

Н. АЛЬ БИТАР, А. И. ГАВРИЛОВ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ В СЛАБОСВЯЗАННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНО-СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ ОБРАБОТКИ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В статье выполнен сравнительный анализ эффективности применения расширенного фильтра Калмана (ФК) и сигма-точечного ФК в задаче интеграции БИНС/СНС на основе слабосвязанной схемы комплексирования. Используются полные стохастические модели измерений инерциальных датчиков на базе МЭМС-технологии. Проверена эффективность расширенного ФК и сигма-точечного ФК на основе реальных экспериментальных данных для сложного движения, полученных с использованием БИНС на базе МЭМС-технологии и приемника СНС с двойной антенной. Произведена оценка точности определения навигационных параметров с использованием алгоритмов расширенного ФК и сигма-точечного ФК при наличии и отсутствии сигнала СНС. Приведены результаты статистического анализа погрешностей оценивания навигационных параметров для разных периодов отключений сигнала СНС.

Ключевые слова: бесплатформенные инерциальные навигационные системы, спутниковые навигационные системы, сигма-точечный фильтр Калмана, расширенный фильтр Калмана, МЭМС.

Введение

Инерциальная навигационная система (ИНС) [1] и спутниковая навигационная система (СНС) [2] объединяются в одну интегрированную. Интеграция ИНС/СНС позволяет использовать преимущества и компенсировать недостатки, присущие каждой из систем в отдельности [3]. Для обработки сигналов в интегрированной навигационной системе часто используется ФК [4], поскольку он способен оценивать погрешности ИНС в текущий момент времени на основе измерения разности между сигналами ИНС и СНС. Используя точные динамические и стохастические модели погрешностей ИНС и СНС, ФК обеспечивает высокоточные оценки погрешностей ИНС в случае, когда имеется непрерывный доступ к сигналам СНС. Для задачи интеграции ИНС и СНС широко используются два варианта ФК – расширенный [4–6] и сигма-точечный [4–8]. Расширенный ФК основан на сведении нелинейных моделей наблюдений и процесса к линейным моделям погрешностей посредством разложения в ряд Тейлора. Такой подход позволяет формально подойти к задаче нелинейной фильтрации и получить квазиоптимальные оценки с приемлемой точностью. Использование существенно нелинейной модели динамической системы приводит к неточным оценкам состояний, что может повлечь за собой расходимость фильтра. Сигма-

Аль Битар Надер. Аспирант кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва).

Гаврилов Александр Игоревич. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана.

точный ФК использует детерминированную выборку, известную как сигма-точечное преобразование (unscented transform) для выбора минимального набора точек (называемых сигма-точками) вокруг среднего значения. Сигма-точки фактически представляют собой аргументы нелинейных функций, характеризующих динамику системы и используемых для получения выборочных средних значений состояний и соответствующих ковариаций. При этом точность оценивания превосходит точность расширенного ФК. Помимо этого, подобный подход не требует вычисления якобиана, что представляет серьезную проблему для сложных функций. По сравнению с расширенным сигма-точечный ФК является менее чувствительным к нелинейностям моделей процесса и наблюдений [7]. Был проведен ряд сравнительных исследований в области применения расширенного и сигма-точечного ФК в системах автоматического управления [7, 9]. В данной статье рассматривается проблематика, связанная с реализацией навигационных систем.

В [10] отмечено, что расширенный и сигма-точечный ФК обеспечивают практически одинаковые точности определения координат, скорости и угловой ориентации объекта при наличии и отсутствии сигнала СНС с использованием измерений от бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) на базе МЭМС.

В [11] показано, что сигма-точечный ФК превосходит расширенный ФК при наличии сигнала СНС, но в статье отсутствует информация об эффективности сигма-точечного ФК при отключении сигнала СНС. Более того, результаты основаны на имитационном моделировании и простой модели измерения инерциальных датчиков (в модель входят только случайное блуждание ускорения угловой скорости и белый шум).

В работе [12] проведен сравнительный анализ среднеквадратической погрешности определения координат объекта в БИНС при использовании различных алгоритмов нелинейной фильтрации (в том числе расширенного и сигма-точечного ФК). Сигма-точечный ФК обеспечил несколько более высокую точность по сравнению с расширенным ФК, однако была выбрана достаточно простая методика эксперимента, что не вполне соответствует реальным сценариям. Одновременно в статье отсутствует информация о погрешности определения скорости и угловой ориентации объекта.

В [13] рассмотрена задача синтеза следящей системы на основе сигма-точечного ФК как альтернативного традиционному варианту построения квази-оптимального вычислителя. Сигма-точечный ФК обеспечивает формирование оценок радионавигационных параметров сигналов в приемниках СНС в режиме слежения. Показано преимущество рассматриваемой схемы над традиционной следящей системой с дискриминаторами, при этом сравнения с расширенным ФК не проводилось.

