0$  используются как эмпирические данные модели IRI-2016 [31–33], так и аналитические подходы. Модель IRI-2016 предоставляет информацию о высотных уровнях и сезонных вариациях ионосферы для различных географических координат. Профиль Чепмена (для ночного времени) и экспоненциальная модель (для дневного времени) применяются на этапе моделирования.

Начальное значение реконструируемого вектора  $\mathbf{x}^0$  для ночного времени, а также коэффициент релаксации  $\lambda_k$  целесообразно вычислять в соответствии с уравнением Чепмена, которое описывает распределение электронов в ионосфере  $Ne_{Chap}$  в зависимости от высоты [14]:

$$Ne_{Chap}(h_r) = Ne_{max} \exp(c[1 - h_r - \exp(-h_r)]), \quad (6)$$

где  $Ne_{max}$  – максимальное значение электронной плотности (на высоте в точке прокола ионосферы);  $c$  – индекс уравнения Чепмена (при  $c = 0,5$  уравнение называется  $\alpha$ -Чепмен, а при  $c = 1 - \beta$ -Чепмен);  $h_r$  – приведенная высота.

Дневные условия лучше отражает экспоненциальное распределение  $Ne_{exp}$  [14]:

$$Ne_{exp}(h_r) = Ne_{max} \exp(-h_r), \quad (7)$$

На рис. 4 приведен пример расчета двумерного априорного пространственного распределения концентрации электронов в соответствии с уравнениями (6), (7). Уравнение Чепмена и экспоненциальная функция основываются на физике атмосферы и результатах ее многолетнего наблюдения и позволяют учесть априорные сведения о распределении электронов в ионосфере по высоте на этапе ее реконструкции. Считается, что ионосфера состоит из одного слоя электронов, которые экспоненциально распределены по высоте. В уравнения (6), (7) вводится предположение об отсутствии колебаний в ионосфере в горизонтальной плоскости, при этом коэффициент поглощения солнечного излучения постоянен (что эквивалентно предположению о монохроматическом излучении).

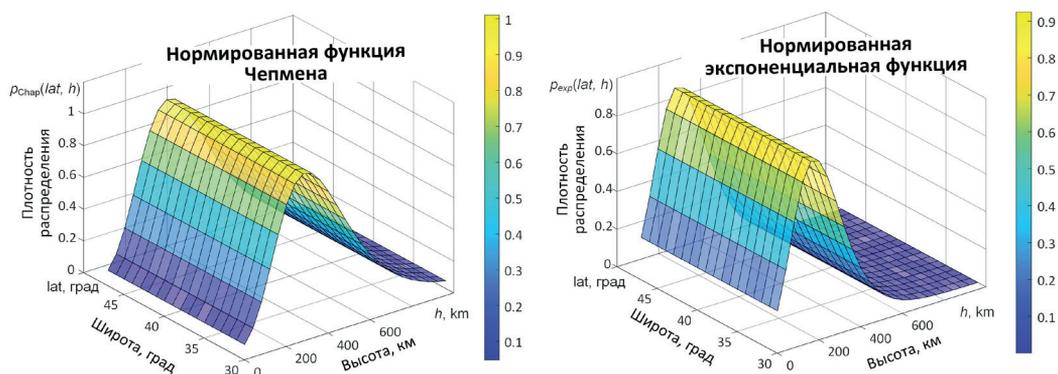


Рис. 4. Примеры расчета априорного пространственного распределения электронов в ионосфере

Несмотря на то что реальное состояние ионосферы может быть более сложным, с помощью уравнений (6)–(7) можно оперативно обработать полученные наблюдения и представить априорное распределение ионосферы по высоте для последующей ее реконструкции. Коэффициент  $\beta$  в выражении (4) позволяет учесть вес априорного значения  $x^0$ , полученного в соответствии с уравнениями (6)–(7) с учетом усредненных значений  $y$  по всему набору вокселей.

Как можно видеть на рис. 5, *a*, некоторые воксели (например,  $x_3$ ) не охвачены наблюдениями, т.е. рассматриваемая модель не обеспечивает полного покрытия. При выполнении стандартной процедуры реконструкции значения таких вокселей будут сходиться к априорно заданным. Для устранения этого несоответствия вводится матрица  $\mathbf{B}$ , которая накладывает ограничения на гладкость функции распределения. Тогда воксель, не попавший ни в один луч, будет извлекать информацию из соседних, а воксель, для которого доступно достаточное количество независимых измерений (избыточно определенный), принимает свое значение в результате прямого расчета по исходным данным. При этом, чтобы обеспечить гладкость решения и влияние локальных особенностей на соседние области, в итоговую систему добавляются уравнения, связывающие значения соседних вокселей. В частности, разности между значением текущего вокселя и средним по его ближайшим соседям включаются в регуляризационный функционал (или матрицу  $\mathbf{B}$ ), минимизация которого способствует сглаживанию. Эта процедура математически записывается в виде дополнительной системы линейных уравнений (4).

Правильный выбор матрицы  $\mathbf{B}$  в (4) играет критически важную роль в реконструкции распределения электронной плотности в ионосфере. Одним из способов решения этой задачи является использование многоточечной конечно-разностной

аппроксимации оператора Лапласа второго порядка [25, 26]. Основная идея такого подхода для двумерного случая пояснена на рис. 5, а. Ячейки  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 9$ ) заштрихованы серым цветом в произвольном масштабе. Ячейка в центре ( $x_5$ ) никогда не пересекается измерительным лучом. Наложение ограничения в виде лапласиана на базовое поле позволяет вывести значение  $x_5$  из соседних ячеек.

