

А. А. ГОЛОВАН, К. А. КУЗНЕЦОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИЕМНИКА СИГНАЛОВ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ В АВТОНОМНОМ РЕЖИМЕ

Рассматривается задача определения скорости объекта при помощи первичных фазовых измерений приемника сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) в автономном режиме. Она актуальна для аэрогравиметрии [1], где спутниковые навигационные измерения играют важную роль. Идея решения основана на дифференцировании первых разностей фазовых измерений. Описана двухэтапная реализация метода наименьших квадратов. Приводится анализ результатов обработки экспериментальных данных.

Статья написана в развитие и дополнение публикаций [2, 3].

Ключевые слова: аэрогравиметрия, ГНСС, доплеровские измерения, фазовые измерения, первые разности.

Введение

Основная задача обработки первичных измерений ГНСС – определение местоположения объекта. Для ее решения используются так называемые кодовые и/или фазовые спутниковые измерения, полученные в стандартном или дифференциальном режиме функционирования ГНСС. Описанию этой задачи, математических моделей и алгоритмов ее решения посвящено множество статей, материалов конференций, фундаментальных монографий [4, 5] и др. Среди последних выделим [4], где представлено исчерпывающее описание значимых для спутниковой навигации моделей, задач и алгоритмов.

Тем не менее задаче определения скорости объекта уделяется мало внимания. Свидетельством служит и тот факт, что лишь в интерфейсном контрольном доку-

Голован Андрей Андреевич. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией управления и навигации, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва). Действительный член общественного объединения «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0001-5628-248X.

Кузнецова Ксения Алексеевна. Студент, МГУ имени М.В. Ломоносова.

менте по системе GPS от 2022 г. [6] появилась модель [7] расчета по эфемеридным данным вектора скорости движения навигационного спутника. Только недавно вышедшие монографии по тематике GPS включают такой раздел. Среди последних публикаций о расчете скорости можно выделить [8, 9].

Параметрами для вычисления скорости объекта – фазового центра антенны приемника ГНСС – служат эфемеридные данные о векторе скорости от навигационных спутников. Ранее такая модель была описана в [2] и использована авторами при разработке программного обеспечения для скоростных решений GPS, которое давно и с успехом применяется в задачах постобработки данных аэрогравиметров серии GT-2A [1].

Отметим, что представленные в [6] официальные модели скоростных решений с использованием эфемеридных данных совпали с моделью, рассмотренной в [2].

Для пояснения важности определения скорости и ускорения по данным ГНСС [3] в аэрогравиметрии рассмотрим опорное уравнение скалярной аэрогравиметрии [10] – уравнение движения чувствительной массы гравиметра в проекции на географическую вертикаль:

$$\ddot{h} = \dot{V}_{UP} = 2uV_E \cos B + \underbrace{\frac{V_E^2}{R_E + h}}_{\text{поправка}} + \underbrace{\frac{V_N^2}{R_N + h}}_{\text{Этвеша}} + f_{UP} - g^{(n)} + \delta g, \quad (1)$$

где B, h – географические широта и высота; u – угловая скорость вращения Земли; R_E, R_N – радиусы кривизны навигационного эллипсоида Земли по долготе и широте; V_E, V_N, V_{UP} – восточная, северная, вертикальная составляющие вектора скорости; f_{UP} – вертикальная компонента внешней удельной силы, действующей на чувствительную массу гравиметра; $g^{(n)}$ – абсолютное значение нормальной составляющей удельной силы тяжести в проекции на географическую вертикаль, вычисляемое по известным моделям [1]; $\delta g = \delta g(L, B, h)$ – искомая аномалия силы тяжести, вертикальная компонента вектора возмущения силы тяжести [1], L – долгота места.

Основными данными для оценивания аномалии δg в (1) служат показания гравиметра, измеряющего величину f_{UP} , и спутниковая информация о высоте полета h и вертикальной скорости V_{UP} .

Возможные подходы к применению модели (1) при оценивании величины δg очень условно можно представить как опирающиеся на сравнение [1, 3]:

- 1) позиционного решения ГНСС $h^{GNSS}(t)$ с результатом $h^{INS}(t)$ двойного интегрирования правой части уравнения (1) –

$$h^{GNSS}(t) \Leftrightarrow h^{INS}(t);$$

- 2) скоростного решения ГНСС $V_{UP}^{GNSS}(t)$ с результатом $V_{UP}^{INS}(t)$ однократного интегрирования правой части уравнения (1) –

$$V_{UP}^{GNSS}(t) \Leftrightarrow V_{UP}^{INS}(t);$$

- 3) решения задачи расчета ускорения по данным ГНСС $f_{UP}^{GNSS}(t) = \ddot{h}$ с правой частью $f_{UP}^{INS}(t)$ уравнения (1) –

$$f_{UP}^{GNSS}(t) \Leftrightarrow f_{UP}^{INS}(t).$$

Результатом сравнения является оценка аномалии силы тяжести δg .

Второй и третий подходы требуют вычисления скоростей и ускорения по данным ГНСС именно на основе обработки первичных спутниковых измерений, прежде всего фазовых, как наиболее инструментально точных.

Далее, используя второй подход, мы опишем математические модели и алгоритмы определения скорости объекта при помощи первичных фазовых измерений ГНСС.

Основная научная новизна предлагаемого подхода к решению задачи и его отличия от выработанного состоят в применении [8, 9]:

- 1) моделей небесной механики для определения векторов скорости движения навигационных спутников;
- 2) первых разностей фазовых измерений для устранения в них общей ошибки часов приемника;
- 3) двухэтапной процедуры решения, при которой на первом этапе задействуются приемы оконного дифференцирования первых разностей фазовых измерений, а на втором определяется скорость объекта на основе полученных оценок радиальных скоростей.

Статья структурирована следующим образом. Сначала представлены известные модели [2, 3] решения задачи определения скорости объекта при помощи доплеровских псевдоскоростей. Затем описаны модели, где использованы фазовые измерения. Далее представлены некоторые результаты обработки экспериментальных данных с кратким анализом и в заключении подведены итоги изложенного.

Хотя все построения приводятся для одной ГНСС, например GPS, они без существенных модификаций применимы и для многосистемных измерений.

Модели определения скорости при помощи доплеровских измерений

Модель доплеровских измерений

Будем полагать, что осуществлены нужные преобразования первичных доплеровских измерений – смена знака, умножение на длину волны λ радиосигнала и др. Считаем, что в результате полученное доплеровское измерение $Z_V^{(i)}$ от навигационного спутника с условным номером i имеет размерность м/с.

