

Ю. ВУ, Ю. А. ЛИТМАНОВИЧ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ ОРИЕНТАЦИИ В БИНС: СРАВНЕНИЕ ТРАДИЦИОННЫХ ПОДХОДОВ И МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИТЕРАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Существуют два основных метода численного интегрирования дифференциальных уравнений, лежащих в основе алгоритмов определения угловой ориентации БИНС: метод, основанный на разложении решения в ряд Тейлора, и метод последовательных приближений Пикара. Метод Пикара недавно был реализован одним из авторов в рекурсивной форме с использованием аппроксимации решения уравнений ориентации полиномами Чебышева и получил название «метода функционального итеративного интегрирования» (*functional iterative integration approach*). В отличие от традиционных подходов данный метод позволяет получить численное решение кинематических уравнений без общепринятых упрощений исходного дифференциального уравнения. В статье указанный метод детально сравнивается с традиционными алгоритмами ориентации для произвольного количества тактов (шагов) опроса датчиков, что потребовало их модернизации за счет использования разложения в ряд Тейлора точного решения дифференциального уравнения и рекурсивного вычисления высших производных параметра ориентации. Для полноты сравнения метод функционального итеративного интегрирования был также реализован на обычных степенных полиномах. Эти два подхода рассматриваются применительно к кватерниону ориентации, хотя все сделанные выводы справедливы и для других кинематических параметров.

Представлены результаты численного моделирования алгоритмов в условиях конического движения, позволяющие установить диапазон его относительных частот, в котором новые алгоритмы имеют преимущество по точности и устойчивости по сравнению с подходами, основанными на использовании обычных степенных полиномов.

Ключевые слова: функциональное итеративное интегрирование, коническое движение, кватернион ориентации.

I. Введение

Информация об угловом положении критически важна для подвижных объектов в различных областях, включая навигацию и управление необитаемыми подвижными объектами, виртуальную реальность, спутниковую связь, робототехнику и ком-

Ву Юансинь. Профессор, Институт электротехники и информатики, Университет Чжао Тонг (Шанхай, Китай).

Литманович Юрий Аронович. Доктор технических наук, начальник отдела, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (Санкт-Петербург). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

пьютерное зрение [1]. Определение ориентации путем интегрирования измеренной гироскопами угловой скорости является естественным и полностью автономным способом получения искомой информации об ориентации [2–5]. При решении данной задачи используют различные параметры ориентации, в том числе углы Эйлера, вектор ориентации, матрицу направляющих косинусов, кватернион и др. Вычисление угловой ориентации сводится к численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в указанных параметрах. На раннем этапе разработки БИНС П. Сэвадж [6] использовал итеративный метод Пикара для интегрирования дифференциального уравнения для матрицы направляющих косинусов, а в техническом отчете NASA [7] описано применение полиномиальной аппроксимации угловой скорости по последовательности выходных сигналов гироскопов с последующим интегрированием производной матрицы направляющих косинусов методом Рунге–Кутты. Вскоре после этого, в 1970-х годах, на основе разложения в ряд Тейлора в работах Дж.У. Джордана и Дж.Э. Бортца [8, 9] была получена структура современных алгоритмов ориентации, которая базировалась исключительно на приближенном решении для вектора ориентации, используемого для обновления выходных параметров ориентации [10–17]. В основополагающей статье Р. Миллера [10] использовались ряды Тейлора малой размерности для аппроксимации решения для вектора как ориентации, так и угловой скорости на такте решения задачи. Совсем недавно при непосредственном решении уравнения для матрицы направляющих косинусов [18] был применен подход, основанный на разложении в ряд Тейлора (ранее он был описан в [7]). В фундаментальной книге 1970-х В.Н. Бранца и И.П. Шмыглевского [19] ряды Тейлора использовались при решении уравнения для вектора ориентации, а метод последовательных приближений Пикара – для кватерниона. Такие же подходы были применены и А.П. Пановым при выводе и анализе многошаговых алгоритмов, которые позднее были им обобщены в [20]. Параллельно с этим преимущественно кватернионы использовались для определения ориентации в других областях, а именно в робототехнике [21, 22], космических приложениях [23] и вычислительной математике [24–26], для которых характерны геометрические подходы к интегрированию.

Одним из активно развиваемых направлений в области алгоритмов БИНС была их оптимизация для специальных видов движения путем выбора значений их параметров (без изменения структуры) с целью уменьшения вычислительного дрейфа, возникающего при классическом или обобщенном коническом движении, регулярной прецессии или случайном угловом движении. Оптимизация алгоритмов основывалась либо на сравнении аналитических выражений для искомого вектора ориентации и векторных произведений выходных сигналов на разных шагах опроса в условиях конического движения [10–12, 17, 27–30], либо на учете в общем решении для вектора ориентации, выраженного через производные угловой скорости, конечных соотношений, связывающих разные производные в условиях конического движения [10–12, 17, 27–29]. Недостатком оптимизации является то, что при нерегулярных угловых движениях (например, маневрах) оптимизированные алгоритмы уступают по точности соответствующим общим (неоптимизированным) [16]. Разумеется, желательно, чтобы при фиксированном числе используемых выходных сигналов гороскопов максимально возможная точность алгоритма достигалась при любых видах углового движения. Данным свойством обладают алгоритмы, использующие в качестве входных величин приращенные кратных интегралов от угловой скорости [31].

С тем чтобы создать алгоритмы, учитывающие наличие в выходных сигналах гироскопов инструментальные шумы, были проведены специальные исследования. Были разработаны два альтернативных подхода для уменьшения так называемых псевдоколических погрешностей, которые могут возникать в этих условиях. Один из них направлен на придание алгоритмам ориентации сглаживающих свойств благодаря получению оценок параметров полиномиальной модели угловой скорости по методу наименьших квадратов за счет использования дополнительных выходных сигналов гироскопов в форме кратных интегралов от угловой скорости на такте опроса [31]. Другой сводится к специальной настройке (выбору коэффициентов) традиционного алгоритма с учетом частотных искажений, вносимых в полезный сигнал предварительной цифровой фильтрацией, используемой для подавления шумов датчиков [5, 32].

Принято считать, что существующие алгоритмы ориентации полностью удовлетворяют требованиям, характерным для большинства задач [13, 15, 33]. Тем не менее новые высокодинамичные приложения и будущие потенциально более точные гироскопы [34, 35] могут потребовать разработки и более точных алгоритмов, поскольку, с одной стороны, на практике частота опроса гироскопов ограничена, с другой – современные алгоритмы имеют принципиально приближенный характер. Так, например, в [36] подчеркивается, что традиционные алгоритмы, которые пренебрегают третьим членом в дифференциальном уравнении для вектора ориентации, могут существенно потерять в точности, поэтому предлагается усовершенствовать алгоритм для высокодинамичных режимов движения. Это противоречит сверхоптимистичному мнению, что существующие алгоритмы намного опережают по точности все мыслимые приложения [33]. Последние публикации [18, 37–42, 60] подтверждают, что более высокая точность определения ориентации может быть достигнута за счет использования более точных решений для параметров ориентации и более точных методов численного интегрирования [43–45]. Так, в [29, 46] была произведена оценка влияния обычно отбрасываемого третьего члена в выражении для производной вектора ориентации, частично он был учтен при выводе алгоритма с целью достижения более высокой точности для динамичных объектов [31, 38, 47].

Недавно первым автором данной статьи был предложен подход, названный методом функционального итеративного интегрирования (functional iterative integration approach, МФИИ), который в итеративной форме реализует метод последовательных приближений Пикара точного решения линейного дифференциального уравнения для вектора Родрига и кватерниона при использовании аппроксимаций полиномами Чебышева [39–41]. В последующем этот подход был развит для решения в БИНС задачи навигации [48–51]. Позднее обнаружилось, что он близок к так называемому методу Пикара–Чебышева, который был известен с 1960-х годов [52].

Необходимо отметить, что неотъемлемой частью обоих подходов является полиномиальная аппроксимация угловой скорости по последовательности выходных сигналов гироскопов, реализуемая непосредственно или косвенно [7, 10, 16, 29, 31, 43, 44], которая определяет вторую составляющую погрешности определения параметров ориентации (первая, как отмечалось выше, обусловлена погрешностью численных методов решения исходного дифференциального уравнения для параметра ориентации). Везде в статье будем полагать, что выходными сигналами гироскопов являются угловая скорость или первый интеграл от нее, хотя могут быть использованы и кратные интегралы от угловой скорости (как это сделано в [29, 31, 53]).