В соответствии с основными правилами ограничения для вокселей, лежащих в центре зондируемой области, задаются с помощью девятиточечной конечно-разностной аппроксимации оператора Лапласа второго порядка, представленного на рис. 5, б (реконструируемый воксель выделен красным цветом). При расположении вокселей на границе зондируемой области оператор должен быть соответствующим образом скорректирован. Отдельно формируются правила для вокселей, расположенных на грани (рис. 5, в), ребре (рис. 5, з) и вершине (рис. 5, д). Для остальных слоев операторы задаются по предыдущим правилам. Известны и другие подходы к формированию дискретных лапласианов при реконструкции трехмерных изображений, которые позволяют в различной степени или адаптивно учитывать корреляцию значений соседних вокселей [34–36].

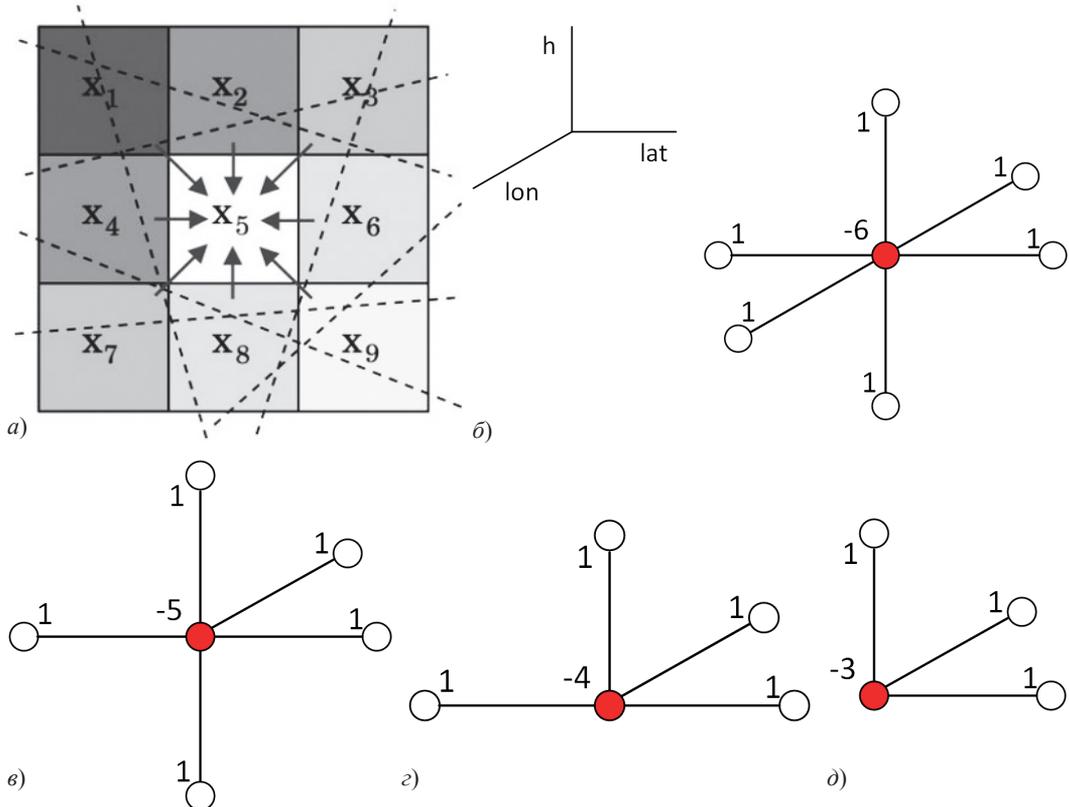


Рис. 5. Схема построения матрицы ограничений на основе оператора Лапласа второго порядка: двумерная плоскость (а); центральный элемент (б); грань (в); ребро (з); вершина (д)

Важно отметить, что матрица регуляризации  $\mathbf{B}$  вычисляется один раз до начала итерационного процесса и остается постоянной на всех шагах алгоритма. Каждый элемент матрицы  $\mathbf{B}$  представляет собой весовой коэффициент, соответствующий шаблону девятиточечного оператора Лапласа, как показано на рис. 5.

Так как матрица **A** дополняется матрицей ограничений **B** размерностью  $n \times n$ , то для соблюдения размерностей входной вектор **u** дополняется вектором нулевых значений размерностью  $n \times 1$ .

### 3. Результаты компьютерного моделирования

Для исследования алгоритма реконструкции было проведено математическое моделирование со следующими исходными данными: общее число вокселей составило 14 850 (число вокселей по широте – 18, по долготе – 33, по высоте – 25); общее количество измерений *TEC* – 564 (для 94 станций и 6 спутников на каждую станцию). Представим расположение вокселя в географической системе координат (рис. 6, *a, б*). Контролируемыми параметрами служат невязки по измерениям и изображению.

На рис. 6 приведены исходная математическая модель ионосферы и результаты ее реконструкции по зашумленным измерениям в виде распределения вертикального полного электронного содержания (*VTEC, TECU*) в различных срезах – по широте, долготе и высоте. В рамках моделирования зашумленные измерения формировались так: к вектору истинных значений *TEC* добавлялась аддитивная нормально распределенная случайная ошибка. Уровень шума соответствовал 1% от среднего значения вектора измерений. Это позволяет воспроизвести случайный шум измерений, возникающий в реальных условиях в результате неоднозначностей фазовых измерений и аппаратных погрешностей.