Обобщенная модель первичных доплеровских измерений $Z_V^{(i)}$ имеет вид [4, 2]

$$Z_V^{(i)} = V_\rho^{(i)} - \Delta V_\rho + \Delta V^{(i)s}, \quad (2)$$

где $V_\rho^{(i)}$ – радиальная скорость по линии «объект – спутник», полезный сигнал измерения; ΔV_ρ – неизвестная скорость ухода часов приемника, общая для всех измерений в эпохе (эпоха – момент снятия показаний приемником ГНСС); $\Delta V^{(i)s}$ – остаточный шум измерения.

Модель (2) не учитывает пренебрежимо малые методические погрешности, вызванные, например, скоростью ухода часов спутника, многолучевостью и др. [4].

Величина $V_\rho^{(i)}$ определяется выражением

$$V_\rho^{(i)} = \frac{(\eta^{sat_i} - \eta)^T (V_\eta^{sat_i} - V_\eta)}{\rho^{(i)}}, \quad \rho^{(i)} = \sqrt{(\eta^{sat_i} - \eta)^T (\eta^{sat_i} - \eta)}, \quad (3)$$

где $\eta^{sat_i} = (\eta_1^{sat_i}, \eta_2^{sat_i}, \eta_3^{sat_i})^T$ – координаты i -го спутника в осях гринвичской системы [4, 11, 12];

$V_{\eta}^{sat_i} = (V_{\eta_1}^{sat_i}, V_{\eta_2}^{sat_i}, V_{\eta_3}^{sat_i})^T$ – вектор скорости спутника относительно вращающейся Земли;

$V_{\eta} = (V_{\eta_1}, V_{\eta_2}, V_{\eta_3})^T$ – вектор относительной скорости приемника, который необходимо определить.

Примечание. Расчет координат и вектора скорости спутника осуществляется на оцениваемый момент излучения им радиосигнала с учетом поправок к этим параметрам, обусловленных поворотом Земли за время распространения сигнала.

Определение скорости объекта при помощи доплеровских измерений

Соотношение (3) представим в виде суммы двух составляющих:

$$\begin{aligned} V_{\rho}^{(i)} &= V_{\rho}^{sat_i} + V_{\rho}^{rcv_i}, \\ V_{\rho}^{sat_i} &= \frac{(\eta^{sat_i} - \eta)^T}{\rho^{(i)}} V_{\eta}^{sat_i}, \quad V_{\rho}^{rcv_i} = -\frac{(\eta^{sat_i} - \eta)^T}{\rho^{(i)}} V_{\eta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Первая из них – $V_{\rho}^{sat_i}$ вычисляется в явном виде по известной (после решения эфемеридной и кодовой задач) информации о параметрах движения навигационного спутника и координатах приемника. Собственно, здесь и возникает необходимость определения вектора скорости движения навигационного спутника.

Вторая составляющая $V_{\rho}^{rcv_i}$ представляет собой вклад скорости V_{η} движения приемника ($rcv \rightarrow receiver$) в радиальную скорость $V_{\rho}^{(i)}$ по линии «объект – i -й спутник». Отметим, что величина $V_{\rho}^{rcv_i}$ линейно зависит от искомой скорости V_{η} .

Введем новый набор $\{z_{V_{\rho}}^{(i)}\}$ измерений, в котором скомпенсируем известные составляющие $V_{\rho}^{sat_i}$:

$$z_{V_{\rho}}^{(i)} = Z_{V_{\rho}}^{(i)} - V_{\rho}^{sat_i}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (5)$$

где M – число видимых спутников в эпохе, которое должно быть не меньше 4 при использовании односистемного приемника.

Введем 4-мерный вектор состояния $x = (V_{\eta_1}, V_{\eta_2}, V_{\eta_3}, \Delta V_{\rho})^T$. Тогда

$$z_{V_{\rho}} = \begin{pmatrix} z_{V_{\rho}}^{(1)} \\ z_{V_{\rho}}^{(2)} \\ \dots \\ z_{V_{\rho}}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{(1)}^T \\ h_{(2)}^T \\ \dots \\ h_{(M)}^T \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \Delta V^{(1)s} \\ \Delta V^{(2)s} \\ \dots \\ \Delta V^{(M)s} \end{pmatrix} = Hx + r_{V_{\rho}}, \quad (6)$$

$$h_{(i)}^T = \left(\frac{\eta_1 - \eta_1^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \frac{\eta_2 - \eta_2^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \frac{\eta_3 - \eta_3^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, -1 \right), \quad i = \overline{1, M}.$$

Таким образом, задача определения скорости V_{η} при помощи доплеровских измерений $\{z_{V_{\rho}}^{(i)}\}$ свелась (без линеаризации) к стандартной задаче оценивания (6). Ее реализация по методу наименьших квадратов (МНК) при постулировании соответствующих гипотез о шумах измерений $r_{V_{\rho}}$ приводит к соотношению

$$\tilde{x} = (H^T W^{-1} H)^{-1} H^T W^{-1} z_{V_{\rho}}, \quad (7)$$

где W – корреляционная матрица шумов доплеровских измерений $\{\Delta V^{(i)s}\}$.

В качестве априорной модели ковариационной матрицы W часто используется следующая [2]:

$$W = \text{diag}(\sigma^2(El_1), \sigma^2(El_2), \dots, \sigma^2(El_M)), \quad \sigma^2(El_i) = \sigma_a^2 \frac{\pi/2}{El_i}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (8)$$

где σ_a^2 – априорное значение дисперсии шума измерения для спутника с углом возвышения $\frac{\pi}{2}$ (90°); El_i – угол возвышения i -го спутника.

Первые разности доплеровских измерений и способ определения скорости объекта

Рассмотрим разностно-радиально-скоростной метод определения скорости объекта (см., например, [13]). Будем считать, что $1, 2, \dots, M$ – порядковые номера спутников в рабочем созвездии, соответственно, M – общее число видимых спутников в созвездии.

Далее в формулах будем применять эти порядковые номера, а для выделения последнего спутника с порядковым номером M , который полагается спутником с наибольшим углом возвышения (зенитным спутником), будем дополнительно использовать обозначение M_z .