Настоящая статья появилась в результате длительной дискуссии авторов относительно истинных преимуществ МФИИ по сравнению с традиционными подходами. Для проведения полноценного сравнительного исследования потребовалось модернизировать традиционные алгоритмы, применив разложение в ряд Тейлора точного решения дифференциального уравнения и рекурсивное вычисление высших производных параметра ориентации, а МФИИ реализовать также и на обычных степенных полиномах. Аспект, связанный с вычислительной реализацией рассмотренных алгоритмов, здесь не рассматривается, поскольку рекурсивная (циклическая) форма алгоритмов позволяет реализовать их на аппаратном уровне (в ПЛИС).

В целях краткости изложения два подхода рассматриваются применительно к кватерниону ориентации, хотя все сделанные выводы справедливы и для других кинематических параметров [54]. Статья имеет следующую структуру: в разделе II кратко излагается математическая постановка основных подходов к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно разложения в ряд Тейлора и метода последовательных приближений Пикара (МФИИ); раздел III посвящен аппроксимации угловой скорости обычными степенными полиномами и полиномами Чебышева; в разделе IV приводятся результаты применения указанных подходов для решения кинематического уравнения для кватерниона ориентации. Причина, почему МФИИ был применен не только для полиномов Чебышева, но и для обычных степенных полиномов, заключается в том, что традиционные алгоритмы при разложении в ряд Тейлора используют именно степенные полиномы. Благодаря этому удалось получить более полную оценку МФИИ по сравнению с традиционным разложением в ряд Тейлора. В разделе V по результатам численного моделирования дается сравнительная оценка точности рассматриваемых алгоритмов в условиях классического конического движения. В заключительном разделе приводятся выводы по результатам проведенных исследований.

II. Общие подходы к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим без потери общности обыкновенное дифференциальное уравнение на интервале времени $[0 \ t]$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ – бесконечно гладкая функция с начальным значением $\mathbf{y}(0)$.

Решение (1) может быть получено в виде ряда Тейлора в окрестности точки $t = 0$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \dot{\mathbf{y}}(0)t + \ddot{\mathbf{y}}(0)\frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{y}^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!}, \quad (2)$$

где $\mathbf{y}^{(j)}(0) = \mathbf{y}^{(j)}(t)|_{t=0}$, т.е. значение j -й производной при $t = 0$. Данный ряд бесконечен, а удерживая члены вплоть до m -го порядка, получим следующую аппроксимацию [43]:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{y}^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!} + \mathbf{y}^{(m+1)}(\varsigma) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, \quad \varsigma \in [0 \ t]. \quad (3)$$

Второй член в правой части характеризует погрешность аппроксимации m -го порядка. Обычно считается, что вычисление производных высокого порядка весьма трудоемко и требует больших временных затрат, хотя в принципе это не сложно [43]. Действительно, общим для этих производных является то, что необходимо знать их значения только в точке $t = 0$, а знание их аналитических выражений не требуется. Значения высших производных могут быть вычислены рекурсивно с использованием правил для элементарных функций [44, 55]. Так, например, пусть $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{y}(t) \mathbf{u}(t)$, тогда

$$\mathbf{y}^{(j)}(0) = (\mathbf{y}(t) \mathbf{u}(t))^{(j-1)} \Big|_{t=0} = (\dot{\mathbf{y}}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{y}(t) \dot{\mathbf{u}}(t))^{(j-2)} \Big|_{t=0} = \dots = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \mathbf{y}^{(i)}(0) \mathbf{u}^{(j-1-i)}(0),$$

где $\binom{m}{k}$ – количество комбинаций из m по k . Это означает, что производные высокого порядка в некоторый момент могут быть выражены через производные более низкого порядка в тот же момент, что определяет экономичный способ вычисления аппроксимации рядом Тейлора [44, 55].

Альтернативное решение уравнения (1) может быть получено методом последовательных приближений Пикара в виде функционального итеративного интегрирования [55]

$$\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}_{j-1}(t), t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где значение функции в начальной точке интервала интегрирования может быть принято равным нулю: $\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{y}(0)$. Можно доказать, что разность между $(m-1)$ -й и m -й итерациями [55]

$$\|\mathbf{y}_m(t) - \mathbf{y}_{m-1}(t)\| \leq W L^{m-1} \frac{t^m}{m!}, \quad (5)$$

если функция $\mathbf{f}$ ограничена W , а именно $W = \max_{\tau \in [0, t]} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)\|$, и удовлетворяет условию непрерывности Липшица $\|\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{z}, t)\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$. Правая часть (5) представляет собой с точностью до сомножителя член ряда Тейлора в разложении функции e^{Lt} . Согласно М-тесту Вейерштрасса [56], приведенная ранее последовательность $\{\mathbf{y}_j\}_{j=0}^{\infty}$ равномерно сходится к истинному значению. Практический недостаток (4) заключается в необходимости повторяющихся вычислений интегралов. Впервые он был преодолен, насколько нам известно, благодаря аппроксимации функции $\mathbf{f}$ полиномами Чебышева [52]. Разумеется, могут быть использованы и обычные степенные полиномы.

Следует подчеркнуть, что результат аппроксимации рядом Тейлора является по сути обычным полиномом, в то время как метод итераций Пикара в (4) может быть использован с полиномами любого вида.

III. Полиномиальная аппроксимация угловой скорости по информации гироскопов

Представленные в предыдущем разделе подходы подразумевают, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ задана аналитически, но в рассматриваемой задаче определения угловой ори-

ентации доступны лишь дискретные выходные сигналы гироскопов, вырабатываемые с некоторым фиксированным тактом. Общепринятым является использование полиномиальной аппроксимация угловой скорости по сигналам гироскопов [7, 10, 16, 29, 31, 43, 44]. Основное содержание данного раздела заимствовано из [39–41] и воспроизводится здесь для удобства восприятия последующего материала.

Пусть дискретные измерения угловой скорости ω_k или приращений интеграла от нее (квазиординат) $\Delta\theta_k$ вырабатываются триадой гироскопов (датчиков угловой скорости) в моменты времени $t_k = kT$ ($k = 1, 2, \dots, N$), где T обозначает такт опроса.

Обычные степенные полиномы

Вектор угловой скорости может быть аппроксимирован на интервале времени $[0, t]$ степенным полиномом в виде

$$\omega(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i t^i, \quad n \leq N-1, \quad (6)$$

где коэффициенты $\mathbf{d}_i$ могут быть определены по дискретным измерениям угловой скорости или квазиординат в моменты времени $t_k = kT$. Производные аппроксимируемой угловой скорости связаны с коэффициентами $\mathbf{d}_i$ соотношением $\omega^{(j)}(0) = j! \mathbf{d}_j$ для $j \leq n$.

Для варианта измерения угловой скорости коэффициенты $\mathbf{d}_i$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_N & \dots & t_N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^T \\ \mathbf{d}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_N^T \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Если выходными сигналами гироскопов являются квазиординаты, то коэффициенты удовлетворяют уравнению

$$\begin{bmatrix} t_1 & \frac{t_1^2}{2} & \dots & \frac{t_1^{n+1}}{n+1} \\ t_2 - t_1 & \frac{t_2^2 - t_1^2}{2} & \dots & \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_N - t_{N-1} & \frac{t_N^2 - t_{N-1}^2}{2} & \dots & \frac{t_N^{n+1} - t_{N-1}^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^T \\ \mathbf{d}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^T \\ \Delta\theta_2^T \\ \vdots \\ \Delta\theta_N^T \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева являются последовательностью базиса ортогональных полиномов и имеют лучшую численную стабильность, чем степенные полиномы [45]. Полиномы Чебышева первого рода определяются на интервале $[-1, 1]$ следующим рекурсивным соотношением:

$$F_0(x) = 1, F_1(x) = x, F_{i+1}(x) = 2xF_i(x) - F_{i-1}(x), \quad (9)$$

где $F_i(x)$ – полиномы Чебышева первого рода i -го порядка. Для произвольных $j, k \geq 0$, полиномы Чебышева первого рода удовлетворяют следующему равенству [45]:

$$F_j(\tau)F_k(\tau) = \frac{1}{2}(F_{j+k}(\tau) + F_{|j-k|}(\tau)). \quad (10)$$