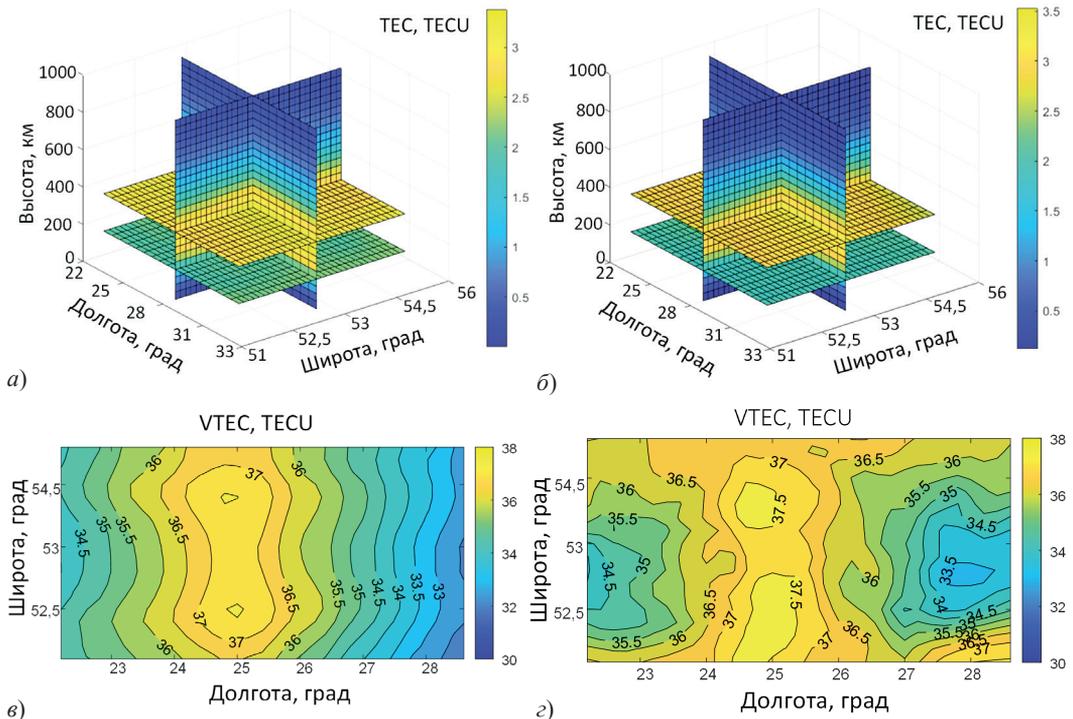


Рис. 6. Математическая модель ионосферы и результаты ее реконструкции: срезы по высоте и широте (*a*) и вертикальное полное электронное содержание (*в*); срезы по высоте и широте (*б*) и вертикальное полное электронное содержание (*г*)

При практической реализации алгоритмов реконструкции ионосферы крайне важен выбор весовых коэффициентов  $\alpha$  (учитывают ограничения на гладкость) и  $\beta$  (учитывают априорные значения), который нетривиален и требует применения методов параметрической оптимизации. В ходе анализа результатов реконструкции на модельных данных были определены оптимальные значения весовых коэффициентов:  $\alpha = 50$  для учета ограничений на гладкость и  $\beta = 0,4$  для учета априорных сведений (см. рис. 7, а).

При использовании априорных значений, заданных уравнениями (4)–(7), а также при вычислении общего вертикального электронного содержания ключевым фактором является определение высоты точки прокола ионосферы (IPP – Ionospheric Pierce Point), где наблюдается максимальная плотность концентрации электронов. Эта высота варьируется в зависимости от региона, времени суток и сезона. Например, согласно данным модели IRI-2016 с коэффициентами IGRF-13 для 2020 года, в районе Минска высота IPP изменялась в пределах от 220 до 350 км [32]. На рис. 7, б показана зависимость процентной ошибки реконструкции от отклонения в выборе высоты точки прокола ионосферы. Из графика видно, что ошибка реконструкции минимальна, если высота IPP совпадает, и линейно увеличивается при расхождении истинной высоты IPP и высоты, задействованной в алгоритме реконструкции. Погрешность в 20% при определении высоты IPP приводит к увеличению нормированной погрешности реконструкции также до 20%.

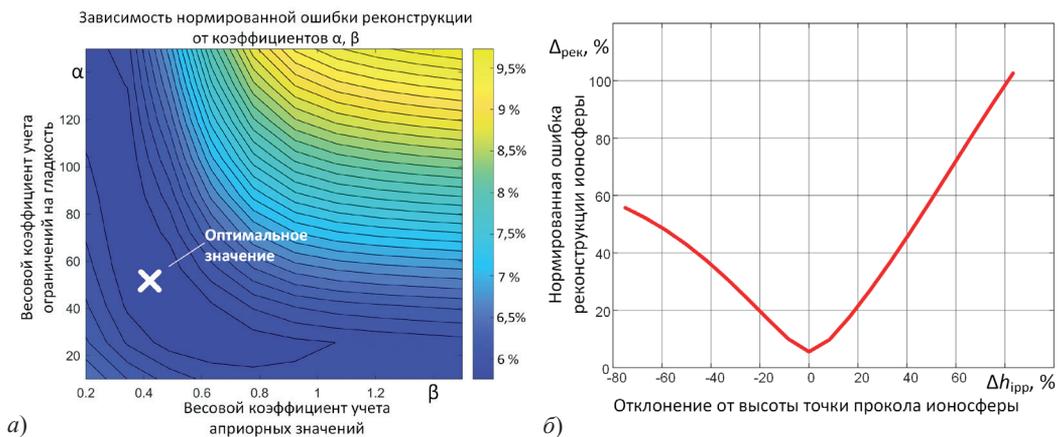


Рис. 7. Зависимость качества реконструкции от выбора весовых коэффициентов  $\alpha, \beta$  (а) и высоты точки прокола ионосферы (б)