В статье [14] разработана методика навигации пешехода с использованием установленной на стопе БИНС. Для коррекции по нулевой скорости успешно применен алгоритм сигма-точечного ФК. Математическая модель описывает исключительно динамику движения пешехода и не подходит для обобщенного случая движения объекта.

В работе [15] рассмотрена задача интеграции БИНС/GPS/компас с использованием расширенного и сигма-точечного ФК, которые показывают одинаковые точности определения координат, но сигма-точечный ФК превосходит расширенный по точности определения угла рыскания при наличии сигнала GPS. Вместе с тем здесь не показана эффективность фильтров при отсутствии сигнала

GPS. Авторы статьи использовали упрощенные уравнения навигации, которые описывают динамику движения транспортного средства на горизонтальной плоскости без учета остальных параметров (высоты, вертикальной скорости и углов дифферента и крена). Общим недостатком вышеупомянутых работ [10–12, 14–15] является то, что задача интеграции БИНС/СНС рассмотрена на примере частных случаев с использованием упрощенных навигационных уравнений и простых моделей измерения инерциальных датчиков.

В настоящей работе рассматривается задача интеграции БИНС/СНС на основе слабосвязанной схемы комплексирования с использованием реальных экспериментальных данных, полученных с использованием БИНС на базе технологии МЭМС и приемника СНС. Системы были установлены на крыше автомобиля со сложной траекторией движения, в ходе которого существенно изменяются навигационные параметры (координаты, скорость и углы ориентации). Уравнения навигации записываются в обобщенном виде без каких-либо приближений. Используются полные стохастические модели измерений инерциальных датчиков на базе технологии МЭМС. В качестве интегральных фильтров применяются расширенный и сигма-точечный ФК. Проводится сравнительный анализ погрешностей определения координат, скорости и угловой ориентации в режимах доступности и отсутствия сигнала СНС. Задача начальной выставки БИНС не обсуждается.

Слабосвязанная схема комплексирования

В данной работе рассматривается задача интеграции БИНС/СНС на основе слабосвязанной схемы комплексирования. Особенность указанной схемы заключается в том, что БИНС и СНС вырабатывают независимые решения, однако между ними есть связующий блок, в котором так называемый интегральный фильтр Калмана на основе данных приемника СНС формирует оценку вектора состояния, в результате чего производится коррекция данных, полученных от БИНС (рис. 1) [3]. Способ основан на использовании разности измерений сигналов БИНС и СНС, в связи с этим из рассмотрения исключаются непосредственно навигационные параметры (координаты и скорость). В ФК заложена модель погрешностей БИНС и СНС, степень подробности которой определяется требованиями к точности вырабатываемых навигационных параметров. В модель погрешностей БИНС включаются дрейфы и смещения нулей гироскопов и акселерометров, а также погрешности в определении координат местоположения, скорости и параметров ориентации.

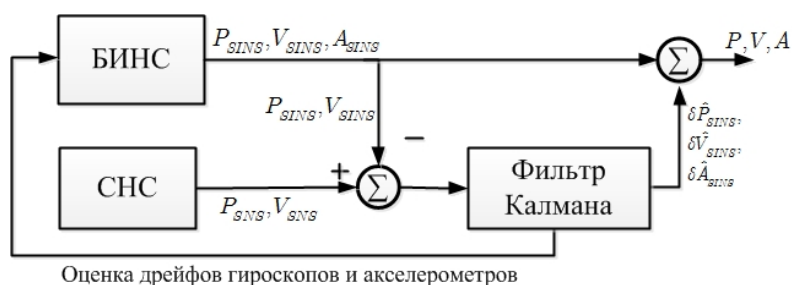


Рис. 1. Интеграции БИНС/СНС на основе слабосвязанной схемы комплексирования:

$P_{SINS}, V_{SINS}, A_{SINS}$ – координаты, скорость и углы ориентации, вычисленные БИНС;

P_{SINS}, V_{SINS} – координаты и скорость, вычисленные СНС; $\delta \hat{P}_{SINS}, \delta \hat{V}_{SINS}, \delta \hat{A}_{SINS}$ – оценки погрешностей определения координат, скорости и углов ориентации БИНС;

P, V, A – координаты, скорость и углы ориентации интегрированной навигационной системы БИНС/СНС

Навигационные уравнения

Рассмотрим системы координат, приведенные на рис. 2. Уравнения навигации в системе координат *ONED* [16] имеют вид:

$$\dot{\mathbf{V}}^n = -(\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n)\mathbf{V}^n + \mathbf{f}^n + \bar{\mathbf{g}}^n; \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \bar{A}\mathbf{V}^n, \mathbf{P} = [\varphi \ \lambda \ h]^T. \quad (2)$$