Введем первые разности $\{\nabla z_{V_p}^{(i)}\}$ доплеровских измерений (5):

$$\nabla z_{V_p}^{(i)} = z_{V_p}^{(i)} - z_{V_p}^{(M_z)}, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (9)$$

В первых разностях исчезнет общая погрешность ΔV_p часов приемника. Тогда

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \nabla z_{V_p}^{(1)} \\ \nabla z_{V_p}^{(2)} \\ \dots \\ \nabla z_{V_p}^{(M-1)} \end{pmatrix}}_{\nabla z_{V_p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_{(1)}^{*T} \\ h_{(2)}^{*T} \\ \dots \\ h_{(M-1)}^{*T} \end{pmatrix}}_{H_\nabla} V_\eta + \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla \Delta V^{(1)s} \\ \nabla \Delta V^{(2)s} \\ \dots \\ \nabla \Delta V^{(M-1)s} \end{pmatrix}}_{\nabla \dot{r}_{V_p}} = H_\nabla V_\eta + \nabla \dot{r}_{V_p}, \quad (10)$$

$$h_{(i)}^{*T} = h_{(i)}^{*T} - h_{(M_z)}^{*T}, \quad \nabla \Delta V^{(i)s} = \Delta V^{(i)s} - \Delta V^{(M_z)s}, \quad i = \overline{1, M-1},$$

и
$$\nabla V_p^{rcv_i} = V_p^{rcv_i} - V_p^{rcv_{M_z}} = h_{(i)}^{*T} V_\eta, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (11)$$

где $\nabla V_p^{rcv_i}$ – полезный сигнал в первых разностях доплеровских измерений, содержащий информацию об искомой скорости V_η приемника.

Реализация задачи по МНК:

$$\widetilde{V}_\eta = (H_\nabla^T W^{*-1} H_\nabla)^{-1} H_\nabla^T W^{*-1} \nabla z_{V_p}. \quad (12)$$

Отметим, что решения для $\widetilde{V}_\eta$ по (7), (12) обязаны совпадать, если правильно согласованы априорные модели матриц ковариации W , W^* , а именно:

$$\nabla r_{V_p} = Q r_{V_p}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots -1 \\ 0 & 1 & 0 \dots -1 \\ \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots -1 \end{pmatrix}, \quad W^* = Q W Q^T. \quad (13)$$

Далее приведенные модели вычисления скорости объекта с применением первых разностей доплеровских измерений будут использованы в алгоритмах обработки фазовых измерений.

Определение скорости объекта при помощи фазовых измерений

Основная идея использования фазовых измерений при расчете скорости объекта состоит в их последовательной двухэтапной обработке. На первом этапе с помощью фазовых измерений строится оценка первых разностей $\nabla V_{\rho}^{(i)} = V_{\rho}^{(i)} - V_{\rho}^{(M_z)}$, $i = 1, M-1$, радиальных скоростей по линиям «объект – спутники». Это позволит на втором этапе применять доплеровские модели (9)–(13) для вычисления скорости объекта.

Модель фазовых измерений

Фазовые измерения Z_{ϕ} представляют собой разность фаз ϕ между принимаемым спутниковым радиосигналом и генерируемым в приемнике аналогичным опорным сигналом [4, 5]. Они интерпретируются как мера расстояния «объект – спутник», поскольку их приращение для двух соседних отсчетов (при отсутствии сбоя, с точностью до величин вариаций атмосферных задержек, с учетом отличия моментов излучения и детектирования радиосигнала) пропорционально изменению расстояния от объекта до спутника на этом временном интервале.

Приведем модель фазового измерения [4] (размерность – метры):

$$Z_{\phi}^{(i)} = \rho^{(i)} - c(\Delta\tau - \Delta T^{(i)}) + \lambda N^{(i)} + \Delta\phi_{atm}^{(i)} + \Delta\phi^{(i)s}, \quad (14)$$

где λ – длина волны радиосигнала на частоте L_1 или L_2 ; c – скорость света; $\Delta T^{(i)}$ – погрешность часов i -го спутника; $\Delta\tau$ – неизвестная общая погрешность часов приемника; $N^{(i)}$ – целочисленная неопределенность фазового измерения; $\Delta\phi_{atm}^{(i)}$ – погрешность, вызванная прохождением радиосигнала через слои ионосферы и тропосферы; $\Delta\phi^{(i)s}$ – случайная погрешность измерения.

Примечание. Если приемник двухчастотный, то на основе измерений на частотах L_1 и L_2 можно сформировать так называемую ионосферно-свободную комбинацию $Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)}$ фазовых измерений [4, 2]:

$$Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)} = \lambda_1 \left(\frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{Z_{\phi}^{(i)}(L_1)}{\lambda_1} - \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{Z_{\phi}^{(i)}(L_2)}{\lambda_2} \right), \quad (15)$$

где f_1, f_2 – значения частот радиосигналов L_1, L_2 ; λ_1, λ_2 – соответствующие длины волн.

Комбинацию $Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)}$ рекомендуется применять в задаче определения скорости объекта при возмущении ионосферы. Хотя ниже приводятся соотношения для обработки фазовых измерений на частоте L_1 , они без труда переносятся на случай использования $Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)}$.

Далее полагаем, что на этапе решения эфемеридной задачи и обработки кодовых псевдодальностей осуществлено моделирование погрешностей $\Delta T^{(i)}$ часов спутников и возможных атмосферных задержек и они должным образом скомпенсированы в фазовых измерениях.

По аналогии с (9) введем первые разности фазовых измерений:

$$\nabla Z_{\phi}^{(i)} = Z_{\phi}^{(i)} - Z_{\phi}^{(M_z)}, \quad i = 1, M-1. \quad (16)$$

В соответствии с (14) теперь полезным сигналом является первая разность расстояний от объекта до спутника $\nabla \rho^{(i)} = \rho^{(i)} - \rho^{(M_z)}$. Основное свойство первой разности $\nabla Z_\phi^{(i)}$ (16) – отсутствие погрешности Δt часов приемника.

Этап I. Оценивание производных первых разностей фазовых измерений

Рассмотрим скользящий интервал (окно) времени $t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}, \dots, t_{j+N}$, $k = \overline{1, N}$, где t_{j+k} – время эпохи. Далее положим, что N – нечетное число, это важно для избежания фазовых сдвигов результата при дифференцировании.

Время центральной точки t_c интервала:

$$t_c = t_{j + \frac{N-1}{2}}. \quad (17)$$

Используя (16), вычислим для каждого момента времени t_{j+k} первые разности $\nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+k})$.

Примечание. Если спутниковый приемник многосистемный, т.е. регистрирует измерения от систем GPS, Galileo, BeiDou, ГЛОНАСС, то первые разности рассчитываются в рамках измерений каждой системы.

Полагаем, что на интервале $[t_{j+1}, t_{j+N}]$:

- не меняется состав спутникового созвездия и номера зенитных спутников;
- нет сбоев фазы в фазовых измерениях $Z_\phi^{(i)}(t_{j+k})$, $k = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, M}$.