#### 4. Результаты экспериментальных исследований

Чтобы продемонстрировать работоспособность предложенного алгоритма, были проведены экспериментальные исследования с привлечением данных за 27 февраля 2023 года – период сильной геомагнитной бури с индексом  $K_p = 7$ , когда на территории Республики Беларусь наблюдалось полярное сияние. Исходной информацией послужили RINEX-файлы (навигационные данные и данные наблюдения) спутниковой системы точного позиционирования Республики Беларусь (ССТП РБ). Трехмерная реконструкция осуществлялась по результатам измерений полного электронного

содержания ( $TEC$ ) для 94 станций ССТП РБ. Для обеспечения необходимого объема данных шаг дискретизации по времени выбирался равным 15 мин. В качестве начальных условий использовались данные модели IRI-2016.

На рис. 8 представлены  $TEC$ , вычисленные по методике, предложенной в [13]. График на рис. 8, *а* показывает вариации  $TEC$  для станции ССТП РБ Речица, различными цветами обозначены  $TEC$ , полученные для разных спутников GPS. На графике отчетливо видны характерные суточные вариации и достаточно большие флуктуации, связанные с геомагнитной бурей. График на рис. 8, *б* отображает усредненные величины  $TEC$  по всем 94 станциям наблюдения, что позволяет проследить общую динамику ионосферных возмущений над регионом 27 февраля 2023 года.

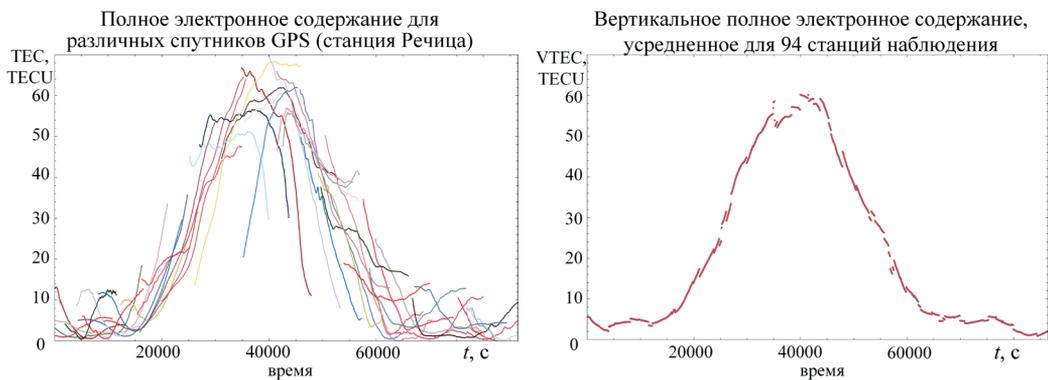


Рис. 8. Зависимость вертикального полного электронного содержания на 27 февраля 2023 г. от времени над территорией Республики Беларусь: по данным одной станции Речица (*а*) и усредненное по 94 станциям (*б*)

На рис. 9 представлены результаты расчетов пространственного распределения вертикального  $TEC$  над территорией Беларуси и сопредельных государств в различные моменты времени: 08:00 UTC – начальная фаза возмущения, 10:00 UTC – развитие ионосферной бури, 12:00 UTC – максимальная фаза возмущения, 14:00 UTC – фаза восстановления. Карты наглядно демонстрируют существенную пространственную неоднородность распределения электронов, характерную для периодов геомагнитных возмущений.

На рис. 10 представлена трехмерная реконструкция полей концентрации электронов в ионосфере, выполненная с помощью предложенного алгоритма по данным 94 наземных станций ГНСС и 6 спутников на каждую станцию во время геомагнитной бури 27 февраля 2023 года над территорией Беларуси. Общее число вокселей  $n$  равнялось 14 850 (по широте, долготе и высоте – 18, 33 и 25 соответственно). Показаны также сечения реконструируемой области в двух плоскостях (с постоянной широтой  $54^\circ$  и с постоянной долготой  $27,5^\circ$ ) и вертикальное полное электронное содержание, полученное суммированием реконструированного поля по вертикальным столбцам.

Кроме того, на рис. 10 хорошо виден характерный максимум электронной концентрации на высотах 300-400 км, что соответствует теоретическим представлениям о структуре ионосферы. Особый интерес вызывают существенные горизонтальные неоднородности в распределении вертикального полного электронного содержания,

которые типичны для периодов геомагнитных возмущений. Полученные результаты демонстрируют высокую степень согласованности реконструированной и физических моделей ионосферы и позволяют детально отслеживать динамику ионосферных возмущений во время геомагнитной бури. Экспериментальная верификация алгоритма на реальных данных подтверждает его эффективность и практическую применимость при мониторинге состояния ионосферы в условиях геомагнитных возмущений.

