

УДК 528.28
EDN TSZRNQ

В. Ф. КАНУШИН, Д. Н. ГОЛДОБИН, И. Г. ГАНАГИНА, И. А. ИНЖЕВАТОВ

УТОЧНЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ДО ПЯТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕОРИИ МОЛОДЕНСКОГО НА ОСНОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

В работе уточнены глобальные характеристики гравитационного поля Земли до пятого приближения теории Молоденского. Вычисления производились на основе аналитического продолжения аномалий силы тяжести (АСТ) в свободном воздухе с физической поверхности Земли к отсчетной сферической поверхности, проходящей через расчетную точку, с помощью ряда Тейлора. Приведены картосхемы цифровых глобальных моделей вертикальных градиентов АСТ до пятого приближения и получены глобальные поправочные члены для высот квазигеоида и уклонения отвесной линии (УОЛ) первого, второго, третьего, четвертого и пятого приближения теории Молоденского. Показано, что градиентное решение позволяет уточнить глобальные характеристики гравитационного поля Земли. При уточнении высот квазигеоида по формуле Стокса в равнинных районах достаточно второго приближения теории Молоденского, а для горных районов – четвертого. При уточнении составляющих УОЛ в плоскости меридиана и первого вертикала стандартная погрешность увеличивается со второго приближения.

Ключевые слова: высота квазигеоида, составляющие уклонения отвесной линии, аномалии силы тяжести, вертикальные градиенты аномалий силы тяжести, рельеф Земли, ряд Тейлора, ГНСС-нивелирование, астрономо-геодезические уклонения отвесной линии, быстрое преобразование Фурье.

Введение

В рамках теории М.С. Молоденского высота квазигеоида и составляющие уклонений отвесной линии (УОЛ) определяются путем добавления поправочных членов к формулам Стокса и Вининг-Мейнеса. Существуют три различных варианта решения этой задачи – ряды по степеням малого параметра k . Первые два – решения М.С. Молоденского [1] и В.В. Бровара [2], полученные с помощью интегральных уравнений для плотности простого слоя. Третье основано на формальном аналитическом продолжении аномалий силы тяжести (АСТ) вниз к некоторой отсчетной

Канушин Вадим Федорович. Кандидат технических наук, доцент, кафедра космической и физической геодезии, Сибирский государственный университет геосистем и технологий (Новосибирск). ORCID 0000-0001-7057-1595.

Голдобин Денис Николаевич. Кандидат технических наук, доцент, кафедра космической и физической геодезии, Сибирский государственный университет геосистем и технологий. ORCID 0000-0002-2678-7636.

Ганагина Ирина Геннадьевна. Кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой космической и физической геодезии, Сибирский государственный университет геосистем и технологий. ORCID 0000-0002-8543-8276.

Инжеватов Иван Александрович. Инженер, кафедра космической и физической геодезии, Сибирский государственный университет геосистем и технологий. ORCID 0009-0002-2358-4275.

внутренней сфере за счет обращения ряда Тейлора и определения на этой сфере искомой характеристики гравитационного поля Земли в соответствии с теорией Стокса. Вообще аналитическое продолжение гармонической функции внутрь Земли недопустимо и является, как отмечено в работе [3], неправильно сформулированной операцией. Тем не менее на основании теоремы Рунге–Краупа [4] любая гармоническая функция χ , регулярная вне поверхности Земли, может быть равномерно продолжена другой гармонической функцией ψ , регулярной вне расположенной внутри Земли произвольно заданной сферы, в том смысле, что соотношение $|\chi - \psi| > \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо как вне, так и внутри замкнутой поверхности.

Т.е. если истинный аномальный потенциал нельзя регулярно продолжить внутрь Земли, то всегда можно найти другую гармоническую функцию, которая сколь угодно близка к истинному аномальному потенциалу и его производным.

В работах [5–8] теоретически доказана эквивалентность этих решений и продемонстрировано, что краевая задача Молоденского может быть решена без привлечения интегрального уравнения – путем аналитического продолжения АСТ в свободном воздухе вниз с помощью степенных рядов, в частности ряда Тейлора. Вместе с тем публикаций, посвященных этому вопросу, довольно мало. Среди них можно выделить [9] и [10], где приведены результаты численных оценок поправки первого приближения для вычисления высот квазигеоида, полученные из решения краевой задачи Молоденского с помощью интегральных уравнений в случае плоской аппроксимации простого слоя и с помощью аналитического продолжения АСТ.

В настоящей статье уточнены глобальные характеристики гравитационного поля Земли до пятого приближения теории Молоденского. С этой целью использовался нетрадиционный подход на основе аналитического продолжения АСТ в свободном воздухе с физической поверхности Земли к отсчетной сферической поверхности, проходящей через расчетную точку, с помощью обращения ряда Тейлора до пятого порядка включительно. Так как в качестве отсчетной поверхности используется сфера, то вертикальные производные в ряде Тейлора до пятого порядка совпадают с радиальными и получены гармоническим синтезом по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 [11, 12].

Статья состоит из четырех разделов. В первом изложены теоретические основы применения аналитического продолжения АСТ в свободном воздухе с физической поверхности Земли к отсчетной сферической поверхности для решения задачи Молоденского. Во втором приведены результаты вычисления глобальных поправочных членов до пятого приближения теории Молоденского для определения высот квазигеоида. Третий раздел содержит результаты вычисления глобальных поправочных членов до пятого приближения теории Молоденского для определения УОЛ. В заключении приведен анализ полученных данных и сделаны выводы.

Теоретические основы применения аналитического продолжения для решения задачи Молоденского

Задача Молоденского в сферическом приближении состоит в определении возмущающего потенциала $T = W - U$, где W – потенциал силы тяжести, U – нормальный потенциал силы тяжести, путем решения уравнения Лапласа

$$\Delta T = 0 \quad (1)$$

с краевым условием

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = -\Delta g, \quad (2)$$

где Δg – АСТ в свободном воздухе на физической поверхности Земли; $\rho = R + h$ – радиус-вектор точки на физической поверхности Земли, R – радиус отсчетной сферы, h – высота точки $P(\varphi, \lambda, h)$ над отсчетной сферой.

Уравнение (1) с краевым условием (2) имеет вид бесконечного ряда для возмущающего потенциала на физической поверхности Земли:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n. \quad (3)$$

Члены ряда (3) T_n вычисляются как

$$T_n = \iint G_n S(\psi) d\omega, \quad (4)$$

где $S(\psi)$ – функция Стокса; G_n – поправочные члены; $n = 1, 2, \dots$ – номер поправочного члена; ω – сфера.

В нулевом приближении при $n = 0$, где поправочный член $G_0 = \Delta g$, получим выражение, которое называется интегралом Стокса и является главной частью возмущающего потенциала в решении Молоденского:

$$T_0 = \iint \Delta g S(\psi) d\omega. \quad (5)$$

Используя формулу Брунса [13] и (5), выведем интегральную формулу Стокса для высоты квазигеоида в нулевом приближении:

$$\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g S(\psi) d\omega. \quad (6)$$

Дифференцируя высоты квазигеоида по широте и долготе, запишем интегральные формулы Венинг-Мейнеса для составляющих УОЛ:

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{Bmatrix} = \frac{\rho''}{4\pi\gamma} \iint \Delta g \frac{dS(\cos \psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\omega. \quad (7)$$

В последние десятилетия в физической геодезии возрос интерес к применению быстрых преобразований Фурье (БПФ) для оценки интегралов свертки [14, 15]. Если исходные данные представлены в сеточной форме, то методы на базе БПФ наиболее эффективны. В [16] показано, как метод БПФ, задействуемый для свертки на сфере функции ядра и данных в направлении «восток–запад», в сочетании с интегрированием (или суммированием) по параллелям можно применить к формулам Венинг-Мейнеса и Стокса. В случае формулы Стокса (6) для всех точек пояса (параллели) P на широте φ_p с помощью одномерного сферического БПФ получено следующее выражение:

$$\zeta_{\varphi_p}^0(\lambda_p) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma_p} F_1^{-1} \left\{ \sum_{\varphi_q=\varphi_1}^{\varphi_n} F_1(S_\varphi(\Delta\lambda_{pq})) F_1(\Delta g_{\varphi_p}(\lambda_q) \cos \varphi_q) \right\}, \quad (8)$$

где $\zeta_{\varphi_p}^0(\lambda_p)$ – высота геоида в каждой точке на широте φ_p ; γ_p – значение нормальной силы тяжести на широте φ_p для точек пояса P ; R – средний радиус Земли; $\Delta g_{\varphi_p}(\lambda_q)$ – значение смешанной АСТ в свободном воздухе в узлах сетки на отсчетной сфере в точке $A(\varphi, \lambda, h_a)$ (для нулевого приближения равно $\Delta g_{ca}(\varphi, \lambda, h)$ – значению смешан-

ной АСТ в свободном воздухе на физической поверхности Земли в узлах сетки с широтой φ , долготой λ и высотой h); $S_{\varphi}(\Delta\lambda_{pq})$ – функция Стокса (которая зависит только от $\Delta\lambda_{pq}$ и значений φ_p и φ_q); F_1 – операция прямого дискретного БПФ; F_1^{-1} – операция обратного дискретного БПФ; $\Delta\lambda$ и $\Delta\varphi$ – шаг по долготе и широте соответственно; p и q – номера текущего широтного пояса и в поясе соответственно; n – всего широтных поясов; индекс a – высота отсчетной сферы.