Отметим, что первое условие соблюдается благодаря логике обработки измерительной информации.

Ставится задача на основе набора первых разностей измерений

$$\nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+1}), \nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+2}), \dots, \nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+N}), \quad i = \overline{1, M-1}$$

в моменты времени t_{j+k} , $k = \overline{1, N}$, оценить значение производной $\nabla \dot{Z}_\phi^{(i)}$ в центральной точке t_c интервала дифференцирования.

Для этого будем аппроксимировать набор $\{\nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+k})\}$ первых разностей линейной функцией времени и ее наклон полагать искомой производной. Параметры линейной функции вычислим с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Таким образом, на этом первом этапе обработки фазовых измерений имеем $(M-1)$ однотипных задач оценивания по числу первых разностей измерений. Каждая задача решается на основе МНК.

Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+k}) &= A^{(i)} t_{j+k} + B^{(i)} + \nabla r_\phi^{(i)}(t_{j+k}), \\ \nabla r_\phi^{(i)}(t_{j+k}) &= \Delta \phi^{(i)s}(t_{j+k}) - \Delta \phi^{(M_z)s}(t_{j+k}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+1}) \\ \nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+2}) \\ \dots \\ \nabla Z_\phi^{(i)}(t_{j+N}) \end{pmatrix}}_{\nabla Z_\phi^{(i)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_{j+1}, 1 \\ t_{j+2}, 1 \\ \dots \\ t_{j+N}, 1 \end{pmatrix}}_{H_{\nabla Z_\phi}} \underbrace{\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \end{pmatrix}}_{x^{(i)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla r_\phi^{(i)}(t_{j+1}) \\ \nabla r_\phi^{(i)}(t_{j+2}) \\ \dots \\ \nabla r_\phi^{(i)}(t_{j+N}) \end{pmatrix}}_{\nabla r_\phi^{(i)}},$$

$$\text{или} \quad \nabla Z_\phi^{(i)} = H_{\nabla Z_\phi} x^{(i)} + \nabla r_\phi^{(i)}, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (19)$$

Предположим, что шумы фазовых измерений независимы в каждый момент времени t_{j+k} , $k = \overline{1, N}$, и у разных спутников (i -го и зенитного M_z), а остаточные атмосферные погрешности после вычисления первых разностей малы.

В этом случае для матрицы ковариаций $W_\phi^{(i)} = M[\nabla r_\phi^{(i)} \nabla r_\phi^{(i)^T}]$ вполне реалистичной будет модель

$$W_\phi^{(i)} = \sigma_{\nabla\phi}^{(i)^2} \cdot I, \quad \sigma_{\nabla\phi}^{(i)^2} = \sigma_\phi^{(i)^2} + \sigma_\phi^{(M_z)^2}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (20)$$

где I – единичная матрица размерности $N \times N$; $\sigma_\phi^{(i)^2}$ – дисперсия шума фазового измерения i -го спутника.

Модель (20) обосновывается следующим рассуждением. Поскольку дисперсия $\sigma_\phi^{(i)^2}$ шума измерений зависит от угла возвышения El_i спутника (см. (8)), то на ограниченном интервале времени $[t_{j+1}, t_{j+N}]$ (в аэрогравиметрии в пределах не более 1 с) углы возвышения значимо не меняются. Следовательно, существенно не меняются и значения $\sigma_{\nabla\phi}^{(i)^2} = \sigma_\phi^{(i)^2} + \sigma_\phi^{(M_z)^2}$, что приводит к модели (20) равноточных измерений в задаче МНК (19).

Реализация задачи (18) при помощи МНК приводит к соотношению

$$\tilde{x}^{(i)} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(i)} \\ \tilde{B}^{(i)} \end{pmatrix} = (H_{\nabla\phi}^T H_{\nabla\phi})^{-1} H_{\nabla\phi}^T \nabla Z_\phi^{(i)} = H_\phi^\oplus \nabla Z_\phi^{(i)}, \quad (21)$$

где $H_\phi^\oplus$ – псевдообратная матрица, не зависящая от i .

Оценку $\tilde{A}^{(i)}$ будем считать оценкой $\nabla V_\rho^{(i)} = V_\rho^{(i)} - V_\rho^{(M_z)}$ первой разности ($V_\rho^{(i)} - V_\rho^{(M_z)}$) радиальных скоростей «объект – спутники», отнесенной к центральной точке t_c интервала дифференцирования $[t_{j+1}, t_{j+N}]$:

$$\nabla \tilde{V}_\rho^{(i)}(t_c) = \tilde{A}^{(i)}. \quad (22)$$

Для погрешности оценки $\Delta x^{(i)} = x^{(i)} - \tilde{x}^{(i)}$ имеем:

$$\Delta x^{(i)} = -H_\phi^\oplus \nabla r_\phi^{(i)}, \quad M[\Delta x^{(i)} \Delta x^{(i)^T}] = H_\phi^\oplus W_\phi^{(i)} H_\phi^{\oplus T} = \sigma_{\nabla\phi}^{(i)^2} H_\phi^\oplus H_\phi^{\oplus T}. \quad (23)$$

Представим псевдообратную матрицу в виде двух строк размерности $1 \times N$:

$$H_\phi^\oplus = \begin{pmatrix} h_I^T \\ h_{II}^T \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тогда для погрешности оценки $\Delta A^{(i)} = A^{(i)} - \tilde{A}^{(i)}$ величины $\nabla V_\rho^{(i)}$ с учетом (20) будет справедливо

$$\Delta A^{(i)} = -h_I^T \nabla r_\phi^{(i)}, \quad M[\Delta A^{(i)^2}] = \sigma_{\nabla\phi}^{(i)^2} \|h_I\|^2. \quad (25)$$

Здесь же отметим, что погрешности оценки $\Delta A^{(l)}$, $\Delta A^{(k)}$, ($l \neq k$) оказываются коррелированными, поскольку в соответствующих измерениях присутствуют данные от одного и того же зенитного спутника. Далее это свойство будет учитываться при построении алгоритмов 2-го этапа. В случае независимости погрешностей фазовых измерений от каждого спутника имеем:

$$M[\Delta A^{(l)} \Delta A^{(k)}] = \sigma_\phi^{(M_z)^2} \|h_I\|^2, \quad (26)$$

$$M[\Delta A \Delta A^T] = W_{\nabla \varphi} = \begin{pmatrix} \sigma_{\nabla \varphi}^{(1)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \\ \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\nabla \varphi}^{(2)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \\ & & \dots & & \\ \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\nabla \varphi}^{(M-2)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \\ \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\nabla \varphi}^{(M-1)^2} \end{pmatrix} \|h_l\|^2. \quad (27)$$

Формулы псевдообращения

Рассмотрим два случая.