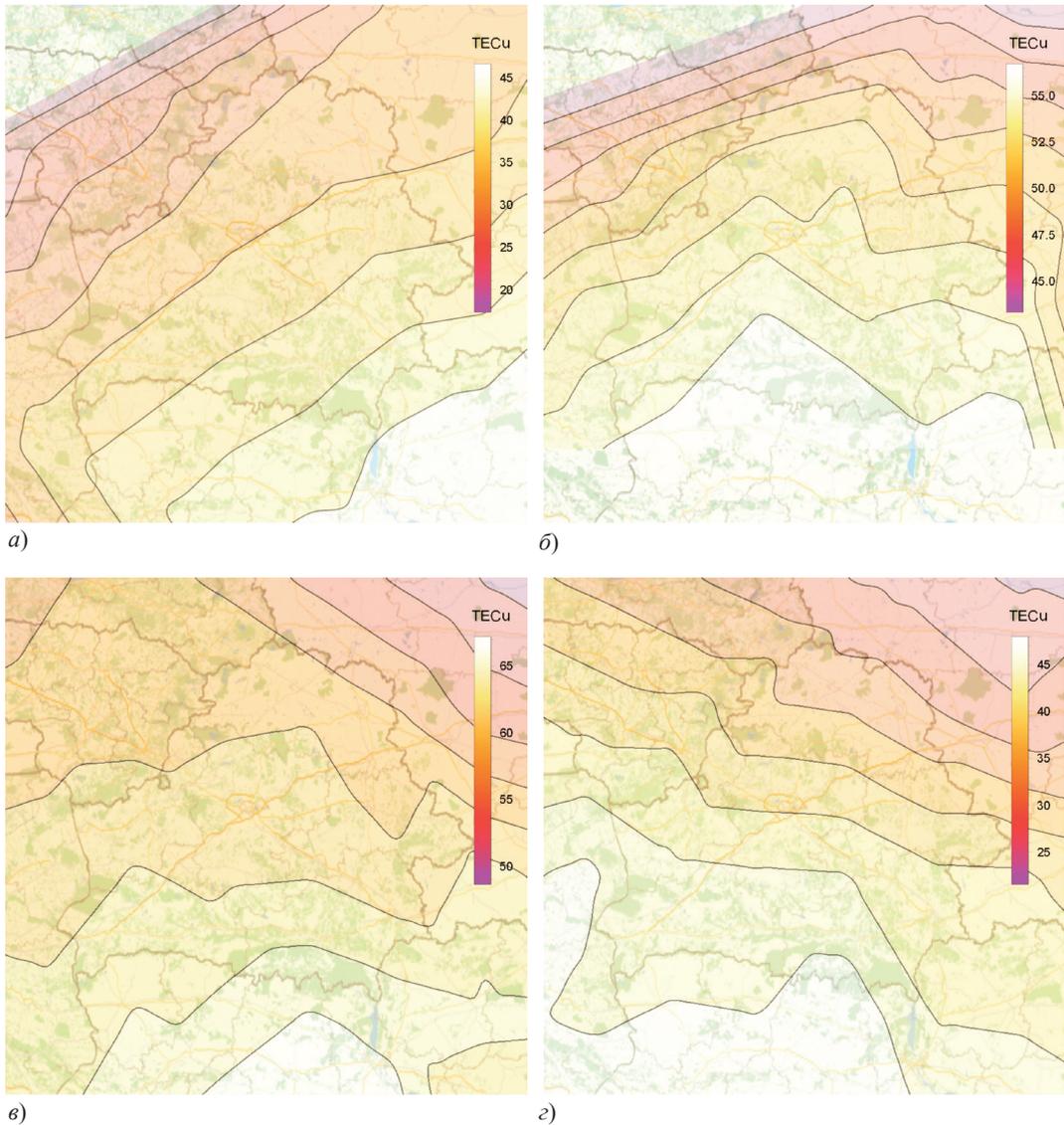


Рис. 9. Пример интерполяции вертикального полного электронного содержания в различные моменты времени 27 февраля 2023 г. по данным спутников GPS и 94 станций наблюдения над территорией Республики Беларусь и сопредельных государств: 08:00:00 (а); 10:00:00 (б); 12:00:00 (в); 14:00:00 (г)