Исходные АСТ в свободном воздухе $\Delta g_{\text{св}}(\varphi, \lambda, h)$ характеризуют аномальное гравитационное поле на физической поверхности в точке $P(\varphi, \lambda, h)$. Чтобы получить значения поля в точке $A(\varphi, \lambda, h_a)$ на отсчетной сфере, необходимо путем аналитического продолжения вниз привести аномалии к отсчетной сферической поверхности. При этом задействуется формальное обращение ряда Тейлора [17], ограниченное степенью $n = 5$, следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta g(\varphi, \lambda, h_a) = & \Delta g_{\text{св}}(\varphi, \lambda, h) - (h - h_a) \frac{\partial \Delta g}{\partial h} - \frac{1}{2} (h - h_a)^2 \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial h^2} - \\ & - \frac{1}{6} (h - h_a)^3 \frac{\partial^3 \Delta g}{\partial h^3} - \frac{1}{24} (h - h_a)^4 \frac{\partial^4 \Delta g}{\partial h^4} - \frac{1}{120} (h - h_a)^5 \frac{\partial^5 \Delta g}{\partial h^5}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta g(\varphi, \lambda, h_a)$ – АСТ на отсчетной сфере в точке $A(\varphi, \lambda, h_a)$; $\Delta g_{\text{св}}(\varphi, \lambda, h)$ – АСТ в свободном воздухе в точке $P(\varphi, \lambda, h)$ на физической поверхности Земли; h – высота точки $P(\varphi, \lambda, h)$ над отсчетной сферой. Так как точка $A(\varphi, \lambda, h_a)$ расположена на отсчетной сфере, то ее высота $h_a = 0$. В сферической аппроксимации вертикальные производные по высоте h в формуле (9) совпадают с производными по радиус-вектору r точки $P(\varphi, \lambda, h)$ на физической поверхности Земли.

Экспериментальные вычисления

Численные расчеты и анализ результатов уточнения высот квазигеоида указанным методом аналитического продолжения производились с использованием цифровой модели (ЦМ) АСТ, полученной гармоническим синтезом коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до 2190 степени. Исследования на разных территориях показали, что погрешность ЦМ составляет от 1,5 до 6 мГал [11, 18]. На рис. 1 приведена картосхема исходной глобальной модели АСТ в свободном воздухе на физической поверхности Земли. В качестве исходных данных о физической поверхности Земли служит ЦМ высот рельефа земной поверхности Earth2014 [19], глобальная картосхема которой представлена на рис. 2.

На рис. 3–7 приведены картосхемы глобальных ЦМ вертикальных градиентов АСТ до пятого порядка, полученные по формуле [11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \Delta g}{\partial r^k} = & \frac{fM}{r^{k+1}} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[(n+1)(n+2) \dots (n+k) \left(\frac{a_e}{r} \right)^{n+k+1} \cdot \right. \right. \\ & \cdot \left. \sum_{m=0}^n \left(\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \Bigg\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где k – степень производной; fM – геоцентрическая гравитационная постоянная; r – радиус-вектор расчетной точки; n и m – степень и порядок коэффициента соответственно; $\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^0$ – разность безразмерных нормированных гармонических

коэффициентов геопотенциала; $\bar{C}_{nm}$ и $\bar{S}_{nm}$ – нормированные безразмерные гармонические коэффициенты геопотенциала степени n и порядка m ; $\bar{C}_{nm}^0$ – коэффициент нормального геопотенциала, отнесенный к эллипсоиду WGS-84; $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ – нормированные присоединенные функции Лежандра; a_e – экваториальный радиус Земли; N – максимальная степень разложения (для EIGEN-6C4 $N = 2190$).

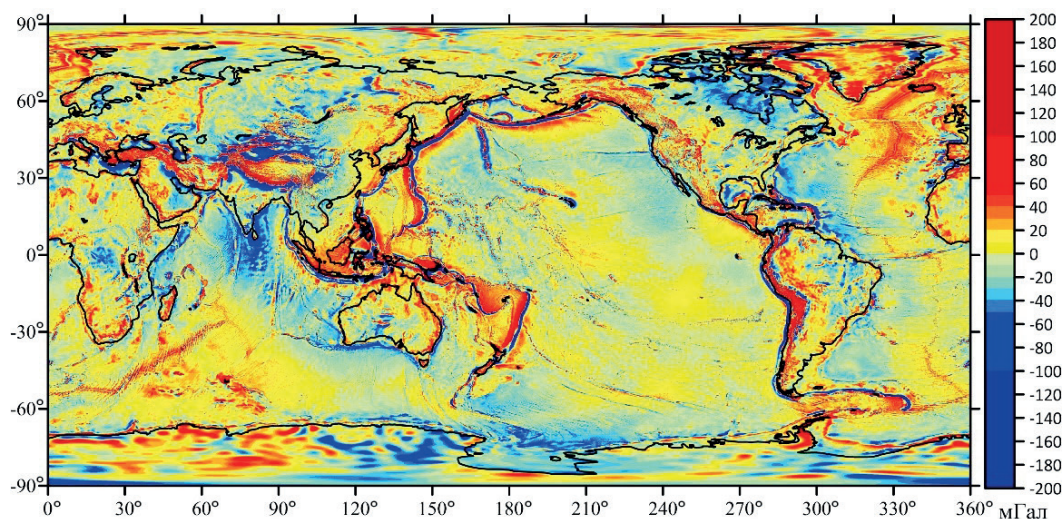


Рис. 1. Картограмма глобальной модели АСТ в свободном воздухе (черная линия – абрис суши)

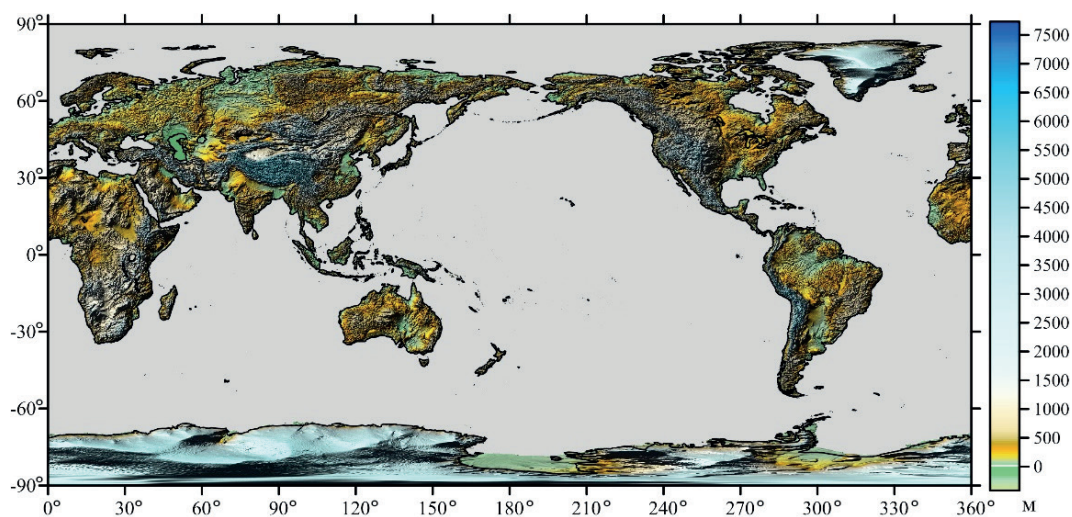


Рис. 2. Картограмма глобальной модели высот рельефа земной поверхности Earth2014

Вертикальные градиенты АСТ, отображенные на рис. 3–7, коррелируют с рельефом. При этом значения градиентов отличаются на 15 порядков: – от 10^{-3} мГал/м для первого до 10^{-18} мГал/м для пятого градиента. Диапазоны цветовых шкал выбраны таким образом, чтобы продемонстрировать характерное распределение значений градиентов на земной поверхности.

Подставив в формулу (8) вместо АСТ Δg_{φ_p} результаты моделирования вертикальных градиентов АСТ, приведенные в виде картограмм на рис. 3–7, получим гло-

бальные поправочные члены для высот квазигеоида до пятого приближения теории Молоденского:

$$\Delta\zeta_{\varphi_p}^n(\lambda_p) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma_p} F_1^{-1}\varphi \left\{ \sum_{\varphi_q=\varphi_1}^{\varphi_n} F_1(S_\varphi(\Delta\lambda_{pq})) F_1 \cdot \left(-\left(\frac{h^n}{n!}\right) \frac{\partial^n \Delta g_{\varphi_p}}{\partial h_{\varphi_p}^n}(\lambda_q) \cos\varphi_q \right) \right\}, \quad (11)$$

где $n = 1, \dots, 5$ – степень приближения; $\frac{\partial^n \Delta g_{\varphi_p}}{\partial h_{\varphi_p}^n}(\lambda_q)$ – вертикальный градиент АСТ n -го порядка; h – высота.

Эту процедуру можно повторять для каждой точки, где требуется вычислить высоты геоида.