Для того чтобы применить полиномы Чебышева, от интервала времени $t \in [0, t_N]$ следует перейти к интервалу $[-1, 1]$ за счет следующей замены переменных (t на τ): $t = (1+\tau)t_N/2$. Тогда для аппроксимации угловой скорости полиномами Чебышева получим

$$\omega(\tau) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i F_i(\tau), \quad n \leq N-1. \quad (11)$$

Для варианта измерения угловой скорости коэффициенты $\mathbf{c}_i$ могут быть получены из решения следующего уравнения:

$$\begin{bmatrix} 1 & F_1(\tau_1) & \dots & F_n(\tau_1) \\ 1 & F_1(\tau_2) & \dots & F_n(\tau_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_1(\tau_N) & \dots & F_n(\tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^T \\ \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_N^T \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Согласно интегральному свойству полиномов Чебышева [45] имеем:

$$G_{i, [\tau_{k-1}, \tau_k]} \triangleq \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F_i(\tau) d\tau = \begin{cases} \left(\frac{iF_{i+1}(\tau_k)}{i^2-1} - \frac{\tau_k F_i(\tau_k)}{i-1} \right) - \left(\frac{iF_{i+1}(\tau_{k-1})}{i^2-1} - \frac{\tau_{k-1} F_i(\tau_{k-1})}{i-1} \right), & i \neq 1 \\ \frac{\tau_k^2 - \tau_{k-1}^2}{2}, & i = 1 \end{cases}. \quad (13)$$

В соответствии с (11) и (13) квазиординаты связаны через коэффициенты $\mathbf{c}_i$ с интегралами от полиномов Чебышева следующим образом:

$$\Delta \theta_{i_k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega dt = \frac{t_N}{2} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \omega d\tau = \frac{t_N}{2} \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F_i(\tau) d\tau = \frac{t_N}{2} \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i G_{i, [\tau_{k-1}, \tau_k]}. \quad (14)$$

Тогда эти коэффициенты могут быть определены как решение следующего уравнения:

$$\begin{bmatrix} G_{0, [\tau_0, \tau_1]} & G_{1, [\tau_0, \tau_1]} & \dots & G_{n, [\tau_0, \tau_1]} \\ G_{0, [\tau_1, \tau_2]} & G_{1, [\tau_1, \tau_2]} & \dots & G_{n, [\tau_1, \tau_2]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{0, [\tau_{N-1}, \tau_N]} & G_{1, [\tau_{N-1}, \tau_N]} & \dots & G_{n, [\tau_{N-1}, \tau_N]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^T \\ \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^T \end{bmatrix} = \frac{2}{t_N} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1^T \\ \Delta \theta_2^T \\ \vdots \\ \Delta \theta_N^T \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Решение линейных уравнений (7), (8), (12) и (15) может быть получено методом наименьших квадратов.

IV. Вывод алгоритмов ориентации с помощью методов разложения в ряд Тейлора и функционального итеративного интегрирования

В этом разделе в общем виде получены алгоритмы решения кинематического уравнения для кватерниона ориентации с использованием как метода разложения

в ряд Тейлора, так и МФИИ. Последний в комбинации с полиномами Чебышева был представлен в работах [39–41], а позднее и в [51] применительно к алгоритмам навигации БИНС, включая вычисление скорости и координат места. Данный подход может быть использован и для других кинематических параметров, в том числе для вектора ориентации и вектора Родрига, при этом нет необходимости прибегать к упрощению исходных дифференциальных уравнений для этих параметров (см. [54]).

Алгоритм, основанный на разложении в ряд Тейлора (QuatTaylor)

Кинематическое уравнение для кватерниона ориентации имеет следующий вид [3, 19, 57]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega}. \quad (16)$$

Кватернион ориентации $\mathbf{q}$ представляет единичный четырехмерный вектор-столбец $\mathbf{q} = [s \ \boldsymbol{\eta}^T]^T$, где s – скалярная часть, а $\boldsymbol{\eta}$ – векторная часть кватерниона. Если скалярную и векторную части кватерниона рассматривать как скалярный и векторный кватернионы соответственно, то кватернион можно представить в виде суммы двух кватернионов: $\mathbf{q} = s + \boldsymbol{\eta}$. Произведение двух кватернионов определяется как

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} s_1 & -\boldsymbol{\eta}_1^T \\ \boldsymbol{\eta}_1 & s_1 \mathbf{I}_3 + \boldsymbol{\eta}_1 \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 s_2 - \boldsymbol{\eta}_1^T \boldsymbol{\eta}_2 \\ s_1 \boldsymbol{\eta}_2 + s_2 \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_1 \times \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix}.$$

Обозначив ось Эйлера вращения и углов поворота вокруг этой оси как $\mathbf{e}$ и α соответственно, можем представить кватернион в виде $\mathbf{q} = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\alpha}{2}$; $\boldsymbol{\omega}$ представляет собой векторный кватернион угловой скорости с нулевой скалярной частью, сформированный трехмерным вектором угловой скорости.

Производная кватерниона j -го порядка может быть вычислена рекурсивно следующим образом:

$$\mathbf{q}^{(j)}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega})^{(j-1)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \mathbf{q}^{(j-1-i)}(0) \circ \boldsymbol{\omega}^{(i)}(0). \quad (17)$$

Конкретные выражения имеют вид:

$$\mathbf{q}^{(0)}(0) = \mathbf{q}(0), \quad \mathbf{q}^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \mathbf{q}(0) \circ \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{q}^{(2)}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^{(1)}(0) \circ \mathbf{d}_0 + \mathbf{q}^{(0)}(0) \circ \mathbf{d}_1) \text{ и т.д.}$$

Решение уравнения (16) с учетом аппроксимации (3) рядом Тейлора можно записать в явном виде:

$$\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \mathbf{q}^{(j-1-i)}(0) \circ \boldsymbol{\omega}^{(i)}(0) \right) \frac{t^j}{j!}. \quad (18)$$

Следует заметить, что аппроксимация рядом Тейлора в (18) является степенным полиномом от времени, воспроизводящим характер изменения угловой ориентации на интервале $[t_0 \ t_N]$, на котором зафиксированы N выходных сигналов гироскопов, т.е. в плане реализации обладает преимуществами, присущими алгоритмам, полученным МФИИ [16, 43, 44].

*Алгоритм, основанный на функциональном итеративном интегрировании
с использованием степенных полиномов (QuatFIter-np¹)*

Решение уравнения для кватерниона можно получить, подставив полином для угловой скорости (6) в выражение (4) для МФИИ с учетом вида исходного дифференциального уравнения (16):

$$\mathbf{q}_j(t) = \mathbf{q}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{q}_{j-1} \circ \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{q}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{q}_{j-1}(t) \circ \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i t^i dt, \quad j = 1, 2, \dots \quad (19)$$

В явном виде имеем:

$$\mathbf{q}_0(t) = \mathbf{q}(0), \quad \mathbf{q}_1(t) = \mathbf{q}(0) + \frac{1}{2} \mathbf{q}(0) \circ \sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{d}_i}{i+1} t^{i+1} \text{ и т.д.}$$

Если оценку кватерниона ориентации на $(j-1)$ -ой итерации представить в виде степенного полинома порядка m_{j-1} , т.е.

$$\mathbf{q}_{j-1}(t) = \sum_{k=0}^{m_{j-1}} \mathbf{b}_{j-1,k} t^k,$$

то после подстановки в (19) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j(t) &= \mathbf{q}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k=0}^{m_{j-1}} \mathbf{b}_{j-1,k} t^k \circ \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i t^i dt \\ &= \mathbf{q}(t_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_{j-1}} \sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{b}_{j-1,k} \circ \mathbf{d}_i}{k+i+1} t^{k+i+1}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Можно заметить, что порядок полинома для кватерниона быстро растет согласно правилу $m_j = m_{j-1} + n + 1$.

Заметим, что (20) может вычисляться итеративно только путем уточнения (расчета) на каждой итерации коэффициентов степенного полинома с усечением его порядка, чтобы избежать его быстрого роста, как сделано в [43]. Порядок усечения полинома, обозначенный далее как m_T , также характеризует наивысший порядок производной в алгоритме, основанном на разложении в ряд Тейлора. Количество необходимых итераций можно контролировать по достижении некоторого предварительно заданного максимального числа или некоторого критерия остановки итеративного процесса, приведенного ниже.