1. Равномерная сетка времени, когда $t_{k+1} - t_k = \Delta t = \text{const}$. Здесь достаточно рассмотреть следующую модель псевдообращения (сдвигая отсчеты времени на величину t_{j+l}):

$$H_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta t & 1 \\ \dots & \dots \\ k\Delta t & 1 \\ \dots & \dots \\ (N-1)\Delta t & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{\varphi}^{\oplus} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0k} & \dots & h_{0N-1} \\ h_{10} & h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1N-1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

и

$$h_{0k} = \frac{6}{\Delta t N(N+1)} \left(\frac{2k}{N-1} - 1 \right), \quad (29)$$

$$h_{1k} = \frac{2}{N(N+1)} (2N-1-3k), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Тогда для оценок $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ имеем:

$$\tilde{A}^{(i)} = \sum_{k=0}^{N-1} h_{0k} \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+k+1}), \quad (30)$$

$$\tilde{B}^{(i)*} = \sum_{k=0}^{N-1} h_{1k} \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+k+1}), \quad \tilde{B}^{(i)} = \tilde{B}^{(i)*} - \tilde{A}^{(i)} t_{j+1}.$$

Примечание. Оценка $\tilde{B}$ не используется в рассматриваемой задаче, но задействуется при анализе невязок решения (21) МНК.

При $N = 3$ получаем известное выражение для центральной первой разности:

$$\nabla \tilde{V}_{\rho}^{(i)}(t_{j+2}) = \tilde{A}^{(i)} = \frac{\nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+3}) - \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+1})}{2\Delta t}. \quad (31)$$

При $N = 5$ имеем:

$$\tilde{A}^{(i)} = \frac{\nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+5}) + 0.5 \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+4}) - 0.5 \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+2}) - \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+1})}{5\Delta t}, \quad (32)$$

$$\nabla \tilde{V}_{\rho}^{(i)}(t_{j+3}) = \tilde{A}^{(i)}.$$

2. Неравномерная сетка времени, когда $t_{k+1} - t_k = \Delta t \neq \text{const}$. В этом случае можно показать, что

$$(H_{\nabla\varphi}^T H_{\nabla\varphi})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} N & -\sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1} \\ -\sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1} & \sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1}^2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \left(N \sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1}^2 - \left(\sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1} \right)^2 \right) \quad (33)$$

и

$$\tilde{A}^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \left(N \sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1} \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+k+1}) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} t_{j+k+1} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{N-1} \nabla Z_{\varphi}^{(i)}(t_{j+k+1}) \right) \right). \quad (34)$$

Примечание. При реализации соотношений (27), (28) рекомендуется сделать замену времени $t_{j+k+1} \rightarrow t_{j+k+1} - t_{j+1}$, $k = \overline{1, N-1}$, чтобы избежать переполнения соответствующих счетчиков в (34).

Отметим, что именно случаи $N = 3$, $N = 5$ используются в задаче постобработки первичных данных ГНСС в аэрогравиметрии [1–3].

Рассмотрение двух случаев – равномерной и неравномерной сетки времени – связано с особенностями функционирования спутникового приемника. У него есть две шкалы времени: внутренняя $\{t_j\}$, соответствующая частоте регистрации первичных измерений (например, 10 Гц, когда приращение времени равно 0,1 с), и истинная шкала $\{t_{r,j}\}$ –

$$t_{r,j} = t_j - \Delta\tau(t_j), \quad (35)$$

где $\Delta\tau(t_j)$ – погрешность часов приемника в момент времени t_j .

Примечание. В приемниках старого поколения величина $\Delta\tau(t_j)$ аппаратно поддерживается в диапазоне $[-0,0005, 0,0005]$ с (реже $[-0,001, 0,001]$ с) и изменяется во времени пилообразно. В новых приемниках величина $\Delta\tau(t_j)$, оцениваемая алгоритмом обработки кодовых псевдодалностей, списывается путем введения обратной связи в шкалу времени приемника и ее величина мала, порядка ± 10 нс. В этом случае вполне допустимо использовать формулы для равномерной сетки времени. Пример учета значимой погрешности часов приемника в задаче определения скорости будет представлен ниже.

Этап II. Определение скорости при помощи оценок производных первых разностей фазовых измерений

В качестве примера (без нарушения общности последующих построений) рассмотрим случай $N = 3$, когда в оконном дифференцировании первых разностей фазовых измерений используются три последовательных отсчета: $\nabla Z_{\varphi}(t_{j-1}), \nabla Z_{\varphi}(t_j), \nabla Z_{\varphi}(t_{j+1})$.

С их помощью на неравномерной сетке вычисляются оценки $\nabla \tilde{V}_{\rho}^{(i)}(t_c)$ первых разностей радиальных скоростей «объект – спутники» (см. (21), (22)). При этом

погрешность оценки $\Delta x^{(i)}$ каждого фазового вектора $\tilde{x}^{(i)}$ ($i = \overline{1, M-1}$) определяется формулой (23).

Введем вектор измерений ∇Z_{V_p} для момента времени t_c :

$$\nabla \tilde{Z}_{V_p} = (\nabla \tilde{V}_p^{(1)}, \nabla \tilde{V}_p^{(2)}, \dots, \nabla \tilde{V}_p^{(M-1)})^T. \quad (36)$$

Как и в (5), скомпенсируем первые разности радиальных скоростей, обусловленных движением спутников (см. также (4)) в момент времени t_c :

$$z_{V_p} = z_{V_p}(t_c) = \nabla \tilde{Z}_{V_p}(t_c) - \nabla V_p^{sat}(t_c). \quad (37)$$

В результате получим аналогичную по структуре (10) модель для задачи определения скорости V_η приемника с привлечением первых разностей фазовых измерений:

$$z_{V_p} = H_\nabla V_\eta + \Delta A, \quad \Delta A = (\Delta A^{(1)}, \Delta A^{(2)}, \dots, \Delta A^{(M-1)})^T, \quad H_\nabla = H_\nabla(t_c). \quad (38)$$

Отличие (38) от (10) состоит в иной модели погрешности ΔA (см. (25)), поскольку она зависит не только от разностей погрешностей фазовых измерений в каждой эпохе, но и от вариации измерений от эпохи к эпохе.