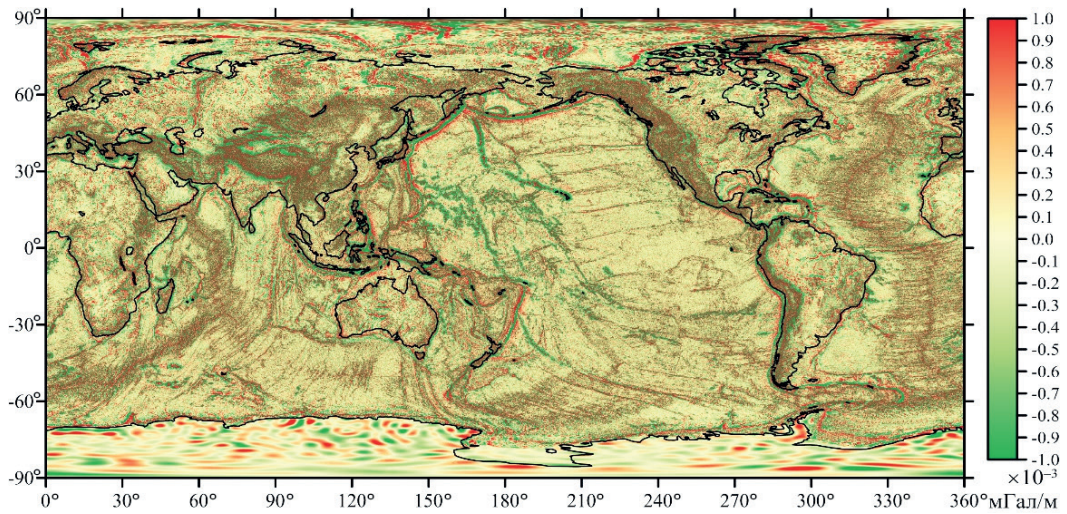


Рис. 3. Картограмма глобальной ЦМ вертикальных градиентов АСТ первого порядка

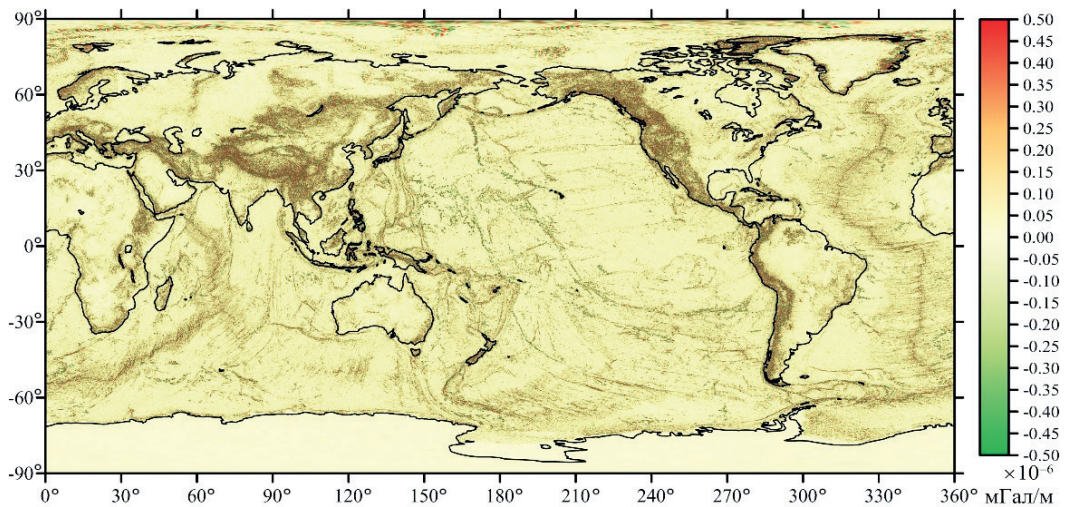


Рис. 4. Картограмма глобальной ЦМ вертикальных градиентов АСТ второго порядка

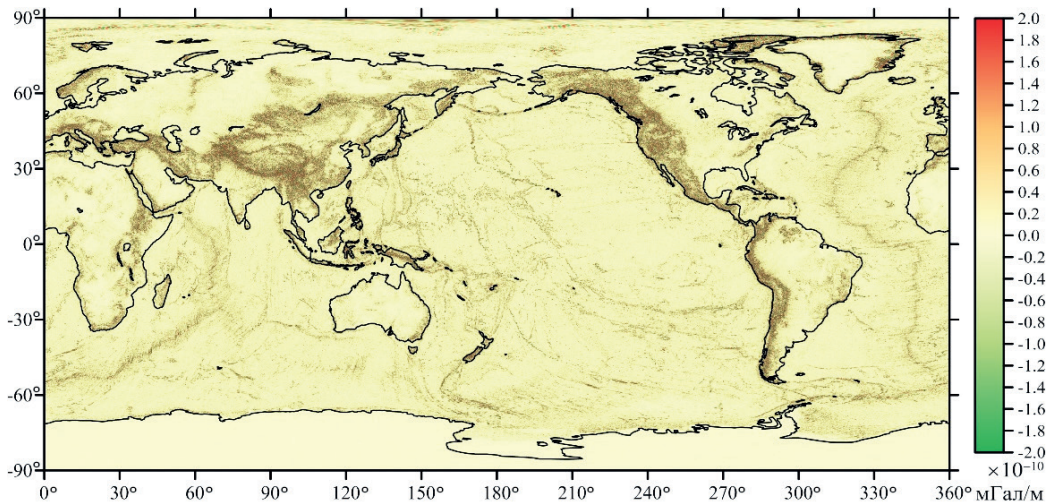


Рис. 5. Картограмма глобальной ЦМ вертикальных градиентов АСТ третьего порядка

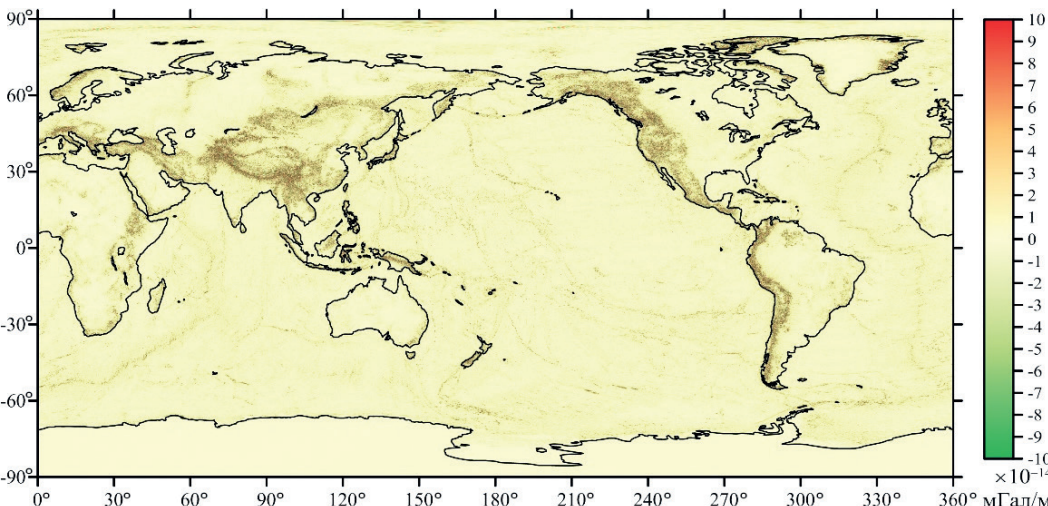


Рис. 6. Картограмма глобальной ЦМ вертикальных градиентов АСТ четвертого порядка

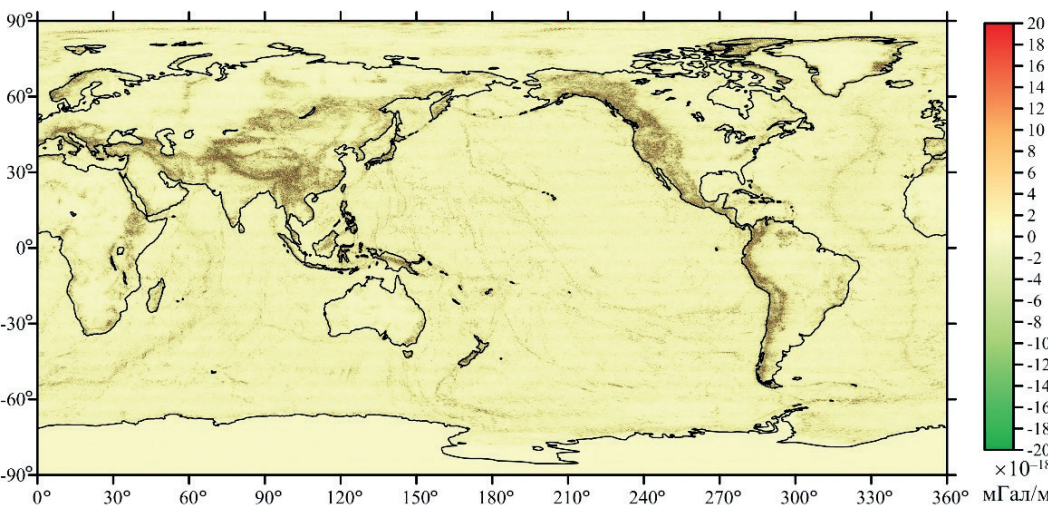


Рис. 7. Картограмма глобальной ЦМ вертикальных градиентов АСТ пятого порядка

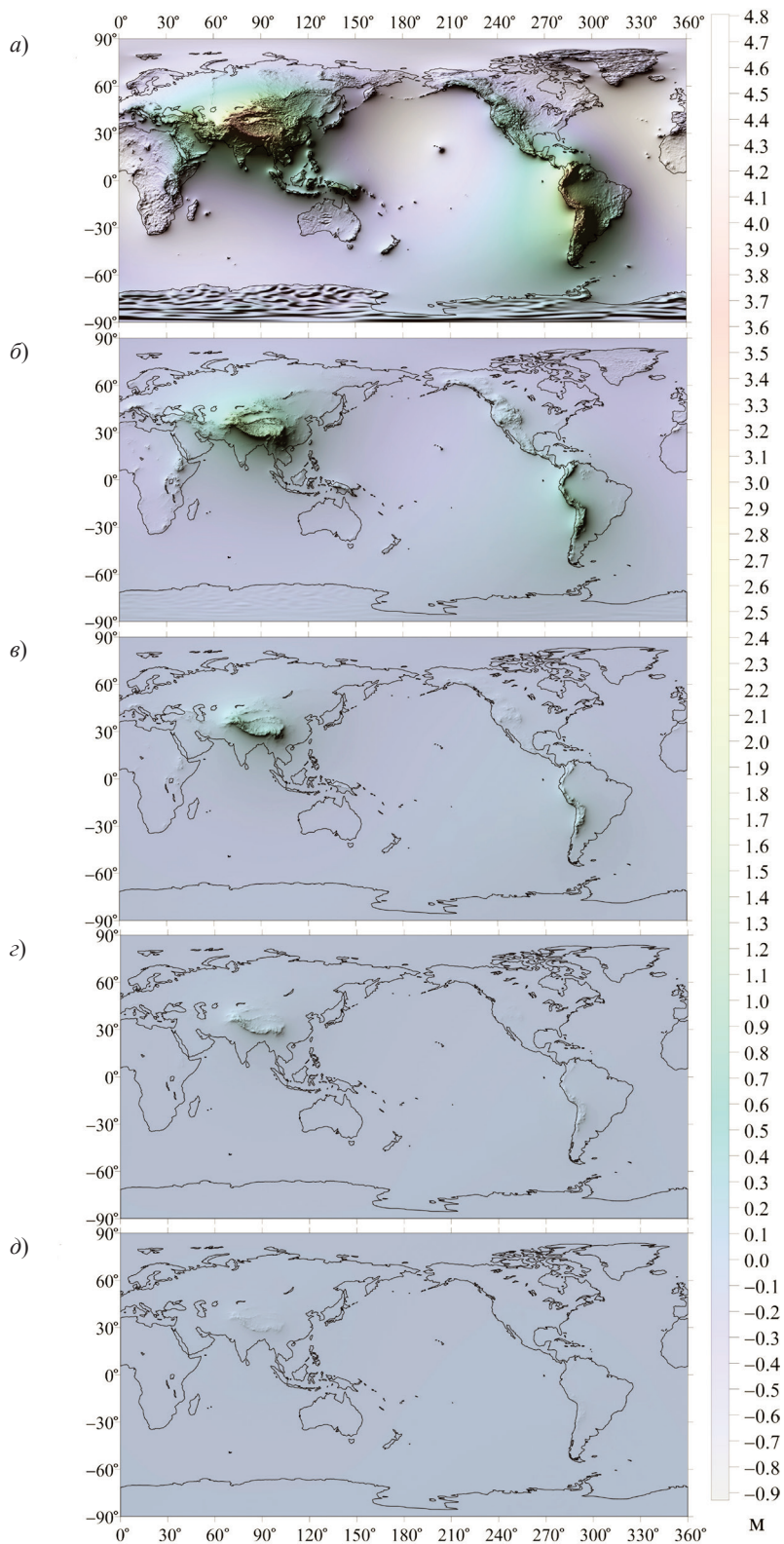


Рис. 8. Картограммы распределения поправочных членов для высот квазигеоида на земной поверхности первого (а), второго (б), третьего (в), четвертого (г) и пятого (д) приближения теории Молоденского

На рис. 8 в виде картосхем представлены результаты вычисления глобальных поправочных членов для высот квазигеоида первого, второго, третьего, четвертого и пятого приближения теории Молоденского соответственно. Поправочные члены определены в 9 331 200 точках. В табл. 1 приведены характеристики распределения их значений на земной поверхности.

Таблица 1

Характеристики распределения значений поправочных членов на земной поверхности для высот квазигеоида

Поправка приближения, м					
Номер приближения	1	2	3	4	5
Минимум	−0,928	−0,242	−0,079	−0,024	−0,007
Максимум	4,804	1,714	0,799	0,297	0,090
Среднее	−0,057	−0,020	−0,007	−0,002	−0,001
Диапазон	5,733	1,956	0,878	0,321	0,097

На рис. 9 отображена картосхема глобального квазигеоида нулевого приближения, полученного с помощью формулы (8).

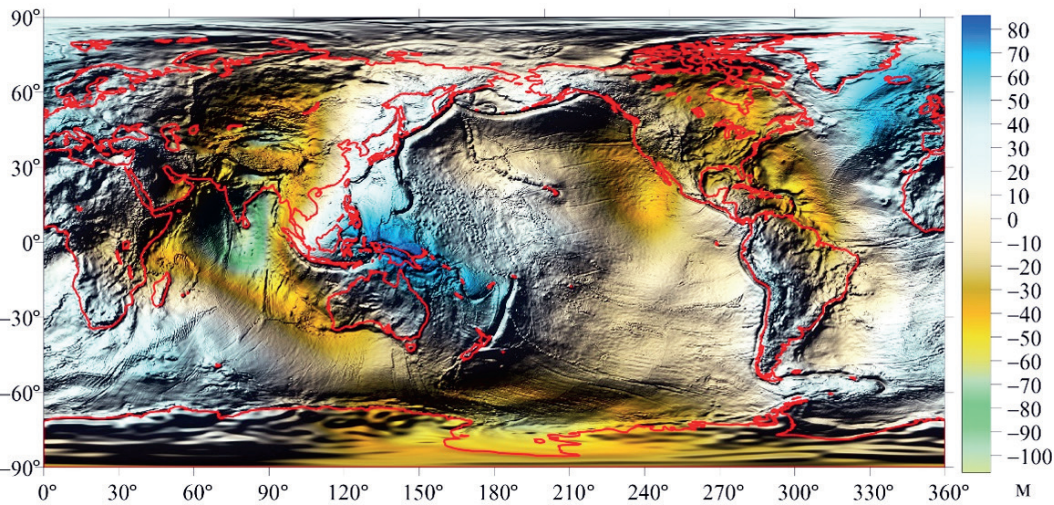


Рис. 9. Картосхема глобального квазигеоида нулевого приближения (красная линия – абрис суши)

Квазигеоид уточняется путем добавления к формуле Стокса поправочных членов первого, второго, третьего, четвертого и пятого приближения, как показано в [20]:

$$\zeta^n = \zeta^0 + \Delta\zeta^n - \text{квазигеоид } n\text{-го приближения};$$

где $n = 1, \dots, 5$ – порядок приближений.

Оценка точности

Численные расчеты и анализ высот квазигеоида, уточненных методом аналитического продолжения исходных АСТ, выполнялись с привлечением двух массивов