*Алгоритм, основанный на функциональном итеративном интегрировании
с использованием полиномов Чебышева (QuatFIter)*

Решение уравнения для кватерниона можно получить, подставив полином для угловой скорости (11) в выражение (4) для МФИИ с учетом (16). Оно имеет следующий вид [41]:

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{q}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{q}_{j-1} \circ \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{q}(0) + \frac{t_N}{4} \int_{-1}^1 \mathbf{q}_{j-1} \circ \boldsymbol{\omega} d\tau. \quad (21)$$

¹ Аббревиатура *FIter* является сокращением названия метода *Functional Iterative Integration*; *np* используется для конкретизации того, что этот метод применен для обычных степенных полиномов (normal polynomial).

Если и ω , и оценку кватерниона на $(j-1)$ -ой итерации представить в виде взвешенной суммы полиномов Чебышева

$$\mathbf{q}_j \triangleq \sum_{k=0}^{m_{j-1}} \mathbf{b}_{j-1,k} F_k(\tau),$$

где m_{j-1} – максимальный порядок и $\mathbf{b}_{j-1,k}$ – коэффициенты полинома Чебышева k -го порядка на $(j-1)$ -ой итерации, то после подстановки в (21) с учетом (10) и (11) получим:

$$\mathbf{q}_j(\tau) = \mathbf{q}(0) + \frac{t_N}{8} \sum_{k=0}^{m_{j-1}} \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{j-1,k} \circ \mathbf{c}_i \left(G_{k+i,[-1\tau]} + G_{[k-i,[-1\tau]} \right), \quad (22)$$

где $G_{i,[-1\tau]}$ – интеграл полинома Чебышева i -го порядка на интервале $[-1\tau]$, определяемый согласно (13).

Аналогично (20) итеративный расчет (22) сводится к уточнению (расчету) на каждой итерации коэффициентов полиномов Чебышева с усечением порядка полинома, чтобы избежать его быстрого роста [16, 43, 44].

V. Численные результаты и сравнение алгоритмов

С целью оценки точности алгоритмов ориентации было произведено численное моделирование в условиях классического конического движения. Коническое движение широко используется в этом случае, поскольку и для угловой скорости, и для параметров ориентации известны точные аналитические выражения [3, 7]. На практике оно нередко возникает при угловых вибрациях и сложных вращениях, вызывая постоянный по величине вычислительный дрейф. При коническом движении угловая скорость описывается как $\omega = \Omega \begin{bmatrix} -2 \sin^2(\alpha/2) & -\sin(\alpha) \sin(\Omega t) & \sin(\alpha) \cos(\Omega t) \end{bmatrix}^T$, вектор ориентации – как $\sigma = \alpha \begin{bmatrix} 0 & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \end{bmatrix}^T$ и кватернион – как $\mathbf{q} = \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2) \begin{bmatrix} 0 & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \end{bmatrix}^T$. В приведенных выражениях α обозначает угол полураствора конуса, $\Omega = 2\pi f_c$ – круговую частоту конического движения (в рад/с), f_c – частоту конического движения (в Гц). Предполагается, что выходные сигналы гироскопов формируются в виде квазиординат с частотой $f_s = 1000$ Гц.

В качестве количественной характеристики погрешности определения ориентации используется следующая метрика:

$$\varepsilon_{att} = 2 \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{q}^* \circ \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix}_{2:4} \right\|, \quad (23)$$

где $\hat{\mathbf{q}}$ обозначает оценку кватерниона, вычисленную в соответствии с исследуемым алгоритмом, а оператор $[\cdot]_{2:4}$ выделяет векторную часть из кватерниона погрешности. Заметим, что широко используемый для оценки точности большинства общепринятых алгоритмов вычислительный дрейф по одной оси (оси конического движения) не учитывает погрешности по двум другим осям, что, вероятно, приводит к неверным оценкам при больших значениях угла конуса [57]. Если используются отличные от кватерниона параметры ориентации, то расчетное значение первичного параметра ориентации должно быть преобразовано в значение кватерниона для количественной оценки погрешности алгоритма, как это сделано в [54]. Порядок полинома, аппроксимирующего угловую скорость (6), по умолчанию везде принимается как $n = N-1$.

Полиномиальная аппроксимация угловой скорости и расчет ориентации

На рис. 1 представлен вид угловой скорости при коническом движении для $\alpha = 1$ град и $f_c = 10$ Гц. На рис. 2 показаны погрешности аппроксимации угловой скорости степенными полиномами (6) или полиномами Чебышева (11) на первом такте решения задачи для 3 и 8 используемых на такте решения задачи сигналов гироскопов ($N = 3$ и 8). Приведенные графики показывают, что чем больше сигналов гироскопов используется для аппроксимации угловой скорости на такте решения задачи, тем точнее аппроксимация, а это позволяет достичь и более высокой точности определения ориентации. Заметим, что погрешности воспроизведения угловой скорости невозможно скомпенсировать при последующем вычислении параметров ориентации. Анализ алгоритма RodFilter [39], где в качестве параметра ориентации используется вектор Родрига, пролил свет на этот факт (см. там же теорему 2). Оба типа полиномов дают одинаковую погрешность аппроксимации, но значения их коэффициентов существенно различаются (см. рис. 4).

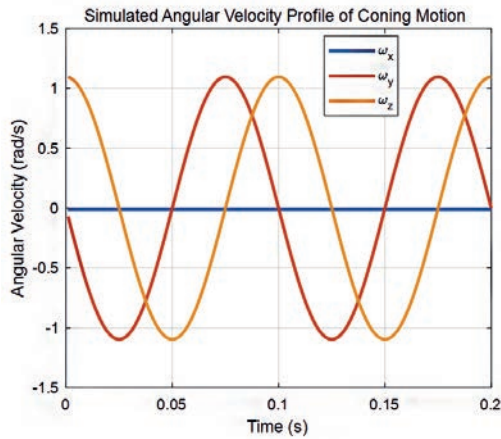


Рис. 1. Угловая скорость при коническом движении

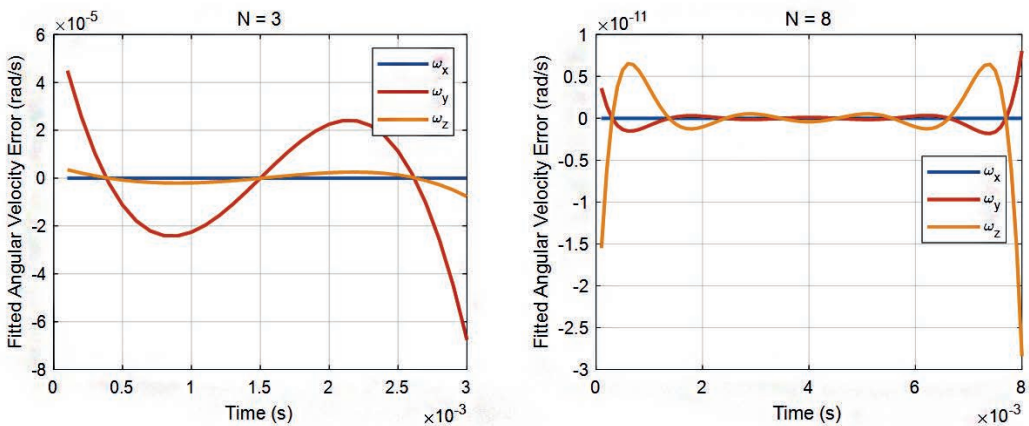


Рис. 2. Погрешности аппроксимации угловой скорости для $N = 3$ и 8

Исследуемые алгоритмы в развернутом виде представлены в дополнительном онлайн-материале, доступном по ссылке [54].

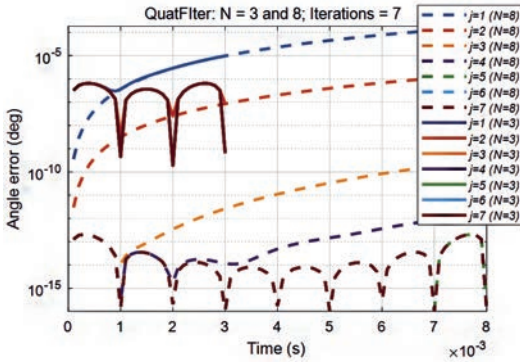


Рис. 3. Погрешности ориентации алгоритма QuatFilter для 7 итераций для $N = 3$ (сплошные линии) и 8 (пунктирные линии)

погрешности ориентации имеют резкие спады в моменты опроса гироскопов. Эта характерная форма погрешности свидетельствует о недостаточной точности аппроксимации угловой скорости по имеющемуся количеству сигналов гироскопов. На рис. 4 представлены коэффициенты полиномов, аппроксимирующих угловую скорость для $N = 8$, а также оценки кватерниона после 7 итераций с использованием алгоритмов QuatFilter-np и QuatFilter. С возрастанием порядка степенного полинома значения коэффициентов полинома быстро увеличиваются, в то время как у полинома Чебышева – стремительно уменьшаются. Эта тенденция наблюдается как при аппроксимации угловой скорости, так и при вычислении кватерниона.