Далее находим искомую оценку $\tilde{V}_\eta$:

$$\tilde{V}_\eta = (H_\nabla^T W_{\nabla\Phi}^{-1} H_\nabla)^{-1} H_\nabla^T W_{\nabla\Phi}^{-1} z_{V_p}. \quad (39)$$

По аналогичной схеме вычисляются параметры для задачи оценивания в случае $N = 5$.

Результаты обработки экспериментальных данных

Использовались данные приемника сигналов GPS, который был установлен на самолете. Частота регистрации первичных данных – 10 Гц. Анализировалось три варианта обработки первичных фазовых измерений:

- 1) два скользящих временных интервала:
 - а) $N = 3$: $[t_{j-1}, t_j, t_{j+1}]$,
 - б) $N = 5$: $[t_{j-2}, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$;
- 2) равномерная и неравномерная временная сетка измерений;
- 3) модели равноточных и неравноточных измерений.

Вначале был задействован интервал данных перед вылетом, когда самолет был неподвижен относительно Земли: эталонное значение скорости $V_\eta = 0$.

Сравнивались скоростные доплеровские и фазовые решения, а также влияние используемой шкалы времени спутникового приемника на результаты работы алгоритма определения скорости.

Доплеровские и фазовые решения

На рис. 1 показано «поведение» оценок вертикальной скорости (как наиболее чувствительной к погрешностям спутниковых измерений) для доплеровского и фазового решений на интервале 20 с.

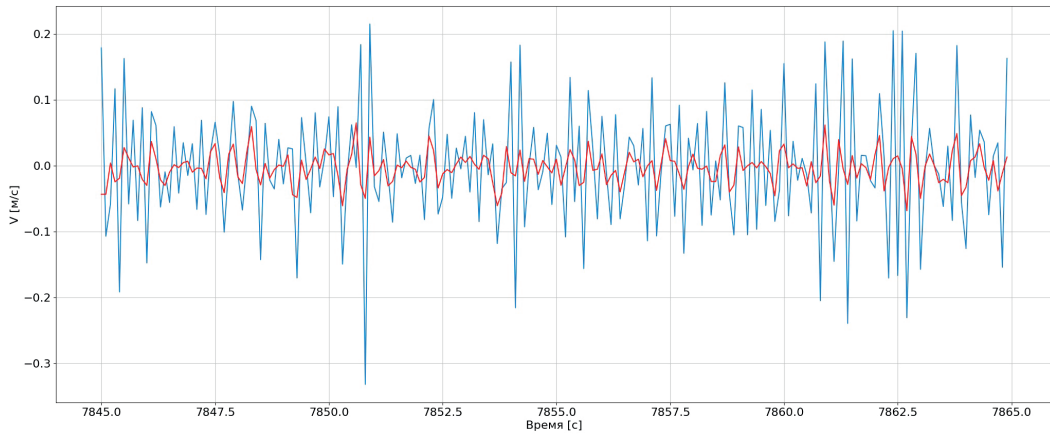


Рис. 1. Доплеровское (синяя линия) и фазовое (красная линия) скоростные решения

Оценки среднеквадратических погрешностей (СКП) для доплеровского и фазового решений соответственно таковы: $\sigma_d = 0,064$ м/с, $\sigma_\phi = 0,024$ м/с, то есть доплеровское решение примерно в 2,5 раза более шумное.

Рассмотрим график (также на интервале 20 с) оценок вертикальной компоненты скорости для полетных данных (рис. 2). Качественная картина для оценок оказывается схожей.

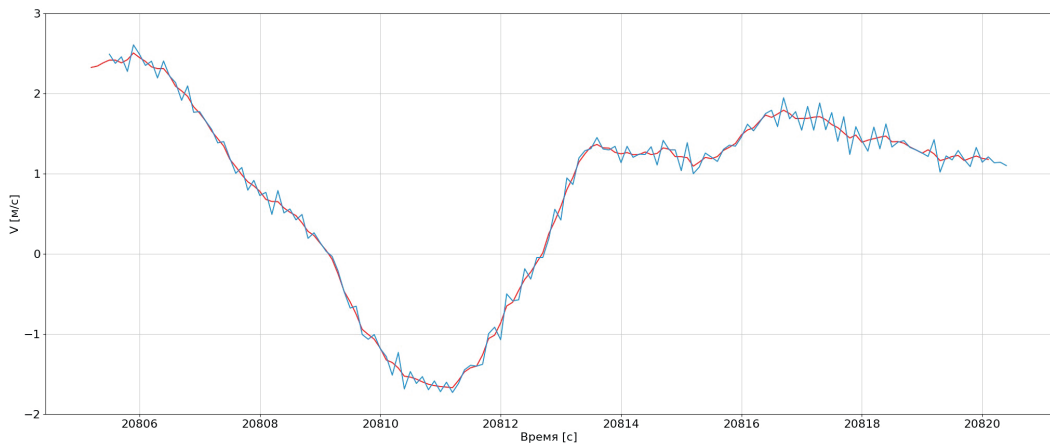


Рис. 2. Доплеровское (синяя линия) и фазовое (красная линия) скоростные решения для полетных данных

Этап I. Сравнение решений при выборе разных шкал времени

Рассматривался интервал времени 350 с перед вылетом самолета, при этом его двигатели не работали. Число точек окна дифференцирования выбиралось $N = 3$ и $N = 5$. Приводятся графики для вертикальной компоненты V_{UP} скорости.

Алгоритм применялся к данным приемника старого поколения, где погрешность часов Δt имеет пилообразный характер изменения во времени и лежит в интервале $[-0,0005, 0,0005]$ с. Сначала в расчетах использовалась равномерная шкала времени.

На рис. 3–4 отчетливо виден «выброс» в скоростном решении на равномерной сетке, соответствующий моменту, когда погрешность часов Δt приемника изменилась со значения $+0,0005$ с на $-0,0005$ с.