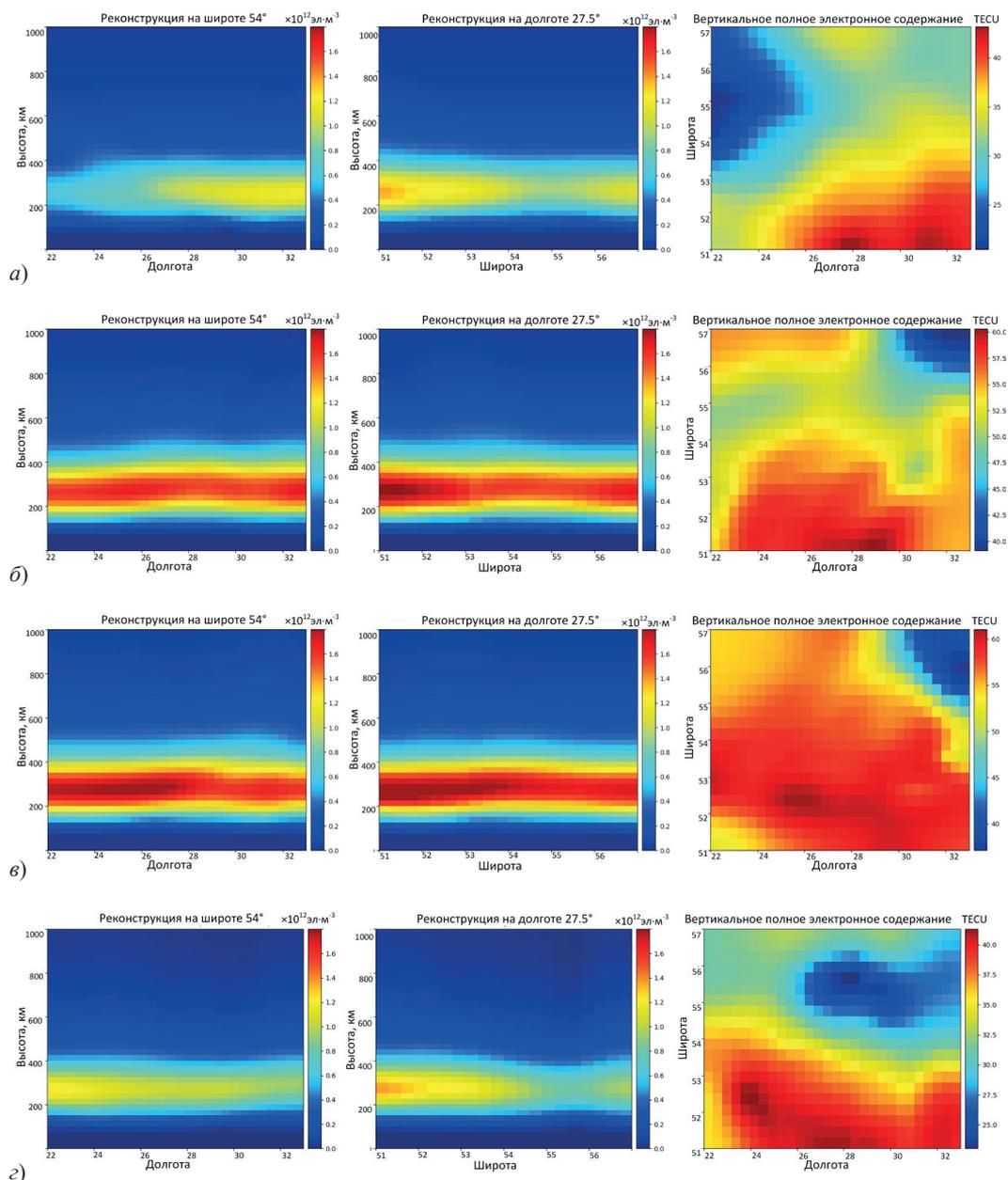


Рис. 10. Пример реконструкции распределения электронов в различные моменты времени 27 февраля 2023 г. по данным спутников GPS и 94 станций наблюдения над территорией Республики Беларусь и сопредельных государств: 08:00:00 (а); 10:00:00 (б); 12:00:00 (в); 14:00:00 (з)

## Заключение

В статье представлен комплексный подход к решению задачи трехмерной радиотомографии концентрации электронов в ионосфере по данным ГНСС. В ходе исследования получены следующие основные результаты:

- 1) разработан и реализован модифицированный алгоритм одновременной алгебраической реконструкции с вводимыми ограничениями на основе метода Ландвебера. Алгоритм характеризуется высокой скоростью сходимости и относительно низкой вычислительной сложностью, что делает его перспективным для применения в системах реального времени;
- 2) проведено математическое моделирование для оценки эффективности алгоритма при следующих параметрах: 14 850 вокселей (18 по широте, 33 по долготе, 25 по высоте) и 564 измерения  $TEC$  (для 94 станций и 6 спутников на каждую станцию). Результаты моделирования подтвердили устойчивость алгоритма к шумам измерений и способность восстанавливать пространственную структуру ионосферных неоднородностей;
- 3) определены оптимальные весовые коэффициенты алгоритма для учета априорных сведений ( $\beta = 0,4$ ) и ограничения на гладкость ( $\alpha = 50$ ), обеспечивающие устойчивую реконструкцию при шаге дискретизации 15 мин, а также баланс между ней и пространственным разрешением;
- 4) алгоритм экспериментально верифицирован на реальных данных RINEX-файлов ССП РБ за 27 февраля 2023 года при сильной геомагнитной буре ( $K_p = 7$ ).

Полученные результаты продемонстрировали способность алгоритма эффективно реконструировать трехмерную структуру ионосферы даже в условиях значительных возмущений и могут быть использованы для построения систем мониторинга состояния ионосферы в реальном времени. Предложенный алгоритм может найти применение в задачах прогнозирования космической погоды, обеспечения надежной работы систем спутниковой навигации и связи, а также в фундаментальных исследованиях ионосферных процессов.

Перспективными направлениями дальнейших научных исследований являются разработка методов интеграции данных различных источников, включая ионозонды, для повышения точности реконструкции, оптимизация параметров алгоритмов радиотомографии, учет географических и временных вариаций в распределении электронов, анализ в условиях экстремальных геомагнитных возмущений, а также построение систем мониторинга состояния ионосферы в реальном времени для прогнозирования космической погоды и обеспечения стабильности радиотехнических систем.