данных о высотах квазигеоида, полученных посредством ГНСС-нивелирования на территории Западной Сибири – в равнинном районе с высотами над уровнем моря до 300 м и в горном районе с высотами около 900 м [21, 22].

Статистические параметры распределения разностей между уточненными высотами квазигеоида в n -приближениях и вычисленными с помощью ГНСС-нивелирования на равнинном участке приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Статистические параметры распределения разностей между уточненными высотами квазигеоида в n -приближениях и вычисленными с помощью ГНСС-нивелирования на равнинном участке Западной Сибири с высотами до 300 м

Характеристики	$n = 0$ (м)	$n = 1$ (м)	$n = 2$ (м)	$n = 3$ (м)	$n = 4$ (м)	$n = 5$ (м)
Количество значений	154	154	154	154	154	154
Минимум	–1,408	–0,318	–0,005	0,109	0,146	0,157
Максимум	–0,938	–0,064	0,279	0,414	0,458	0,471
Диапазон	0,470	0,254	0,284	0,305	0,312	0,314
Среднее	–1,193	–0,186	0,137	0,258	0,299	0,310
Стандартное отклонение	0,1089	0,0697	0,0680	0,0691	0,0697	0,0698
Асимметрия	0,119	–0,149	–0,25	–0,268	–0,272	–0,273
Экцесс	–0,673	–1,236	–0,898	–0,73	–0,678	–0,664
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,10$	0,098	0,098	0,098	0,098	0,098	0,098
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,05$	0,108	0,108	0,108	0,108	0,108	0,108
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,01$	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13

Из табл. 2 видно, что после учета в формуле Стокса поправки Молоденского первого порядка стандартное отклонение высоты квазигеоида на равнинном участке уменьшилось с 10,9 см в нулевом приближении до 7,0 см в первом приближении. С учетом поправки Молоденского второго порядка стандартное отклонение составило 6,8 см, т.е. уменьшилось во втором приближении в 1,6 раза, а с учетом поправки третьего порядка стандартное отклонение достигло 6,9 см, т.е. возросло на 0,1 см, и 6,98 см – с увеличением порядка приближения при $n = 5$. Так как эмпирическая статистика Колмогорова–Смирнова при $\alpha = 0,05$ удовлетворяет неравенству

$$0,108 < \frac{1,36}{\sqrt{154}} = 0,110,$$

приходим к выводу, что распределение разностей соответствует нормальному распределению.

Статистические параметры распределения разностей между уточненными высотами квазигеоида в n -приближениях и высотами квазигеоида, полученными по данным ГНСС-нивелирования, на горном участке с высотами 900 м приведены в табл. 3.