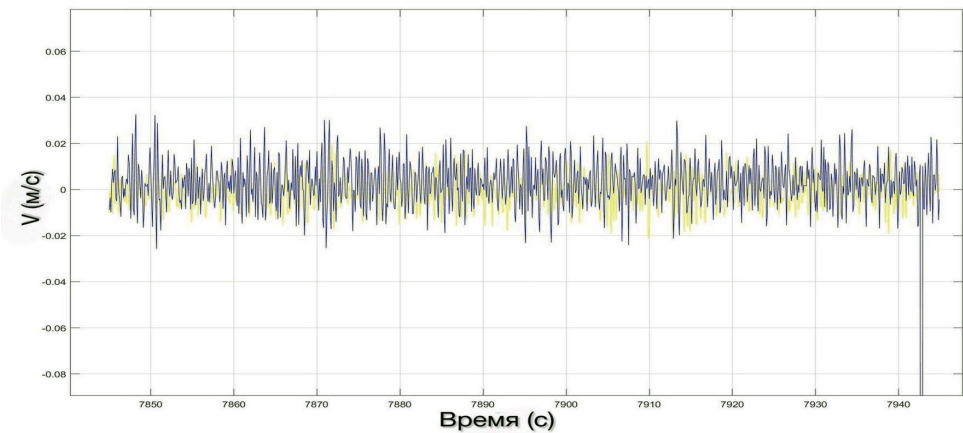


Рис. 3. Скоростное решение на равномерной (синяя линия) и неравномерной сетке (желтая линия) при $N = 3$

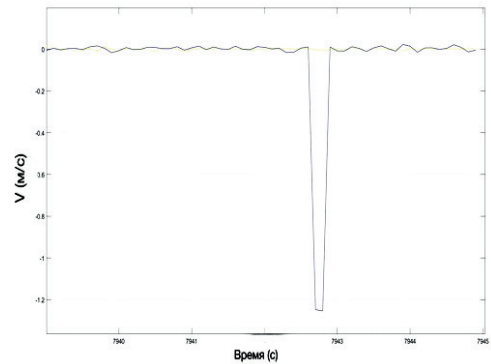


Рис. 4. Укрупненно: скоростное решение на равномерной (синяя линия) и неравномерной сетке (желтая линия) при $N = 3$

Этот же алгоритм, но на неравномерной сетке, учитывающей оценку $\Delta \tilde{t}$ (желтая линия), устранил выявленную проблему.

Сравнение решений при $N = 3$ и $N = 5$

Т а б л и ц а 1

Результаты обработки экспериментальных данных на неравномерной сетке при $N = 3$ и $N = 5$

Неравномерная сетка + равноточные измерения	$N = 3$	$N = 5$
Среднее значение вертикальной компоненты скорости	$-8,6 \cdot 10^{-4}$	$-8,5 \cdot 10^{-4}$
СКП	0,0081	0,0036

Из данных таблицы следует, что расширение окна дифференцирования с $N = 3$ до $N = 5$ снижает СКП шумовой составляющей решения примерно в 2 раза для использованных экспериментальных данных. На рис. 5–6 представлены графики вертикальной компоненты скорости при $N = 3$ и $N = 5$, также подтверждающие, что при большей ширине окна дифференцирования скоростное решение менее шумное.

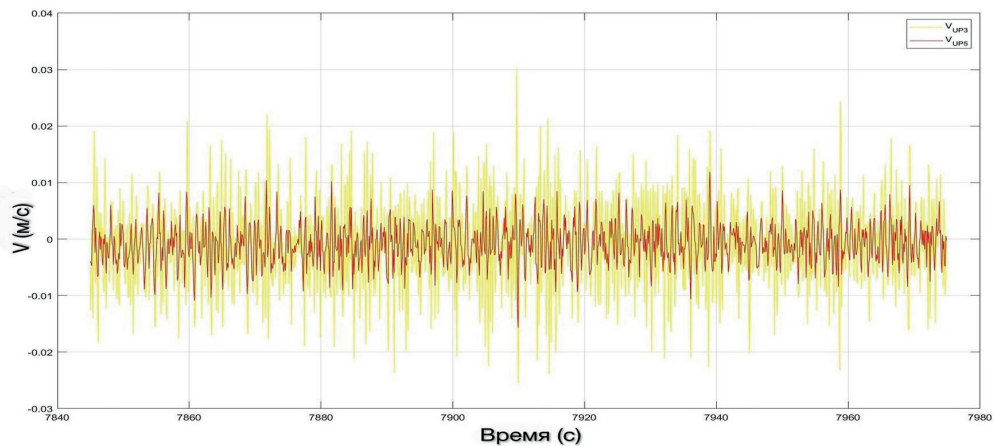


Рис. 5. Скоростное решение на неравномерной сетке при $N = 3$ (желтая линия) и при $N = 5$ (красная линия)

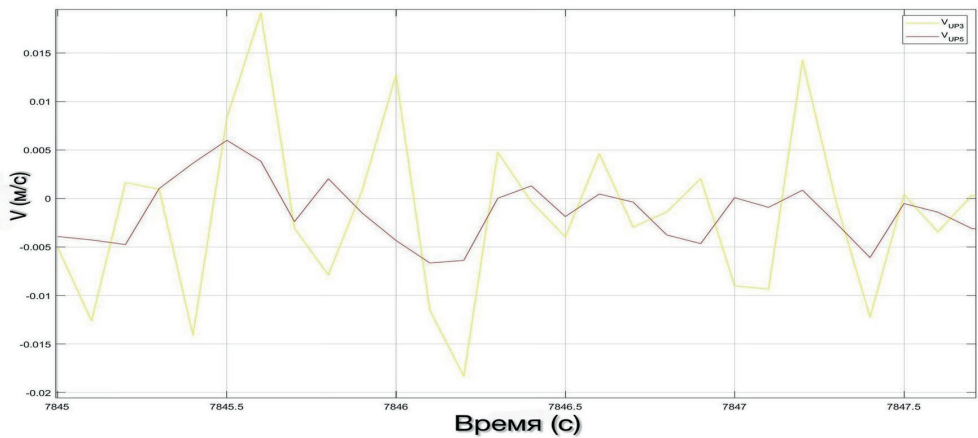


Рис. 6. Укрупненно: скоростное решение на неравномерной сетке при $N = 3$ (желтая линия) и при $N = 5$ (красная линия)

Этап II. Сравнение скоростных решений при равноточных и неравноточных измерениях на неравномерной временной сетке

На рис. 7 видно, что графики полученных решений при использовании только неравномерной сетки практически совпали. Приведем соответствующие статистические данные (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Результаты обработки экспериментальных данных при $N = 3$

Неравномерная сетка	Равноточные измерения	Неравноточные измерения
Среднее значение вертикальной компоненты скорости	$-8,6 \cdot 10^{-4}$	$-8,7 \cdot 10^{-4}$
СКО	0,0081	0,0088