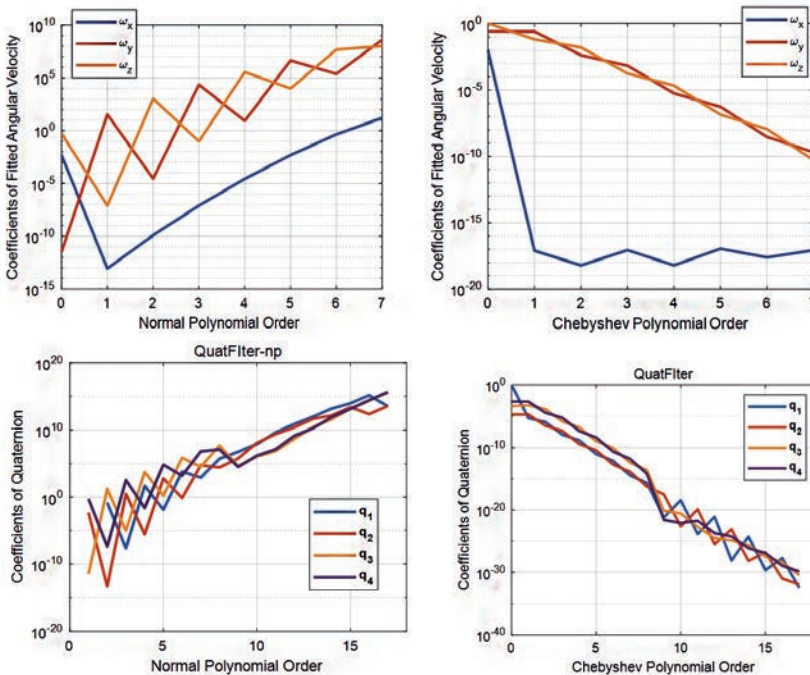


Рис. 4. Коэффициенты полиномов, аппроксимирующих угловую скорость и кватернион, рассчитанный в соответствии с QuatFilter-np (слева) и QuatFilter (справа) для $N = 8$

Усечение полиномов и количество итераций

На рис. 5 сопоставляются результаты для двух разных значений порядка усечения ($m_T = N+5, N+2$) для алгоритмов QuatFilter-np и QuatFilter по 7 итерациям. Как можно заметить, QuatFilter-np более чувствителен к усечению полинома, что свидетельствует о том, что степенные полиномы больше зависят от усечения полинома и тем самым показывают меньшую, чем у полиномов Чебышева, способность к воспроизведению функций. Иными словами, для полиномов Чебышева достаточно меньшего числа членов для достижения заданной точности – отличное свойство для численной реализации [45].

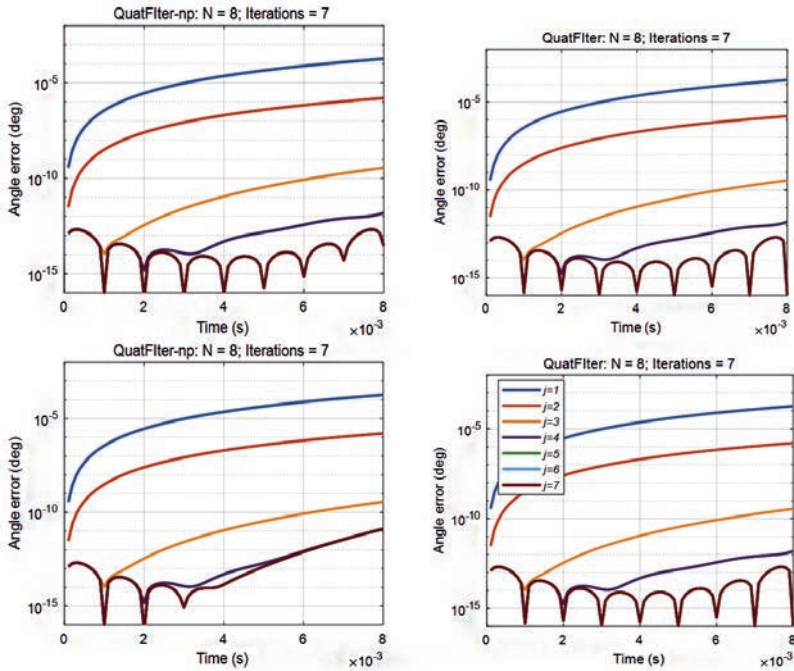


Рис. 5. Эффект усечения для алгоритмов QuatFilter-np и QuatFilter
(вверху: $m_T = N+5$; внизу: $m_T = N+2$)

На рис. 6 для $N = 8$ сравниваются погрешности ориентации и вычисления нормы кватерниона алгоритмов QuatFilter-np и QuatTaylor, получаемые на 15 последовательных итерациях. Порядок усечения полинома для обоих алгоритмов принят $m_T = N+9$. Из графиков видно, что для алгоритма QuatTaylor требуется большее число итераций, чтобы достичь сопоставимой точности, а именно 14 итераций против 5 для алгоритма QuatFilter-np. Это обусловлено быстрым ростом порядка полиномов у QuatFilter-np, как показано в (20), в то время как порядок степенных полиномов возрастает на единицу с каждой итерацией. Из кинематического уравнения для кватерниона (16) следует, что при точном решении уравнения с использованием разложения в ряд Тейлора или метода итеративного интегрирования норма кватерниона не должна изменяться: $d(\mathbf{q}^T \mathbf{q})/dt = 2\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^T (\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega}) = [1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}] \boldsymbol{\omega} = 0$. Как видно из рис. 6, погрешность нормы, т.е. отличие расчетного значения от единицы (поскольку начальное значение кватерниона имело единичную норму, как того требует алгоритм QuatFilter [41]) стремится к нулю.

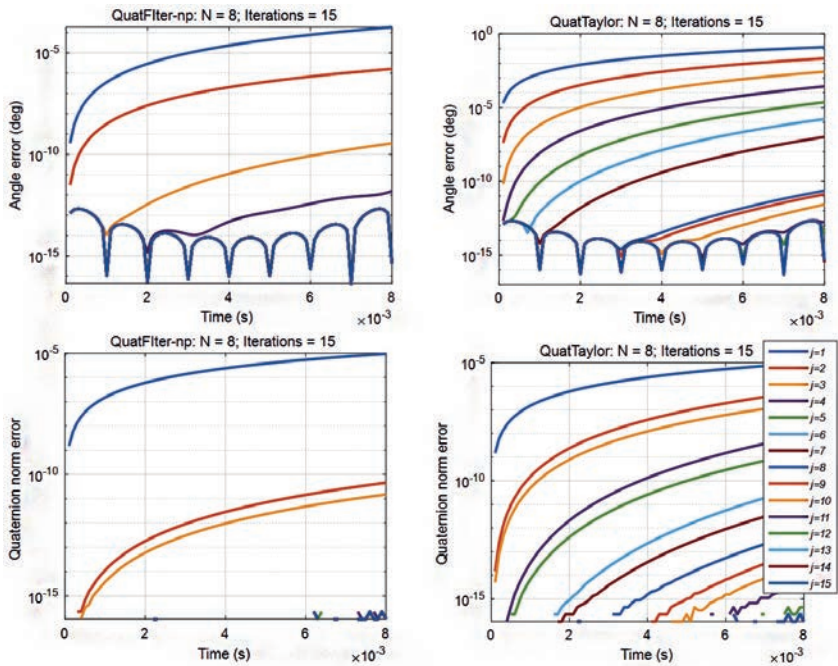


Рис. 6. Погрешности ориентации и погрешности нормы кватерниона для алгоритмов QuatFilter-np и QuatTaylor (цвет кривых использован для обозначений различных итераций, порядок следования цветов одинаков на всех графиках в статье)