Таблица 3

Статистические параметры распределения разностей между уточненными высотами квазигеоида в n -приближениях и полученными с помощью ГНСС-нивелирования на горном участке с высотами около 900 м

Характеристики	$n = 0$ (м)	$n = 1$ (м)	$n = 2$ (м)	$n = 3$ (м)	$n = 4$ (м)	$n = 5$ (м)
Количество значений	136	136	136	136	136	136
Минимум	-2,003	-0,330	0,010	0,125	0,148	0,154
Максимум	-0,315	0,285	0,470	0,534	0,559	0,572
Диапазон	1,689	0,615	0,460	0,409	0,412	0,418
Среднее	-1,088	-0,054	0,251	0,365	0,402	0,412
Стандартное отклонение	0,3610	0,1595	0,1021	0,0917	0,0911	0,0912
Асимметрия	0,026	0,351	0,075	-0,337	-0,453	-0,478
Эксцесс	-0,313	-0,686	-0,745	-0,511	-0,392	-0,359
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,10$	0,104	0,104	0,104	0,104	0,104	0,104
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,05$	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,01$	0,138	0,138	0,138	0,138	0,138	0,138

Из табл. 3 видно, что с увеличением поправок средняя разность между уточненными высотами квазигеоида и полученными посредством ГНСС-нивелирования на горном участке уменьшилась с -1,063 м при $n = 0$ до -0,054 м при $n = 1$, а начиная с $n = 2$ возросла до 0,412 м при $n = 5$. Стандартное отклонение высоты квазигеоида снизилось с 36,1 см в нулевом приближении до 16,0 см в первом приближении, т.е. в 2,25 раза. После учета поправки Молоденского во втором приближении стандартное отклонение уменьшилось до 10,2 см, т.е. в 3,5 раза, в третьем – составило 9,2 см, в четвертом – 9,1 см, т.е. уменьшилось почти в 4 раза по отношению к нулевому приближению, в пятом – увеличилось на 0,01 см. Поскольку эмпирическая статистика Колмогорова–Смирнова при $\alpha = 0,05$ удовлетворяет неравенству

$$0,115 < \frac{1,36}{\sqrt{136}} = 0,117,$$

то распределение разностей соответствует нормальному распределению.

Экспериментальные вычисления уклонений отвесной линии

С применением одномерного сферического БПФ для свертки на сфере в направлении «восток–запад» в сочетании с суммированием по параллелям к формулам Венинг-Мейнеса (7) получены выражения для вычисления составляющих УОЛ с точностью нулевого приближения:

- в плоскости меридиана

$$\xi_0 = \xi_{\varphi_p}(\lambda_p) = \frac{\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma_p} F_1^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\varphi_q=\varphi_1}^{\varphi_n} F_1(\Delta g_{cv} \cos(\varphi_p)) F_1(S'_\varphi(\Delta\lambda_{pq}) \cos\alpha_{pq}) \right\}; \quad (12)$$

- в плоскости первого вертикала

$$\eta_0 = \eta_{\varphi_p}(\lambda_p) = \frac{\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma_p} F_1^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\varphi_q=\varphi_1}^{\varphi_n} F_1(\Delta g_{св} \cos(\varphi_p)) F_1(S'_\varphi(\Delta\lambda_{pq}) \sin \alpha_{pq}) \right\}, \quad (13)$$

где $S'_\varphi(\Delta\lambda_{pq}) = dS(\psi_{pq})/d\psi$ – функция Вининг-Мейнеса.

Азимут α_{pq} рассчитан по следующей формуле:

$$\tan \alpha_{pq} = \frac{\cos \varphi_q \sin \Delta\lambda_{pq}}{\sin \Delta\varphi_{pq} - 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\lambda_{pq}}{2} \right) \sin \varphi_p \cos \varphi_q}. \quad (14)$$

Вычисленные УОЛ в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала по формулам (12) и (13) в нулевом приближении теории Молоденского представлены в виде картосхем на рис. 10.

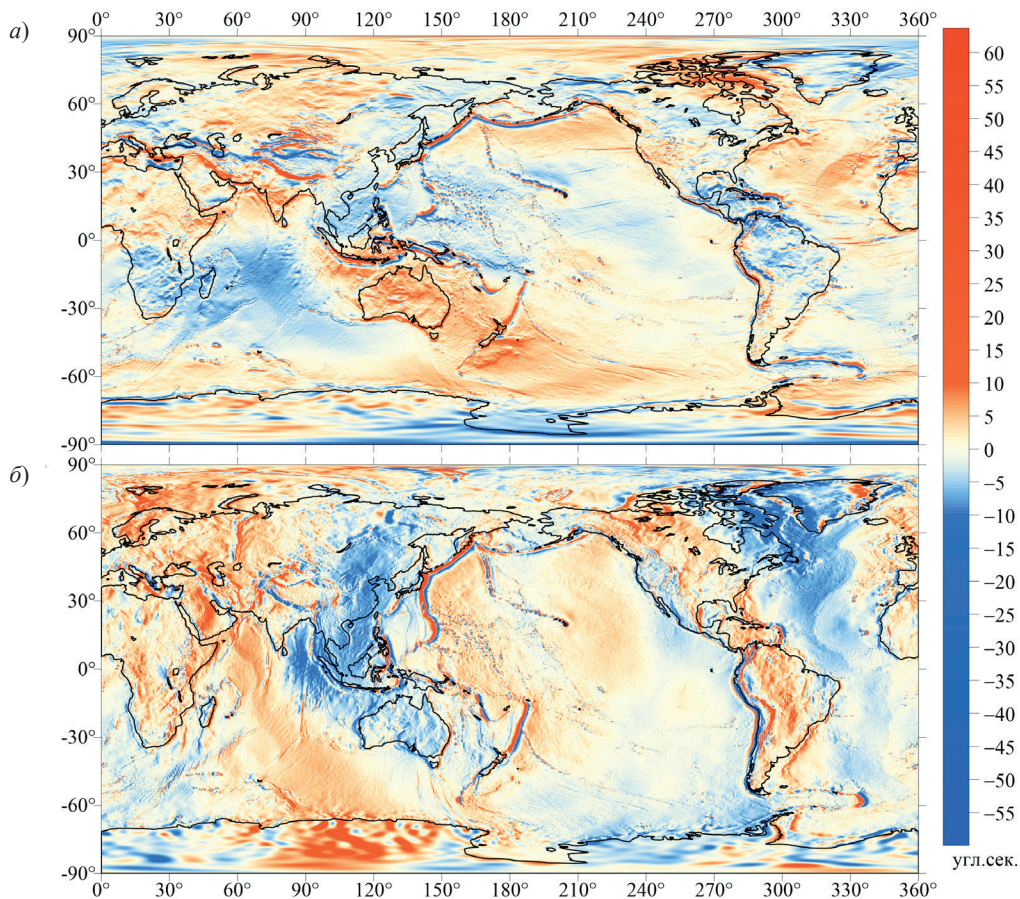


Рис. 10. Картосхемы глобальной ЦМ УОЛ в плоскости меридиана (а) и первого вертикала (б) в нулевом приближении теории Молоденского (диапазон цветовой палитры картосхемы ограничен $\pm 10''$ – 95% значений)

В табл. 4 приведены характеристики распределения значений глобальной модели УОЛ в нулевом приближении теории Молоденского.

Характеристики распределения значений глобальной модели УОЛ в нулевом приближении теории Молоденского

Характеристики	УОЛ в плоскости меридиана, ξ''	УОЛ в плоскости первого вертикала, η''
Минимальное	-74,02	-63,58
Максимальное	82,34	68,06
Среднее	0,08	0,00
Диапазон	156,36	131,65

Так как в формулах (12) и (13) исходные АСТ Δg_{ce} заданы на физической поверхности Земли, то для уточнения этих формул необходимо с помощью аналитического продолжения редуцировать АСТ с физической поверхности Земли на отсчетную сферическую поверхность, используя обращенный ряд Тейлора (9). Запишем это как

$$\Delta g = \Delta g_{ce} - \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n!} (h)^n \frac{\partial^n \Delta g}{\partial h^n}, \quad (15)$$

где $n = 1, \dots, 5$ – порядок приближения теории Молоденского;

h – высота точки P на физической поверхности Земли;

$\frac{\partial^n \Delta g}{\partial h^n}$ – вертикальный градиент АСТ n -й степени.

С помощью глобальных ЦМ вертикальных градиентов АСТ (см. рис. 3) и ЦМ высот рельефа земной поверхности Earth2014 (см. рис. 2) найдены поправочные члены правой части формулы (15), которые для n приближений выражены следующим образом:

$$g_n = -\frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n \Delta g}{\partial h^n}. \quad (16)$$

Заменив значения аномалии Δg в формулах одномерного сферического БПФ (12) и (13) на g_n , получим формулы для вычисления глобальных поправочных членов в цифровой форме:

- для составляющих УОЛ в плоскости меридиана

$$\delta \xi_{\varphi_p}^n(\lambda_p) = \frac{\Delta \varphi \Delta \lambda}{4\pi \gamma_p} F_1^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\varphi_q=\varphi_1}^{\varphi_n} F_1(g_n \cos(\varphi_p)) F_1(S'_\varphi(\Delta \lambda_{pq}) \cos \alpha_{pq}) \right\}; \quad (17)$$

- для составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала

$$\delta \eta_{\varphi_p}^n(\lambda_p) = \frac{\Delta \varphi \Delta \lambda}{4\pi \gamma_p} F_1^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\varphi_q=\varphi_1}^{\varphi_n} F_1(g_n \cos(\varphi_p)) F_1(S'_\varphi(\Delta \lambda_{pq}) \sin \alpha_{pq}) \right\}. \quad (18)$$

На рис. 11 и 12 в виде картосхем представлены вычисленные по формулам (17) и (18) глобальные поправочные члены УОЛ первого, второго, третьего, четвертого и пятого приближения теории Молоденского соответственно.

В табл. 5 приведены характеристики распределения поправочных членов на земной поверхности для составляющих УОЛ в плоскости меридиана.

Т а б л и ц а 5

**Характеристики распределения поправочных членов на земной поверхности
для составляющих УОЛ в плоскости меридиана**

Поправка приближения (")					
Номер приближения	1	2	3	4	5
Минимум	–13,170	–5,717	–2,600	–0,995	–0,404
Максимум	12,530	5,710	2,481	0,912	0,325
Среднее	0,000	0,000	1,799	0,000	0,000
Диапазон	25,700	11,426	5,081	1,907	0,730

В табл. 6 приведены характеристики распределения поправочных членов на земной поверхности для составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала.