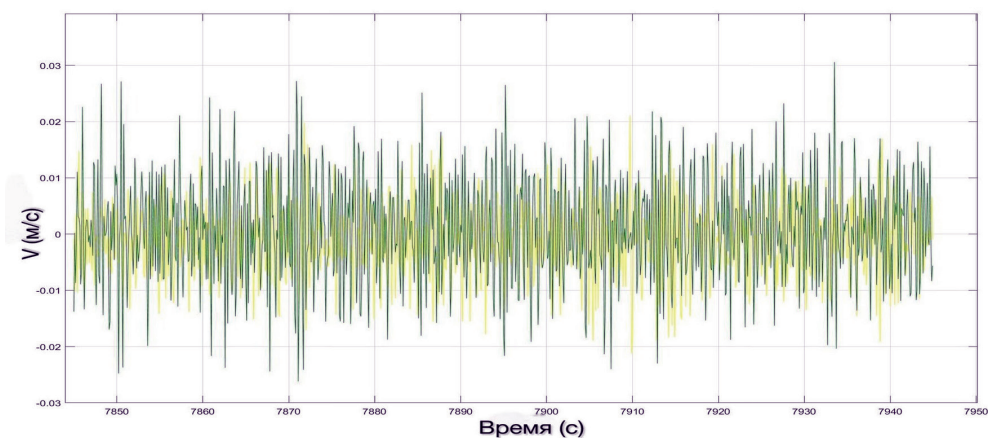


Рис. 7. Скоростные решения на неравномерной сетке при $N = 3$ и моделях равнооточных и неравнооточных измерений

Данные табл. 2 показывают, что использование неравнооточных измерений на неравномерной временной сетке и при условии, что СКП шумов измерений зависит от углов возвышения спутников, не вносит значимых изменений в результаты расчетов. Это соответствует моделям погрешностей фазовых измерений, описанным в [4], в которых нет зависимостей погрешностей от угла возвышения спутника.

Заключение

1. Описан алгоритм скоростного решения для ГНСС с использованием первичных фазовых измерений спутниковых систем, который применим к данным GPS, ГЛОНАСС, BeiDou, Galileo.
2. Алгоритм распространяется на использование ионосферно-свободных комбинаций фазовых измерений.
3. В задаче применяется скоростное решение с применением эфемеридных данных для каждого навигационного спутника.
4. Алгоритм предполагает неизменность состава спутникового созвездия и номеров зенитных спутников в используемом окне дифференцирования, что легко обеспечить благодаря логике обработки первичных спутниковых данных.
5. Значимым предположением является отсутствие сбоев фазы на интервале дифференцирования фазовых измерений. Отмечается, что задача детектирования сбоев фазы достаточно просто решается анализом невязок МНК. Обсуждение этого вопроса выходит за рамки статьи.
6. Алгоритм описан в общем виде для произвольного числа точек в окне дифференцирования фазовых измерений. Подробней рассмотрены частные случаи $N = 3$ и $N = 5$, которые актуальны для аэрогравиметрии.
7. Выявлено, что доплеровские скоростные решения являются примерно в 2,5 раза более шумными, чем фазовые (при частоте работы приемника 10 Гц).
8. Показано, что на первом этапе алгоритма следует задействовать неравномерную шкалу времени спутникового приемника, учитывающую оценки погрешности его часов, полученные на этапе решения кодовой задачи.

9. Установлено, что фазовые скоростные решения слабо зависят от учета угла возвышения спутника в модели погрешности фазового измерения, что позволяет применять на втором этапе МНК для случая равноточных измерений.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания
МГУ имени М.В. Ломоносова по госбюджетной теме «Методы построения
трехмерных моделей геофизических полей на основе глубокой интеграции данных
инерциальных и спутниковых измерений, производимых на борту летательных
аппаратов». Исследования авторов поддержаны Московским центром
фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М.В. Ломоносова
по соглашению № 075-15-2025-345.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Современные методы и средства** измерения параметров гравитационного поля Земли / под ред. В.Г. Пешехонова, О.А. Степанова. СПб.: «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
2. **Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А., Трубников С.А.** Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: МГУ, 2001.
3. **Golovan, A.A., Vavilova, N.B.** Satellite navigation. Raw data processing for geophysical applications, *J. Math. Sci.*, 146, 5920–5930 (2007), <https://doi.org/10.1007/s10958-007-0406-9/>.
4. **Teunissen, P. & Montenbruck, O.** (Eds.), Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems, Springer, 2017.
5. **Leick, A., Rapoport, L., and Tatarnikov, D.** GPS Satellite Surveying, *Faculty and Staff Monograph Publications*, 2015, 236.
6. **NAVSTAR GPS Space Segment/Navigation User Segment Interfaces (IS-GPS-200)**, 2022.
7. **Thompson, B.F., Lewis, S.W., Brown, S.A., Scott, T.M.**, Computing GPS satellite velocity and acceleration from the broadcast navigation message, *NAVIGATION*, 2019, 66:769–779, <https://doi.org/10.1002/navi.342/>.
8. **Ван С., Ту Ж., Хань Ц., Чжан Ж., Фань Л.** Сравнительный анализ трех методов определения скорости по данным GPS // Гирокоспия и навигация. 2020. Т. 28. №2 (109). С. 54–69. DOI: 10.17285/0869-7035.0033.
9. **Angrisano, A., Cappello, G., Gaglione, S., Gioia, C.** Velocity Estimation Using Time-Differenced Carrier Phase and Doppler Shift with Different Grades of Devices: From Smartphones to Professional Receivers. *Algorithms*, 2024, 17, 2. <https://doi.org/10.3390/a17010002/>
10. **Болотин Ю.В., Голован А.А., Кручинин П.А., Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Трубников С.А.** Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 1999. №2. С. 36–41.
11. <https://earth-info.nga.mil>. Office of Geomatics, National Geospatial-Intelligence Agency. Retrieved 21 December 2022.
12. **Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11).** Справочный документ. М.: ВТУ ГШ ВС РФ, 2014.
13. **ГЛОНАСС: принципы построения и функционирования** / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. 3-е изд., перераб. М.: Радиотехника, 2005. 688 с.

Golovan, A.A., Kuznetsova, K.A. (Lomonosov Moscow State University, Russia)
Velocity Estimation Using Carrier Phase Measurements of a Global Navigation Satellite System in Autonomous Mode, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2025, vol. 33, no. 3 (130), pp. 3–19.

Abstract. The paper considers velocity determination using raw carrier phase measurements of GNSS receiver in autonomous mode. This problem is topical for airborne gravimetry [1],

because GNSS navigation measurements are essential for it. The idea of the solution is based on differentiating the single differences of carrier phase measurements. The two-step LSM procedure is described. Results from processing the experimental data are analyzed. The paper continues and extends publications [2, 3].

Key words: airborne gravimetry, GNSS, Doppler measurements, carrier phase measurements, single differences.

Материал поступил 15.08.2025.