Следует подчеркнуть, что сделанные на основании рис. 5, 6 выводы не зависят от выбора параметра ориентации [54] и, таким образом, демонстрируют достоинства метода МФИИ, основанного на использовании полиномов Чебышева. В качестве критерия останковки итеративного процесса для алгоритмов, использующих разложение в ряд Тейлора, можно принять невязку значения членов наивысшего порядка и требуемой точности расчета ориентации. Для алгоритмов, реализующих МФИИ, можно использовать разность значений коэффициентов полинома на двух последовательных итерациях, а именно

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{m_T} \left| \mathbf{b}_{j+1,k} - \mathbf{b}_{j,k} \right|^2}.$$

Сравнение точности

В настоящем разделе представлены результаты сравнения точности рассматриваемых алгоритмов для восьмишаговых алгоритмов ($N = 8$) при изменении частоты конечного движения в диапазоне 1–200 Гц (напомним, что частота опроса гироскопов принималась равной 1000 Гц). При моделировании для останковки итеративного процесса использовались критерии, описанные в предыдущем разделе. На рис. 7 для алгоритмов QuatTaylor и QuatFilter, а также для традиционных двух- или трехшаговых алгоритмов¹ [10] показаны накопленные за 1 с погрешности ориентации (с точностью до масштабного множителя они характеризуют вычислительный дрейф [29])

¹ Использован неоптимизированный трехшаговый алгоритм согласно (7) в указанном источнике.

в зависимости от относительной частоты конического движения f_c/f_s . Результаты для алгоритма QuatFilter-np не представлены, поскольку они оказались практически идентичны результатам, полученным для алгоритма QuatTaylor. Как видно из приведенных графиков, при частоте конического движения 10 Гц и ниже погрешность всех алгоритмов достигает минимального уровня, определяемого разрядностью вычислителя. Далее вплоть до частоты 60 Гц рассматриваемые алгоритмы близки по точности и демонстрируют линейный рост погрешности ориентации с ростом частоты. Вместе с тем при дальнейшем увеличении частоты конического движения погрешность алгоритма QuatTaylor (для случая, когда порядок усечения принимался $m_T = N+9$) начинает резко возрастать и, начиная с 70 Гц, даже превышать погрешности традиционных двух- или трехшаговых алгоритмов. При увеличении порядка усечения до $m_T = N+29$ частота, с которой начинается деградация алгоритма, смещается к 80 Гц. Напротив, точность алгоритма QuatFilter (при одинаковом порядке усечения $m_T = N+1$) не претерпевает существенных отклонений от линейной зависимости в зоне высоких относительных частот, демонстрируя лучшую точность во всем частотном диапазоне и приближаясь к точности традиционных алгоритмов на правом участке графиков. Как показали результаты моделирования, увеличение порядка усечения не приводит к уменьшению погрешности алгоритма QuatFilter. Данное преимущество в определяющей степени является следствием отличной способности полиномов Чебышева воспроизводить функции, а также их вычислительной устойчивости.

Отдельно была исследована зависимость выявленного эффекта (более высокой точности алгоритма QuatFilter в зоне высоких частот) от величины N , т.е. сложности (степени многошаговости) алгоритма. Представленные на рис. 8 результаты для частот конического движения 100 и 200 Гц показывают, что алгоритмы QuatFilter и QuatTaylor при малых N ($N = 3, 4$) имеют одинаковую точность. Причина в том, что ввиду низкого порядка полинома, аппроксимирующего угловую скорость, погрешность аппроксимации доминирует над погрешностью решения для кватерниона ориентации. С увеличением количества шагов (сигналов гироскопов) погрешность ориентации для алгоритма QuatFilter в целом уменьшается, в то время как у алгоритма QuatTaylor при $N > 4$ для 100 Гц и $N > 3$ для 200 Гц начинает возрастать.

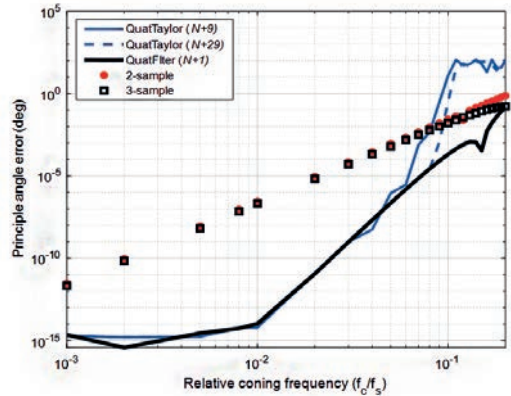


Рис. 7. Погрешности алгоритмов ориентации в зависимости от относительной частоты для $N = 8$ (и в сравнении с традиционными двух- или трехшаговыми алгоритмами)

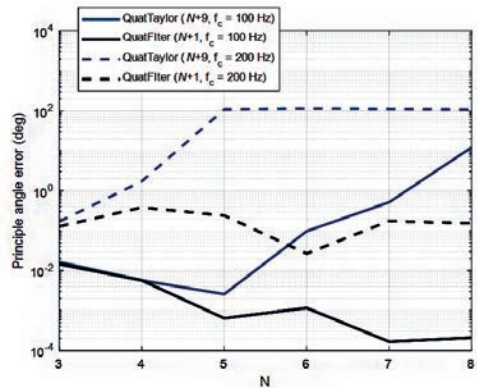


Рис. 8. Погрешности ориентации для различных N (частота конического движения – 100 и 200 Гц)

Дополнительно были исследованы погрешности алгоритма QuatTaylor для частоты $f_c = 100$ Гц. На рис. 9 показаны погрешности ориентации для двух тактов решения задачи при различных порядках усечения полинома: $m_T = N+29$ и $m_T = N+49$. С увеличением порядка усечения, как и ожидалось, точность алгоритма QuatTaylor улучшается. Тем не менее предположение о том, что с дальнейшим увеличением порядка полинома точность алгоритма будет неограниченно возрастать, не подтвердилось: при порядке усечения выше 150 наступает срыв вычислений. Особый интерес представляет и-образная форма графиков для алгоритма QuatFilter с подъемами осциллирующих кривых на каждом из краев такта решения задачи. Это проявление известного эффекта Рунге [58], который всегда присутствует при аппроксимации полиномами высокого порядка по равноотстоящим точкам, что также видно и на рис. 2 при аппроксимации угловой скорости по 8 точкам ($N = 8$). Кроме того, интересны результаты, приведенные на рис. 10 для $N = 5$, где заметно частичное совпадение с кривой для $N = 8$ (взятой с рис. 9). В частности, алгоритм QuatTaylor демонстрирует более высокую точность, чем это показано на рис. 9 (для $N = 8$). Этот необычный результат тоже можно объяснить эффектом Рунге, как и описанное выше явление срыва вычислений.

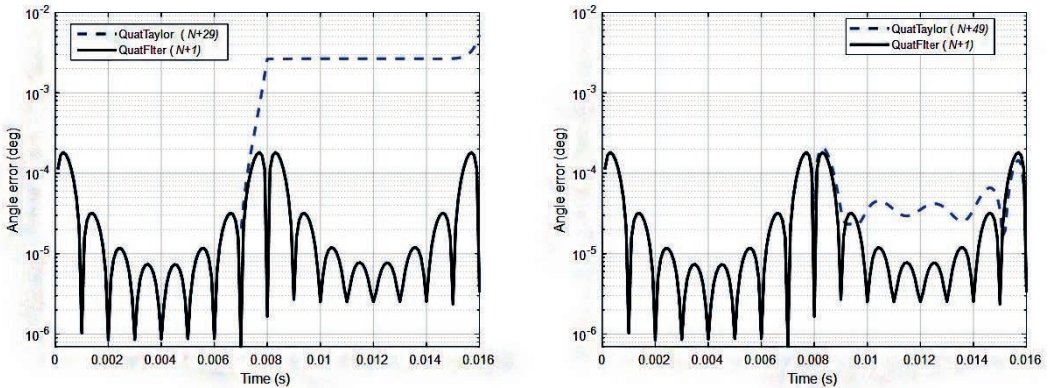


Рис. 9. Погрешности ориентации на двух тактах решения задачи для частоты конического движения 100 Гц и $N = 8$, порядок усечения: $m_T = N+29$ (слева) и $m_T = N+49$ (справа)