Т а б л и ц а 6

**Характеристики распределения поправочных членов на земной поверхности
для составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала**

Поправка приближения (")					
Номер приближения	1	2	3	4	5
Минимум	–14,560	–4,501	–1,683	–0,569	–0,21
Максимум	12,575	4,390	1,844	0,843	0,342
Среднее	–0,024	–0,006	–0,002	–0,001	–0,000
Диапазон	27,135	8,891	3,527	1,412	0,552

Прибавляя к рассчитанным по формулам (12) и (13) значениям нулевого приближения для составляющих УОЛ поправочные члены приближений, вычисленные по формулам (17) и (18), получим глобальные модели для составляющих УОЛ с точностью $n = 1, \dots, 5$ приближения теории Молоденского в виде следующих рядов:

$$\xi^n = \xi_0 + \delta\xi^n, \quad (19)$$

$$\eta^n = \eta_0 + \delta\eta^n, \quad (20)$$

где $n = 1, \dots, 5$ – порядок приближений.

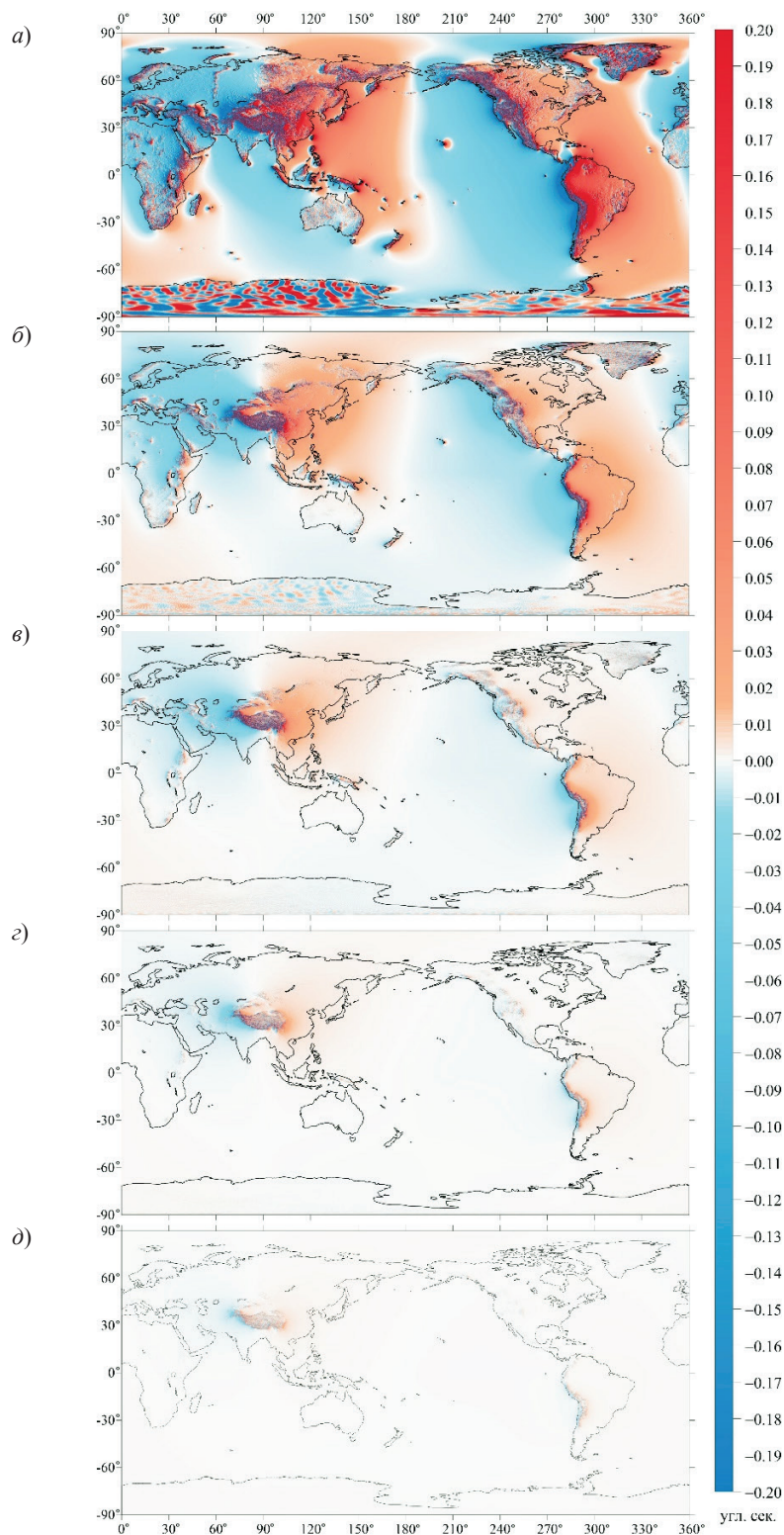


Рис. 11. Картограммы распределения поправочных членов $\delta\zeta^n$ для составляющих УОЛ в плоскости меридиана первого (а), второго (б), третьего (в), четвертого (г) и пятого (д) приближения теории Молоденского (палитра ограничена $\pm 0,2''$)

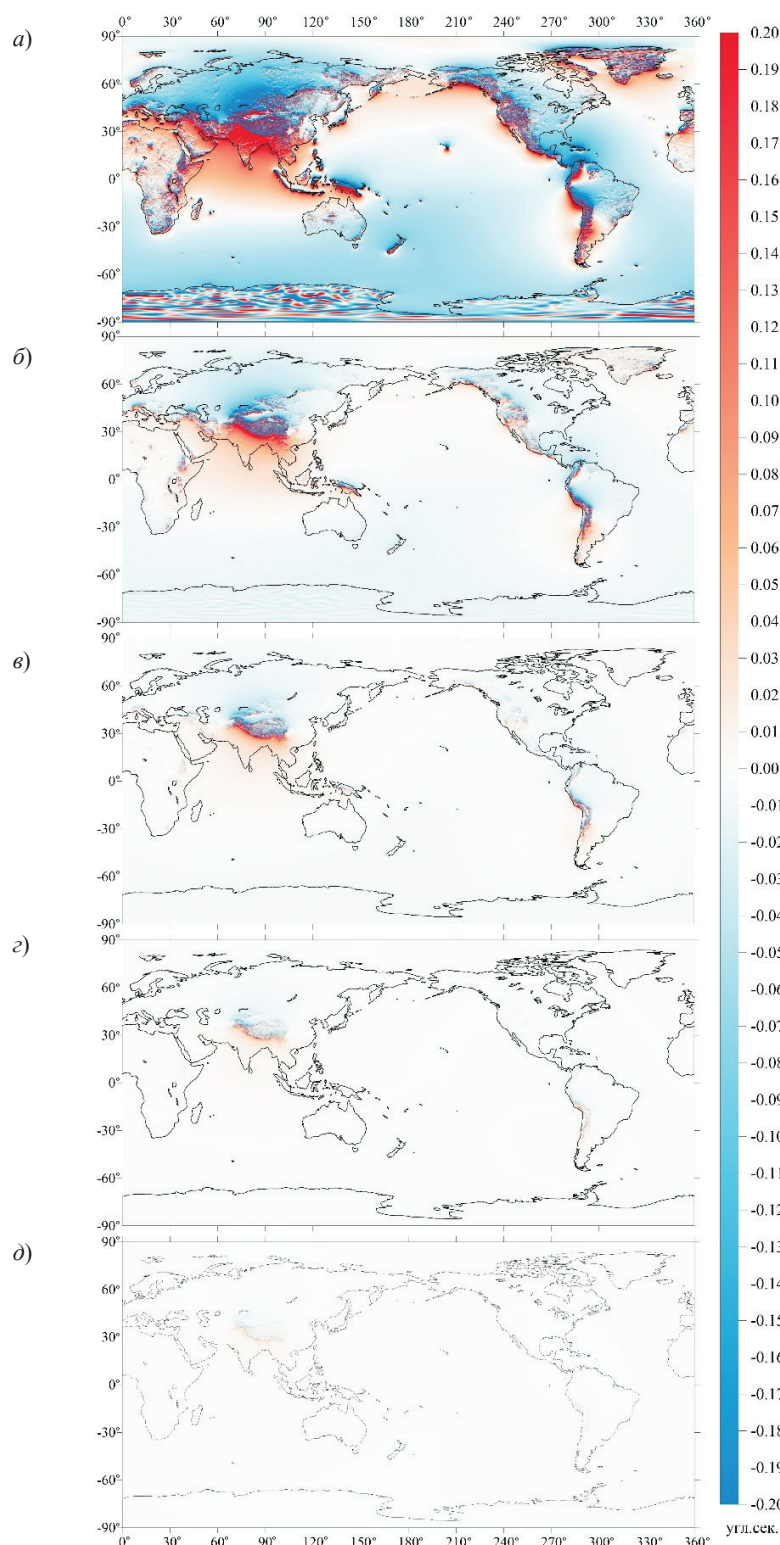


Рис. 12. Картограммы распределения поправочных членов $\delta\eta''$ для составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала первого (а), второго (б), третьего (в), четвертого (г) и пятого (д) приближения теории Молоденского (палитра ограничена $\pm 0,2''$)

Оценка точности

Точность глобальных моделей составляющих УОЛ, полученных по формулам (19) и (20), оценивалась на 303 пунктах Лапласа, расположенных на территории Западной Сибири. 250 пунктов находятся в районах с высотами менее 500 м, 53 – более 500 м. Расположение пунктов Лапласа на территории Западной Сибири показано на рис. 13.