*Математическое моделирование для исследования алгоритма реконструкции выполнено при поддержке программы Союзного государства «Комплекс-СГ» (2023–2026 гг., мероприятие 3.3). Экспериментальные исследования по данным ССП РБ выполнены в рамках проекта подпрограммы 6 «Исследование и использование космического пространства в мирных целях» Государственной программы «Наукоемкие технологии и техника» на 2021–2025 гг.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Куницын В.Е., Терешенко Е.Д., Андреева Е.С. Радиотомография ионосферы. М.: Физматлит, 2007. 693 с.
2. Afraimovich, E.L., Astafyeva, E.I., Demyanov, V.V., Edemskiy, I.K., Gavrilyuk, N.S., Ishin, A.B., Kosogorov, E.A., Leonovich, L.A., Lesyuta, O.S., Palamartchouk, K.S., Perevalova, N.P., Polyakova, A.S., Smolkov, G.Y., Voeikov, S.V., Yasyukevich, Y.V., Zhivetiev, I.V., A review of GPS/GLONASS studies

- of the ionospheric response to natural and anthropogenic processes and phenomena, *Space Weather Space Clim.*, 2013, vol. 3, doi: 10.1051/swsc/2013049.
3. **Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Wasle, E.**, *GNSS – Global Navigation Satellite Systems. GPS, GLONASS, Galileo, and More*, Springer, 2008, 516 p.
  4. **Solonar, A.S., Khmarski, P.A., Tsuprik, S.V.**, Tracking estimator of the ground target coordinates and motion parameters using onboard optical location system data, *Gyroscopy and Navigation*, 2023, vol. 14, no. 3, pp. 244–258, doi: 10.1134/S2075108723030082.
  5. **Solonar, A.S., Khmarski, P.A., Naumov, A.O., Juraev, D.A., Muxammedov, B.M.**, The use of numerical Monte Carlo integration to verify the physical feasibility of a trajectory based on surveillance radar data, *Stochastic Modelling and Computational Sciences*, 2023, vol. 3, no. 1, pp. 59–73, doi: 10.61485/smcs.27523829/v3n1p5.
  6. **Solonar, A.S., Khmarski, P.A.**, Main problems of trajectory processing and approaches to their solution within the framework of multitarget tracking, *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, vol. 1864, doi: 10.1088/1742-6596/1864/1/012004.
  7. **Yasyukevich, Y.V., Zhang, B., Devanaboyina, V.R.**, Advances in GNSS positioning and GNSS remote sensing, *Sensors*, 2024, vol. 24, no. 4, pp. 1200, doi: 10.3390/s24041200.
  8. **Astafyeva, E., Yasyukevich, Y., Maksikov, A., Zhivetiev, I.**, Geomagnetic storms, super-storms, and their impacts on GPS-based navigation systems, *Space Weather*, 2014, vol. 12, pp. 508–525, doi: 10.1002/2014SW001072.
  9. **Yasyukevich, Yu.V., Mylnikova, A.A., Polyakova, A.S.**, Estimating the total electron content absolute value from the GPS/GLONASS data, *Results in Physics*, 2015, vol. 5, pp. 32–33, doi: 10.1016/j.rinp.2014.12.006.
  10. **Nesterov, I.A., Kunitsyn, V.E.**, GNSS radio tomography of the ionosphere: The problem with essentially incomplete data, *Advances in Space Research*, 2011, vol. 47, issue 10, pp. 1789–1803, doi: 10.1016/j.asr.2010.11.034.
  11. **Kunitsyn, V.E., Nesterov, I.A., Padokhin, A.M., et al.**, Ionospheric radio tomography based on the GPS/GLONASS navigation systems, *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2011, vol. 56, pp. 1269–1281, doi: 10.1134/S1064226911100147.
  12. **Kunitsyn, V.E., Andreeva, E., Nesterov, I.A., Padokhin, A.M.**, Ionospheric sounding and tomography by GNSS, *Geodetic Sciences – Observations, Modeling and Applications*, 2013, doi: 10.5772/54589.
  13. **Naumov, A.O., Khmarskiy, P.A., Byshnev, N.I., Piatrouski, M.A.**, Determination of total electron content in the ionosphere over the territory of the Republic of Belarus based on global navigation satellite systems data, *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2024, vol. 69, no. 1, pp. 53–64, doi: 10.29235/1561-8358-2024-69-1-53-64.
  14. **Stankov, S.M., Stegen, K., Muhtarov, P., Warnant, R.**, Local ionospheric electron density profile reconstruction in real time from simultaneous ground-based GNSS and ionosonde measurements, *Advances in Space Research*, 2011, vol. 47, issue 7, pp. 1172–1180, doi: 10.1016/j.asr.2010.11.039.
  15. **Naumov, A.O., Khmarski, P.A., Aronov, G.A., Kotov, D.S.**, Results of studies on processes occurring in the ionosphere and Earth's magnetic field over the territory of the Republic of Belarus for the year 2023, *Non-linear Phenomena in Complex Systems*, 2024, vol. 27, no. 3, pp. 225–233, doi: 10.5281/zenodo.13960570.
  16. **Chen, C., Pavlov, I., Padokhin, A., Yasyukevich, Y., Demyanov, V., Danilchuk, E., Vesnin, A.**, Galileo and BeiDou AltBOC Signals and Their Perspectives for Ionospheric TEC Studies, *Sensors*, 2024, vol. 24, no. 6472, doi: 10.3390/s24196472.
  17. **Artemiev, V.M., Naumov, A.O., Stepanov, V.L., Murashko, N.I.**, Method and results of real time modeling of ionosphere radiotomography on the basis of the Kalman filter theory, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2008, vol. 40, no. 2, pp. 52–62.
  18. **Herman, G.T.**, *Fundamentals of Computerized Tomography, Image Reconstruction from Projections*, Springer, New York, 2009, 297 p.
  19. **Zolotarev, S.A., Ahmed Talat Taufik Taruat, Bilenko, E.G.**, Taking into account a priori information in the iterative reconstruction of images of foundry products, *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2023, vol. 68, no. 3, pp. 242–251, doi: 10.29235/1561-8358-2023-68-3-242-251.
  20. **Zolotarev, S.A., Vengrinovich, V.L., Smagin, S.I.**, Iterative tomography of pipes during operation, *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk*, 2021, vol. 66, no. 4, pp. 505–512, doi: 10.29235/1561-8358-2021-66-4-505-512.