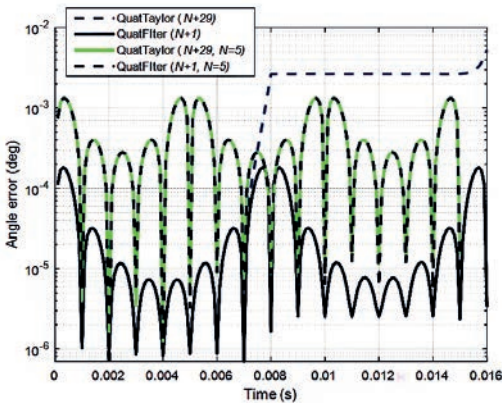


Рис. 10. Погрешности ориентации на трех тактах решения задачи для $N = 5$ и частоты конического движения 100 Гц по сравнению с результатами для $N = 8$ на рис. 9

В завершение был исследован приближенный к практике вариант использования зашумленных сигналов гироскопов, поскольку считается, что многошаговые алгоритмы обладают повышенной чувствительностью к узкополосным случайным шумам, что может приводить к псевдоконическим погрешностям [31]. Были заданы случайные погрешности в виде случайного блуждания угла (angle random walk) уровня $0,001$ град/ $\sqrt{ч}$, соответствующие БИНС навигационного класса точности. Генерировался набор случайных погрешностей гироскопов, который добавлялся к имитируемым сигналам

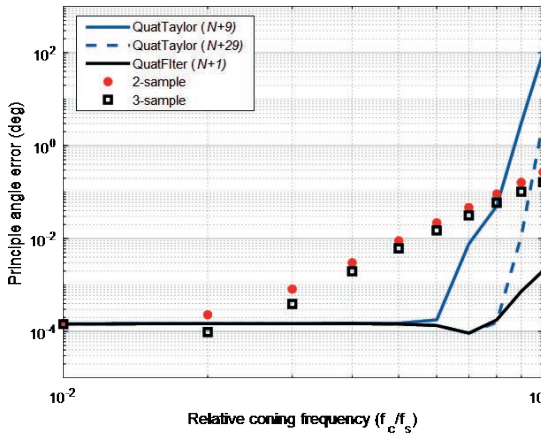


Рис. 11. Погрешности алгоритмов ориентации в зависимости от относительной частоты для $N = 8$ с учетом шумов гироскопов навигационного класса точности

В заключение отметим, что точность рассматриваемых алгоритмов определяется двумя факторами: качеством аппроксимации угловой скорости и погрешностями метода численного решения дифференциального уравнения – метода разложения в ряд Тейлора или МФИИ [39–41]. Погрешность при применении МФИИ может в принципе быть уменьшена до уровня цены младшего разряда вычислителя благодаря итеративной схеме решения исходного дифференциального уравнения в исходном (неупрощенном) виде, тем самым преодолевается фундаментальное ограничение традиционных алгоритмов ориентации, использующих упрощенные кинематические уравнения. Качество аппроксимации угловой скорости зависит от гладкости входных сигналов гироскопов, их инструментальных шумов и от количества используемых для аппроксимации сигналов (количества шагов опроса на такте решения задачи). Обычно чем больше шагов опроса гироскопов, тем выше точность аппроксимации. При этом существует и теоретический барьер, определяемый эффектом Рунге. Возможно, приемы подавления данного эффекта позволят достичь еще большей точности определения ориентации.

Алгоритм RodFilter (имеющий ту же точность, что и QuatFilter), а также метод его исследования и данные в Matlab доступны по ссылке: <https://www.researchgate.net/project/MotionRepresentation-and-Computation-Inertial-Navigation-and-Beyond>. Заинтересованные читатели могут составить о них собственное мнение.

VI. Заключение

В статье задача определения угловой ориентации в БИНС рассматривается с позиции получения общего решения кинематических уравнений для параметров ориентации. Кратко изложены два основных подхода к решению задачи: основанный на разложении решения в ряд Тейлора, который был представлен в итеративной форме для учета производных угловой скорости высокого порядка, и метод последовательных итераций Пикара, который недавно был преобразован одним из авторов в МФИИ. На базе указанных подходов для кватерниона ориентации выведены алгоритмы ориентации трех видов. Протестированы алгоритмы в условиях клас-

на входе всех алгоритмов. На рис. 11 графики накопленных за 10 с погрешностей ориентации представлены как функции относительной частоты конического движения для $N = 8$. При частотах конического движения ниже 20 Гц все рассматриваемые алгоритмы имеют точность традиционных двух- или трехшаговых алгоритмов, поскольку влияние шума преобладает над погрешностями вычисления ориентации (ср. с рис. 7). Алгоритмы демонстрируют одинаковую точность, пока частота конического движения остается ниже 60–80 Гц. Характер кривых повторяет вид графиков на рис. 7 при отсутствии шумов гироскопов.

сического конического движения, что существенно уточнило выводы, сделанные в опубликованных ранее статьях, посвященных МФИИ. С помощью численного моделирования показано, что, если для аппроксимации угловой скорости на такте решения задачи используется одно и то же число выходных сигналов датчиков, все три алгоритма имеют одинаковый порядок точности при отношении частоты конического движения к частоте опроса не выше 0,06–0,2 (в зависимости от количества выходных сигналов гироскопов на такте решения задачи и выбранного порядка усечения полинома). При больших значениях относительной частоты конического движения алгоритм QuatFIter демонстрирует лучшие характеристики по сравнению с двумя другими алгоритмами как по точности, так и по устойчивости к эффекту Рунге при использовании большого (более трех) количества сигналов гироскопов на такте решения задачи благодаря уникальному свойству полиномов Чебышева. Кроме того, QuatFIter позволяет применять низкий порядок усечения полинома, в то время как два других алгоритма требуют значительно более высокого порядка усечения полинома, что может даже вызвать срыв процесса вычисления.

Работа выполнена (со стороны первого автора) при поддержке Китайской национальной программы развития ключевых технологий (2018YFB1305103) и Государственного фонда естественных наук Китая (61673263).

ЛИТЕРАТУРА

1. Markley, F.L., Crassidis, J.L., *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*: Springer, 2014.
2. Titterton, D.H., Weston, J.L., *Strapdown Inertial Navigation Technology*, 2nd ed.: the Institute of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 2007.
3. Groves, P.D., *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*, 2nd ed.: Artech House, Boston and London, 2013.
4. Tazarates, D.A., Inertial Navigation: From Gimbaled Platforms to Strapdown Sensors, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, vol. 47, pp. 2292–2299.
5. Mark, J.G., Tazarates, D.A., Tuning of Coning Algorithms to Gyro Data Frequency Response Characteristics, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, vol. 24, pp. 641–647.
6. Savage, P.G., A new second-order solution for strapped-down attitude computation, *AIAA/JACC Guidance and Control Conference*, 1966.
7. A study of the critical computational problems associated with strapdown inertial navigation systems, NASA CR-968 by United Aircraft Corporation, 1968.
8. Jordan, J.W., An accurate strapdown direction cosine algorithm, NASA TN-D-5384, 1969.
9. Bortz, J.E., A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1971, vol. 7, pp. 61–66.
10. Miller, R., A new strapdown attitude algorithm, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1983, vol. 6, pp. 287–291.
11. Ignagni, M.B., Optimal strapdown attitude integration algorithms, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, pp. 363–369.
12. Ignagni, M.B., Efficient class of optimized coning compensation algorithm, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, vol. 19, pp. 424–429.
13. Savage, P.G., Strapdown inertial navigation integration algorithm design, part 1: attitude algorithms, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, vol. 21, pp. 19–28.
14. Litmanovich, Y.A., Lesyuchevsky, V.M., Gusinsky, V.Z., Two new classes of strapdown navigation algorithms, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Jun. 2000, vol. 23, pp. 34–44, 28–30.
15. Savage, P., Down-Summing Rotation Vectors For Strapdown Attitude Updating (SAI WBN-14019), Strapdown Associates, 2017. (http://strapdownassociates.com/Rotation%20Vector%20Down_Summing.pdf).