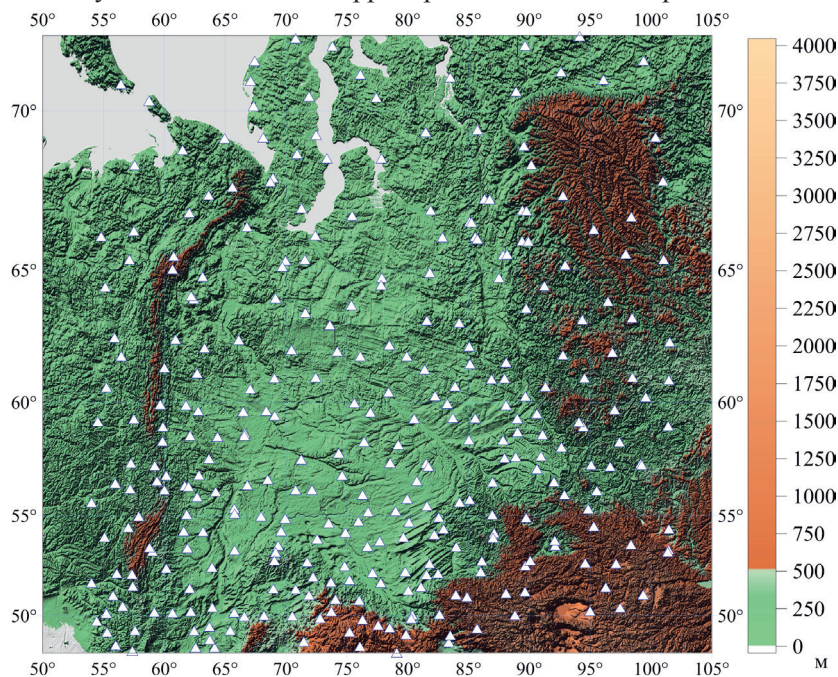


Рис. 13. Расположение пунктов Лапласа на территории Западной Сибири (зеленым цветом обозначена область с высотами менее 500 м, оранжевым – с высотами более 500 м)

В табл. 7 приведены статистические характеристики распределения разностей $\Delta\xi^n = \xi^n - \xi_{\text{АГ}}$ между значениями составляющих УОЛ в плоскости меридиана ξ^n , полученными методом аналитического продолжения по формулам (19) при степенях $n = 1, \dots, 5$ и астрономо-геодезическим методом $\xi_{\text{АГ}}$ на 303 пунктах Лапласа, расположенных в равнинных районах Западной Сибири.

Из табл. 7 видно, что на равнинной местности стандартное отклонение по сравнению с нулевым приближением теории Молоденского уменьшается в первом приближении на $0,014''$, а со второго по пятое – на $0,016''$. Так как эмпирическая статистика Колмогорова–Смирнова при $\alpha = 0,05$ удовлетворяет неравенству

$$0,085 < \frac{1,36}{\sqrt{250}} = 0,086,$$

следовательно, распределение разностей соответствует нормальному распределению.

Статистические характеристики распределения разностей $\Delta\eta^n = \eta^n - \eta_{\text{АГ}}$ между значениями составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала η^n , полученными методом аналитического продолжения по формуле (20) при степенях $n = 1, \dots, 5$ и астрономо-геодезическим методом $\eta_{\text{АГ}}$ на 303 пунктах Лапласа, расположенных в равнинных районах Западной Сибири, приведены в табл. 8.

Т а б л и ц а 7

**Статистические характеристики распределения разностей $\Delta\xi^n$
в равнинных районах Западной Сибири**

Характеристики	$n = 0$ (")	$n = 1$ (")	$n = 2$ (")	$n = 3$ (")	$n = 4$ (")	$n = 5$ (")
Количество значений	250	250	250	250	250	250
Минимум	-2,102	-2,367	-2,451	-2,478	-2,485	-2,488
Максимум	2,037	2,008	1,979	1,968	1,965	1,964
Диапазон	4,139	4,374	4,430	4,446	4,450	4,452
Среднее	0,214	0,076	0,035	0,021	0,016	0,015
Стандартное отклонение	0,7488	0,7352	0,733	0,7328	0,7326	0,7326
Асимметрия	-0,365	-0,377	-0,385	-0,387	-0,388	-0,388
Эксцесс	0,137	0,282	0,338	0,356	0,361	0,363
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,10$	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077	0,077
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,05$	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,01$	0,102	0,102	0,102	0,102	0,102	0,102

Т а б л и ц а 8

**Статистические характеристики распределения разностей $\Delta\eta^n$
в равнинных районах Западной Сибири**

Характеристики	$n = 0$ (")	$n = 1$ (")	$n = 2$ (")	$n = 3$ (")	$n = 4$ (")	$n = 5$ (")
Количество значений	250	250	250	250	250	250
Минимум	-2,213	-2,122	-2,103	-2,098	-2,097	-2,097
Максимум	1,956	1,995	2,011	2,013	2,013	2,012
Диапазон	4,169	4,117	4,114	4,111	4,110	4,109
Среднее	-0,061	-0,022	-0,009	-0,005	-0,003	-0,003
Стандартное отклонение	0,7246	0,7201	0,7212	0,7217	0,7219	0,7219
Асимметрия	-0,096	-0,083	-0,078	-0,077	-0,077	-0,077
Эксцесс	0,599	0,555	0,537	0,531	0,529	0,528
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,10$	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,05$	0,084	0,084	0,084	0,084	0,084	0,084
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,01$	0,101	0,101	0,101	0,101	0,101	0,101

Из табл. 8 видно, что среднее значение разностей $\Delta\eta^n = 0,061''$ при нулевом приближении с увеличением n -порядка уменьшилось к пятому приближению до $0,003''$. Стандартное отклонение по сравнению с нулевым приближением теории Молоденского снизилось в первом приближении на $0,0045''$, а со второго приближения начало расти.

Эмпирическая статистика Колмогорова–Смирнова при $\alpha = 0,05$ удовлетворяет неравенству

$$0,084 < \frac{1,36}{\sqrt{250}} = 0,086,$$

следовательно, распределение разностей соответствует нормальному распределению.

В табл. 9 приведены статистические характеристики распределения разностей $\Delta\xi^n = \xi^n - \xi_{\text{АГ}}$ между значениями составляющих УОЛ в плоскости меридиана ξ^n , полученных методом аналитического продолжения по формулам (19) при степенях $n = 1, \dots, 5$ и астрономо-геодезическим методом $\xi_{\text{АГ}}$ на 303 пунктах Лапласа, расположенных в горных районах Западной Сибири.

Т а б л и ц а 9

**Статистические характеристики распределения разностей $\Delta\xi^n$
в горных районах Западной Сибири**

Характеристики	$n = 0 (")$	$n = 1 (")$	$n = 2 (")$	$n = 3 (")$	$n = 4 (")$	$n = 5 (")$
Количество значений	53	53	53	53	53	53
Минимум	-2,277	-2,381	-2,414	-2,425	-2,429	-2,430
Максимум	3,316	3,088	3,054	3,042	3,038	3,037
Диапазон	5,592	5,469	5,467	5,467	5,467	5,466
Среднее	0,3351	0,1506	0,0946	0,0753	0,0693	0,0676
Стандартное отклонение	1,393	1,359	1,357	1,357	1,357	1,357
Асимметрия	0,461	0,371	0,355	0,353	0,353	0,353
Экссесс	-0,263	-0,349	-0,345	-0,343	-0,343	-0,343
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,10$	0,165	0,165	0,165	0,165	0,165	0,165
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,05$	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,01$	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22

Из табл. 9 видно, что в горной местности стандартное отклонение $\Delta\xi^n$ уменьшилось в первом приближении по сравнению с нулевым на $0,0341''$, во втором – на $0,0361''$, в третьем – на $0,0364''$, в четвертом и пятом – на $0,0365''$. Таким образом, ряд (19) численно сходится до четвертого приближения теории Молоденского.

Эмпирическая статистика Колмогорова–Смирнова при $\alpha = 0,05$ удовлетворяет неравенству

$$0,182 < \frac{1,36}{\sqrt{53}} = 0,187,$$

таким образом, распределение разностей соответствуют нормальному распределению.

В табл. 10 приведены статистические характеристики распределения разностей $\Delta\eta^n = \eta^n - \eta_{AG}$ между значениями составляющих УОЛ в плоскости меридиана η^n , полученными методом аналитического продолжения по формулам (20) при степенях $n = 1, \dots, 5$ и астрономо-геодезическим методом η_{AG} на 303 пунктах Лапласа, расположенных в горных районах Западной Сибири.

Т а б л и ц а 10

**Статистические характеристики распределения разностей $\Delta\eta^n$
в горных районах Западной Сибири**

Характеристики	$n = 0 (")$	$n = 1 (")$	$n = 2 (")$	$n = 3 (")$	$n = 4 (")$	$n = 5 (")$
Количество значений	54	54	54	54	54	54
Минимум	1,979	−1,747	−1,839	−1,857	−1,862	−1,863
Максимум	2,084	1,960	1,946	1,940	1,939	1,938
Диапазон	4,064	3,708	3,785	3,798	3,800	3,801
Среднее	0,2700	0,2484	0,2445	0,2430	0,2425	0,2424
Стандартное отклонение	0,950	0,950	0,949	0,949	0,949	0,949
Асимметрия	−0,173	−0,317	−0,345	−0,349	−0,35	−0,35
Экссесс	−0,451	−0,643	−0,618	−0,609	−0,607	−0,606
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,10$	0,164	0,164	0,164	0,164	0,164	0,164
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,05$	0,182	0,182	0,182	0,182	0,182	0,182
Статистика Колмогорова–Смирнова, $\alpha = 0,01$	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218

Из табл. 10 видно, что в горных районах стандартное отклонение в первом приближении по сравнению с нулевым увеличилось на $0,0001''$, во втором уменьшилось на $0,0006''$, в третьем не изменилось, в четвертом и пятом увеличилось на $0,0005''$.