21. **Bust, G.S., Garner, T.W., Gaussiran, T.L.**, II Ionospheric Data Assimilation Three-Dimensional (IDA3D): A global, multisensor, electron density specification algorithm, *Journal of Geophysical Research*, 2004, vol. 109, A11, doi: 10.1029/2003JA010234.
22. **Bruno, J., Mitchell, C.N., Bolmgren, K.H.A., Witvliet, B.A.**, A realistic simulation framework to evaluate ionospheric tomography, *Advances in Space Research*, 2020, vol. 65, issue 3, pp. 891–901, doi: 10.1016/j.asr.2019.11.015.
23. **Bust, G.S., Mitchell, C.N.**, History, current state, and future directions of ionospheric imaging, *Reviews of Geophysics*, 2008, vol. 46, RG1003, doi: 10.1029/2006RG000212.
24. **Mitchell, C.N., Cannon, P.S.**, Multi-Instrument Data Analysis System (MIDAS) Imaging of the Ionosphere, *Advances in Space Research*, 2002, pp. 147–152.
25. **Hobiger, T., Kondo, T., Koyama, Y.**, Constrained simultaneous algebraic reconstruction technique (C-SART) – a new and simple algorithm applied to ionospheric tomography, *Earth Planet.*, 2008, vol. 60, pp. 727–735, doi: 10.1186/BF03352821.
26. **Wen, D., Liu, S., Tang, P.**, Tomographic reconstruction of ionospheric electron density based on constrained algebraic reconstruction technique, *GPS Solution*, 2010, vol. 14, pp. 375–380, doi:10.1007/s10291-010-0161-0.
27. **Khmarski, P.A., Naumov, A.O.**, Algorithms for three-dimensional reconstruction of electron concentration fields in the ionosphere using data from the global navigation satellite system, *Proceedings 31st Saint Petersburg International Conference*, Saint-Petersburg, 2024, pp. 185–188.
28. **Lu, W., Ma, G., Wan, Q.**, A review of voxel-based computerized ionospheric tomography with GNSS ground receivers, *Remote Sensing*, 2021, vol. 13, no. 3432, doi: 10.3390/rs13173432.
29. **Sutton, E., Na, H.**, Comparison of geometries for ionospheric tomography, *Radio Sci.*, 1995, vol. 30, pp. 115–125.
30. **Semeter, J., Kamalabadi, F.**, A natural pixel decomposition for tomographic imaging of the ionosphere, *In Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Seattle, 1998, vol. 5, pp. 2913–2916.
31. **Yasyukevich, Y.V., Zatulokin, D., Padokhin, A., Wang, N., Nava, B., Li, Z., Yuan, Y., Yasyukevich, A., Chen, C., Vesnin, A., Klobuchar, NeQuickG, BDGIM, GLONASS, IRI-2016, IRI-2012, IRI-Plas, NeQuick2, and GEMTEC ionospheric models: A comparison in total electron content and positioning domains**, *Sensors*, 2023, vol. 23, no. 10, p. 4773, doi: 10.3390/s23104773
32. **International Reference Ionosphere**. URL: [https://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri2016\\_vitmo.php](https://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri2016_vitmo.php) (дата обращения: 07.06.2023).
33. **Иванов В.Б., Затолокин Д.А., Горбачёв О.А.** Сравнение моделей полного электронного содержания ионосферы для системы ГЛОНАСС // *Гироскопия и навигация*. 2017. No. 2 (97). С. 89–96.
34. **Dehghan, M., Mohebbi, A.**, High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection-diffusion problems, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 79, pp. 683–699.
35. **Spotz, W.F.**, *High-order compact finite difference schemes for computational mechanics*, Ph. D. Thesis, University of Texas at Austin, 1995, 324 p.
36. **Jia R., Yu X., Xing J., Ning Y., Sun H.**, An improved method using adaptive smoothing for GNSS tomographic imaging of ionosphere, *PLoS ONE*, 2021, vol. 16, no. 5, e0250613, doi: 10.1371/journal.pone.0250613.

---

**Artemiev, V.M., Naumov, A.O., Khmarski, P.A.** (Institute of Applied Physics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk)

Algorithm for Three-Dimensional Ionospheric Radio Tomography Based on GNSS Data, *Гироскопия и Навигация*, 2025, vol. 33, no. 2 (129), pp. 103–121.

**Abstract.** The paper describes the design of an algorithm for three-dimensional radio tomography of electron concentration in the ionosphere based on the GNSS data. Simulation data are

used to describe the algebraic reconstruction techniques underlying the algorithm design; also considered are the methods taking into account a priori information as well as the approaches to optimization of parameters of these algebraic methods. The results of the experimental ionospheric reconstruction obtained with the use of the data obtained from the satellite system of precise positioning of the Republic of Belarus are presented.

**Key words:** ionosphere, global navigation satellite systems, radio tomography, algebraic reconstruction, total electron content, three-dimensional reconstruction, SART algorithm.

Материал поступил 24.01.2025