16. Litmanovich, Y.A., Mark, J.G., Progress in Strapdown Algorithm Design at the West and East as Appeared at Saint Petersburg Conferences: Decade Overview, *Saint-Petersburg International Conference on Integrated Navigational Systems*, Russia, 2003.
17. Lee, J.G., Yoon, Y.J., Mark, J.G., Tzartas, D.A., Extension of strapdown attitude algorithm for high-frequency base motion, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, pp. 738–743.
18. Xu, Z., Xie, J., Zhou, Z., Zhao, J., Xu, Z., Accurate Direct Strapdown Direction Cosine Algorithm, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, vol. 55, pp. 2045–2053.
19. Branets, V.N., Shmyglevsky, I.P., *Application of Quaternions to the Problems of Rigid Body Orientation*: Nauka, 1973.
20. Panov, A.P., *Mathematical Fundamentals of Inertial Navigation Theory*: Kiev, Naukova Dumka (in Russian), 1994.
21. Rucker, C., Integrating Rotations Using Nonunit Quaternions, *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2018, vol. 3, pp. 2779–2986.
22. Park, J., Chung, W.-K., Geometric integration on euclidean group with application to articulated multibody systems, *IEEE Trans. on Robotics*, 2005, vol. 21, pp. 850–863.
23. Andrieu, M.S., Crassidis, J.L., Geometric Integration of Quaternions, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36, pp. 1762–1767.
24. Boyle, M., The Integration of Angular Velocity, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2017, vol. 27, pp. 2345–2374.
25. Krysl, P., Endres, L., Explicit Newmark/Verlet algorithm for time integration of the rotational dynamics of rigid bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, pp. 2154–2177, 2005.
26. Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G., *Geometric Numerical Integration: Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2006.
27. Musoff, H., Murphy, J.H., Study of strapdown navigation attitude algorithm, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, vol. 18, pp. 287–290.
28. Gusinsky, V.Z., Lesyuchevsky, V.M., Litmanovich, Y.A., Musoff, H., Schmidt, G.T., Optimization of a strapdown attitude algorithm for a stochastic motion, *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, 1997, vol. 44, pp. 163–170.
29. Gusinsky, V.Z., Lesyuchevsky, V.M., Litmanovich, Y.A., Musoff, H., Schmidt, G.T., New procedure for deriving optimized strapdown attitude algorithm, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1997, vol. 20, pp. 673–680.
30. Tzartas, D.A., Mark, J.G., Coning compensation in strapdown inertial navigation systems, US Patent US005828980A, 1997.
31. Litmanovich, Y.A., Use of angular rate multiple integrals as input signals for strapdown attitude algorithms, *Symposium Gyro Technology*, Stuttgart, Germany, 1997.
32. Slyusar, V.M., Current Issues of Designing SINS Attitude Algorithms. Part 3. Algorithms Analysis and Synthesis with Account for Gyros Frequency Response Effect, *Gyroscopy and Navigation (in Russian)*, 2006, vol. 4, pp. 21–36.
33. Savage, P., Modern Strapdown Attitude Algorithms And Their Accuracy, Versus Accuracy Requirements For Unaided Strapdown Inertial Navigation (SAI WBN-14025), Strapdown Associates, 2020 (<http://strapdownassociates.com/Algorithm%20Accuracy%20Vs%20INS%20Requirements.pdf>).
34. Sukenik, C.I., Application of ultracold molecules to inertial sensing for navigation, ADA146124, 2004.
35. Kasevich, M., *Science and technology prospects for ultra-cold atoms*, 2002, Available: www.nationalacademies.org/bpa/kasevich_CAMOS_021124.pdf.
36. Ignagni, M., Enhanced Strapdown Attitude Computation, *Journal of Guidance Control and Dynamics (Article in Advance)*, 2020, pp. 1–5.
37. Wang, M., Wu, W., Wang, J., Pan, X., High-order attitude compensation in coning and rotation coexisting environment, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, vol. 51, pp. 1178–1190.
38. Wang, M., Wu, W., He, X., Yang, G., Yu, H., Higher-order Rotation Vector Attitude Updating Algorithm, *Journal of Navigation*, 2019, vol. 72, pp. 721–740.
39. Wu, Y., RodFilter: Attitude Reconstruction from Inertial Measurement by Functional Iteration, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, vol. 54, pp. 2131–2142.
40. Wu, Y., Cai, Q., Truong, T.-K., Fast RodFilter for Attitude Reconstruction from Inertial Measurement, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, vol. 55, pp. 419–428.
41. Wu, Y., Yan, G., Attitude Reconstruction from Inertial Measurements: QuatFilter and Its Comparison with RodFilter, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, vol. 55, pp. 3629–3639.

42. Yan, G., Weng, J., Yang, X., Qin, Y., An Accurate Numerical Solution for Strapdown Attitude Algorithm based on Picard iteration, *Journal of Astronautics*, 2017, vol. 38, pp. 65–71.
43. Atkinson, K.E., Han, W., Stewart, D.E., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*: John Wiley and Sons, 2009.
44. Moore, R.E., *Methods and Applications in interval analysis*. Philadelphia: SIAM, 1979.
45. Press, W.H., *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*, 3rd ed. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2007.
46. Ignagni, M.B., On the orientation vector differential equation in strapdown inertial systems, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1994, vol. 30, pp. 1076–1081.
47. Slyusar, V.M., Current Issues of Designing SINS Attitude Algorithms. Part 1. Amplitude Extension of the Algorithms Application Field, *Gyroscopy and Navigation (in Russian)*, vol. 2, pp. 61–74, 2006.
48. Wu, Y., Rigid Motion Reconstruction by Functional Iteration, *Inertial Sensors and Systems – Symposium Gyro Technology (ISS-SGT)*, Karlsruhe, Germany, 2017.
49. Wu, Y., Fast RodFilter for Precision Attitude Computation, *Inertial Sensors and Systems – Symposium Gyro Technology (ISS-SGT)*, Braunschweig, Germany, 2018.
50. Wu, Y., Next-Generation Inertial Navigation Computation Based on Functional Iteration, *International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS) & Inertial Sensors and Systems – Symposium Gyro Technology (ISS-SGT)*, Saint Petersburg, Russia; Braunschweig, Germany, 2019.
51. Wu, Y., iNavFilter: Next-Generation Inertial Navigation Computation Based on Functional Iteration, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 56, pp. 2061–2082, 2019.
52. Clenshaw, C.W., Norton, H.J., The Solution of Nonlinear Ordinary Differential Equations in Chebyshev Series, *Computer Journal*, vol. 6, pp. 88–92, 1963.
53. Litmanovich, Y.A., Lesyuchevsky, V.M., Gusinsky, V.Z., Strapdown attitude/navigation algorithms with angular rate/specific force multiple integrals as input signals, *ION 55th Annual Meeting*, Cambridge, MA, 1999.
54. Wu, Y., Litmanovich, Y.A., Strapdown Attitude Computation: Functional Iterative Integration versus Taylor Series Expansion, <https://arxiv.org/abs/1909.09935>, 2019.
55. Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations I*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
56. Rugh, W.J., *Linear System Theory*, 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
57. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992, 280с
58. Peng, R., Yan, G., Qin, Y., Limitations of residual error estimate for classic coning compensation algorithm, *The Ninth International Conference on Electronic Measurement & Instruments*, 2009.
59. Trefethen, L.N., *Approximation Theory and Approximation Practice*: SIAM, 2012.
60. Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А. Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта. Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2016. Т. 16. Вып. 1. С. 80–95.

Wu, Y. (Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China), Litmanovich, Y.A. (Central Scientific and Research Institute “Elektropribor”, Saint Petersburg, Russia)

Strapdown Attitude Computation: Functional Iterative Integration versus Taylor Series Expansion, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2020, vol. 28, no. 4 (111), pp. 16–36.

Abstract. There are two basic approaches to strapdown attitude computation, namely, the traditional Taylor series expansion approach and the Picard iterative method. The latter was recently implemented in a recursive form basing on the Chebyshev polynomial approximation and resulted in the so-called functional iterative integration approach. Up to now a detailed comparison of these two approaches with arbitrary number of gyroscope samples has been

lacking for the reason that the first one is based on the simplified rotation vector equation while the second one uses the exact form. In this paper, the mainstream algorithms are considerably extended by the Taylor series expansion approach using the exact differential equation and recursive calculation of high-order derivatives, and the functional iterative integration approach is re-implemented on the normal polynomial. This paper applies the two approaches to solve the strapdown attitude problem, using the attitude parameter of quaternion as a demonstration. Numerical results under the classical coning motion are reported to assess all derived attitude algorithms. It is revealed that in the low and middle relative conic frequency range all algorithms have the same order of accuracy, but in the range of high relative frequency the algorithm by the functional iterative integration approach performs the best in both accuracy and robustness if the Chebyshev polynomials and a larger number of gyroscope samples are to be used. The main conclusion applies to other attitude parameters as well.

Key words: functional iterative integration, coning motion, attitude quaternion.

Материал поступил 06.08.2020