Так как эмпирическая статистика Колмогорова–Смирнова при $\alpha = 0,05$ удовлетворяет неравенству

$$0,182 < \frac{1,36}{\sqrt{54}} = 0,185,$$

то распределение разностей $\Delta\eta^n$ соответствует нормальному распределению.

Заключение

При реализации градиентного решения до пятого приближения теории Молоденского для определения высот квазигеоида и составляющих УОЛ с помощью аналитического продолжения АСТ в свободном воздухе с физической поверхности Земли к отсчетной сферической поверхности получены:

- глобальные цифровые модели вертикальных градиентов АСТ до пятого приближения;
- глобальные поправочные члены для высот квазигеоида и УОЛ первого, второго, третьего, четвертого и пятого приближения теории Молоденского;
- уточненные глобальные модели высот квазигеоида и УОЛ за счет добавления к формуле Стокса поправочных членов n -го приближения теории Молоденского;
- статистические параметры распределения разностей между уточненными высотами квазигеоида в n -приближениях и высотами квазигеоида, полученными путем ГНСС-нивелирования, на равнинном участке с высотами до 300 м и на горном участке с высотами около 900 м;
- статистические параметры распределения разностей между уточненными УОЛ в n -приближениях и астрономо-геодезическими УОЛ на пунктах Лапласа, расположенных в равнинных районах с высотами до 500 м и в районах с высотами более 500 м.

Анализ приведенных в статье результатов уточнения глобальных характеристик гравитационного поля Земли до пятого приближения теории Молоденского на основании аналитического продолжения вниз позволил сделать следующие выводы:

- при уточнении высот квазигеоида по формуле Стокса в равнинных районах Западной Сибири достаточно второго приближения теории Молоденского;
- при уточнении высот квазигеоида по формуле Стокса в горных районах Западной Сибири благодаря поправкам Молоденского до четвертого порядка точность вычисления возросла почти в четыре раза;
- при вычислении составляющих УОЛ по формулам Венинг-Мейнеса на равнинной местности стандартная погрешность составляющих УОЛ в плоскости меридиана уменьшается при втором приближении и не изменяется для остальных приближений;
- для составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала стандартная погрешность в первом приближении уменьшается, а начиная со второго увеличивается;
- в горных районах стандартное отклонение составляющих УОЛ в плоскости меридиана уменьшается до четвертого приближения;
- в горных районах стандартное отклонение составляющих УОЛ в плоскости первого вертикала в первом приближении по сравнению с нулевым увеличивается на $0,0001''$, во втором уменьшается на $0,0006''$, в третьем изменения не зафиксированы, в четвертом и пятом отмечается увеличение на $0,0005''$.

Таким образом, аналитическое продолжение АСТ с физической поверхности Земли к отсчетной сфере позволяет уточнить глобальные характеристики гравитационного поля Земли.

Исследование выполнено в рамках СЧ НИР «ГЕОТЕХ-КВАНТ-3» с целью создания высокоточных моделей геопотенциального поля Земли и его характеристик на территории РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.В. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Труды ЦНИИГАиК. 1960. Вып. 131. 250 с.
2. Бровар В.В. О решениях краевой задачи Молоденского // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1963. Вып. 4. С. 129–137.
3. Sansò, F., Sideris M., Geodetic Boundary Value Problem: the Equivalence between Molodensky's and Helmert's Solutions, *Springer Briefs in Earth Sciences*, 2017, 81 p., doi: 10.1007/978-3-319-46358-2.
4. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy, Geodaetisk institut, Meddelelse, 1969, no. 44, 80 p.
5. Heiskanen, W.A., Moritz, H., *Physical geodesy*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1967, 364 p.
6. Ecker, E., Über die Äquivalenz von Lösungen des geodätischen Randwert-problems, *Österr. Z. Vermessungswesen*, 1971, no. 59, pp. 97–105.
7. Пеллинен Л.П. О тождественности различных решений задачи Молоденского // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1974. Вып. 3. С. 65–71.
8. Марыч М.И. О решении задачи Молоденского с помощью ряда Тейлора // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1973. № 17. С. 26–33.
9. Valko, M., Mojzeš, M., Janák, J., Papo, J., Comparison of two different solutions to Molodensky's G 1 term, *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2008, vol. 52, pp. 71–86, doi: 10.1007/S11200-008-0006-2.
10. Gad, M.A.H., Odalović, O., Naod, S., Possibility to determine highly precise geoid for Egypt territory, *Geodetski vestnik*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 578–593, doi: 10.15292/geodetski-vestnik.2020.04.578-593.
11. Канушин В.Ф., Ганагина И.Г., Голдобин Д.Н., Инжеватов И.А. Определение вертикального градиента аномалий силы тяжести методом численного дифференцирования // Международный научно-исследовательский журнал. 2024. № 9 (147). DOI: 10.60797/IRJ.2024.147.21.
12. Канушин В.Ф., Голдобин Д.Н., Ганагина И.Г. и др. Методы вычисления второго вертикального градиента аномалий силы тяжести // Международный научно-исследовательский журнал. 2025. №6 (156). DOI: 10.60797/IRJ.2025.156.81.
13. Bruns, H., *Die Figur der Erde*, Publication des Königlich Preussischen geodätischen Institutes, 1878, 49 p.
14. Schwarz, K.P., Sideris, M.G., Forsberg, R., The Use of FFT Techniques in Physical Geodesy, *Geophysical Journal International*, 1990, no. 100, pp. 485–514, doi:10.1111/j.1365-246X.1990.tb00701.x.
15. Van Hees, G.L.S., Stokes formula using Fast Fourier Techniques, *Determination of the Geoid. International Association of Geodesy Symposia*, 1991, vol. 106, Springer, New York, NY, doi:10.1007/978-1-4612-3104-2_47.
16. Haagmans, R., de Mln, E., van Gelderen, M., Fast evaluation of convolution Integrals on the sphere using 1D-FFT, and a comparison with existing methods for Stokes integra, *Manuscripta Geodaetica*, 1993, vol. 18, pp. 82–90.
17. Мориц Г. Современная физическая геодезия. Москва: Недра, 1983. 392 с.
18. Канушин В.Ф., Карпик А.П., Ганагина И.Г., Голдобин Д.Н., Косарев Н.С., Косарева А.М. Исследование современных глобальных моделей гравитационного поля Земли: монография. Новосибирск: СГУГиТ, 2015. 270 с.
19. Hirt, C., Rexer, M., Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models – available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics, *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 2015, no. 39, pp. 103–112, doi: 10.1016/j.jag.2015.03.001.
20. Голдобин Д.Н., Канушин В.Ф., Ганагина И.Г., Инжеватов И.А. Применение градиентного решения третьего порядка для построения глобальной модели квазигеоида // Альманах современной метрологии. Сб. матер. III Научно-техн. конф. «Методы и средства навигации по геофизическим полям», 22–23 октября 2024 г., ФГУП «ВНИИФТРИ». 2025. №1 (41). С. 161–169.
21. Карпик А.П., Сапожников Г.А., Дюбанов А.В. Реализация проекта наземной инфраструктуры глобальной навигационной спутниковой системы «ГЛОНАСС» на территории Новосибирской области // Сб. матер. VI Междунар. конгр. «ГЕО-Сибирь-2010». Новосибирск, 2010. С. 54–59.
22. Карпик А.П., Середович С.В., Твердовский О.В., Решетов А.П. Научно-технический отчет по созданию на территории НСО наземной инфраструктуры для обеспечения эффективного использования глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС. Новосибирск, 2010.
23. Косарев Н.С., Канушин В.Ф., Кафтан В.И., Ганагина И.Г., Голдобин Д.Н., Ефимов Г.Н. О результатах сравнения определения уклонов отвесной линии на территории Западной Сибири // Гироскопия и навигация. 2017. Т. 25. №4 (99). С. 72–83.

Kanushin, V.F., Goldobin, D.N., Ganagina, I.G., and Inzhevatov, I.A. (Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk)

Clarifying the Global Characteristics of the Earth's Gravitational Field to the Fifth Approximation of Molodensky's Theory Based on Analytic Continuation, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2025, vol. 33, no. 3 (130), pp. 65–87.

Abstract. The global characteristics of the Earth's gravity field are refined to the fifth approximation of Molodensky's theory. The calculations were based on the analytical continuation of free-air gravity anomalies from the Earth's physical surface to the reference spherical surface passing through the calculated point, using a Taylor series. Maps of digital global models of gravity anomaly vertical gradients to the fifth order are presented, and global correction terms are obtained for quasigeoid heights and deflections of the vertical (DOV) for the first, second, third, fourth, and fifth approximations of Molodensky's theory.

It is shown that the gradient solution makes it possible to refine the global characteristics of the Earth's gravity field. When refining quasigeoid heights using the Stokes formula, the second approximation of Molodensky's theory is sufficient for plains, while for mountainous areas, the fourth one. When refining the DOV components in the plane of the meridian and the first vertical, the standard error increases from the second approximation.

Key words: quasigeoid height, DOV components, gravity anomalies, vertical gradients of gravity anomalies, Earth's relief, Taylor series, GNSS leveling, astronomical and geodetic DOV, fast Fourier transform.

Материал поступил 05.08.2025