Здесь φ, λ, h – широта, долгота и высота центра масс объекта;
 $\mathbf{V}^n = [v_N \ v_E \ v_D]^T = C_e^n \dot{\mathbf{r}}^e$ – скорость объекта относительно системы $O_e X_e Y_e Z_e$ в системе *ONED* ;
 \mathbf{r}^e – вектор координат центра масс объекта в системе $O_e X_e Y_e Z_e$;
 C_e^n – матрица направляющих косинусов для перехода из системы координат $O_e X_e Y_e Z_e$ в систему координат *ONED* ;
 $\mathbf{f}^n = C_b^n \mathbf{f}^b$ – вектор кажущегося ускорения в системе *ONED* ;
 \mathbf{f}^b – вектор кажущегося ускорения в системе *OXYZ* (выходные сигналы триады акселерометров);
 C_b^n – матрица направляющих косинусов для перехода из системы координат *OXYZ* в систему координат *ONED* ;
 $\Omega_{ie}^n = [\omega_{ie}^n \times], \Omega_{in}^n = [\omega_{in}^n \times]$ – кососимметрические матрицы, составленные из угловых скоростей $(\omega_{ie}^n, \omega_{in}^n)$, где ω_{ie}^n – вектор угловой скорости системы координат $O_e X_e Y_e Z_e$ относительно системы $O_i X_i Y_i Z_i$ в сопровождающей системе координат *ONED* ; ω_{in}^n – вектор угловой скорости системы координат *ONED* относительно системы $O_i X_i Y_i Z_i$ в системе координат *ONED* ;
 $\bar{A} = \text{diag}([1/(M+h), 1/((N+h)\cos\varphi), -1])$, где M, N – радиусы кривизны эллипсоида (фигура Земли описывается двухосным эллипсоидом [16]);
 $\bar{\mathbf{g}}^n = \mathbf{g}^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \mathbf{r}^e$ – ускорение силы тяжести, где $\mathbf{g}^n = [0 \ 0 \ g]^T$ – гравитационное ускорение и g задаются согласно мировой геодезической системе (WGS-84).

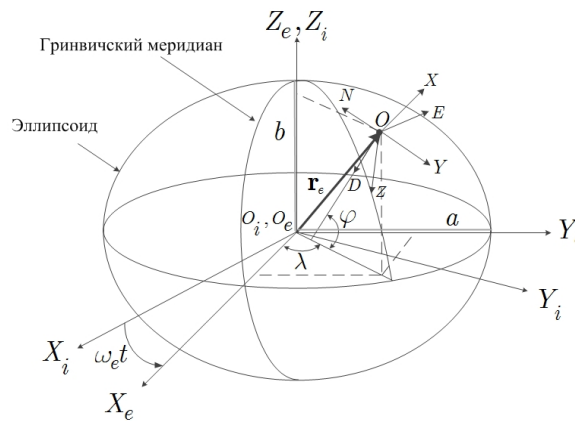


Рис. 2. Системы координат: $O_i X_i Y_i Z_i$ – геоцентрическая инерциальная система координат, $O_e X_e Y_e Z_e$ – геоцентрическая земная система координат, *ONED* – сопровождающая система координат, *OXYZ* – связанная система координат, a – большая полуось эллипсоида, b – малая полуось эллипсоида, ω_e – угловая скорость вращения Земли, t – время

Матрица $C_n^b = (C_n^b)^T$ может быть представлена через параметры Родрига–Гамильтона (кватернионы): $\bar{\mathbf{q}} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [\mathbf{q}^T \ q_4]^T$, $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ – векторная часть и q_4 – скалярная часть. Дифференциальное уравнение, описывающее изменение кватерниона, записано как [4, 11]

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt} = \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} [\Omega^{(1)}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \Omega^{(2)}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)] \cdot \bar{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

где $\Omega^{(1)}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times] & \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ -(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)^T & 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}$, $\Omega^{(2)}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n) = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times] & \boldsymbol{\omega}_{in}^n \\ -(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)^T & 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}$, $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ – вектор угловой скорости связанной системы координат $OXYZ$ относительно системы $O_i X_i Y_i Z_i$ (выходные сигналы триады гироскопов).

Модели измерения инерциальных датчиков

Неточные измерения инерциальных датчиков вызваны рядом причин, в частности неортогональностью измерительных осей блоков акселерометров и гироскопов, смещениями нулей, которые можно выразить в виде суммы систематической и случайной составляющих [17–19]. Модель измерения акселерометров и гироскопов на базе МЭМС-технологии может быть записана в обобщенном виде (индекс b обозначает связанную систему координат $OXYZ$):

$$\tilde{\mathbf{f}}^b = (I_{3 \times 3} + S_a) \mathbf{f}^b + \mathbf{b}_{aS} + \mathbf{b}_{aR}, \quad (4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = (I_{3 \times 3} + S_g) \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_{gS} + \mathbf{b}_{gR}. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{f}}^b, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ – трехмерные векторы выходных сигналов акселерометров и гироскопов соответственно; $\mathbf{f}^b, \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ – истинные значения измеряемых величин; $\mathbf{b}_{aS}, \mathbf{b}_{gS}$ – систематические составляющие смещений нулей (называются «постоянными дрейфами»); $\mathbf{b}_{aR}, \mathbf{b}_{gR}$ – случайные составляющие смещений нулей; $I_{3 \times 3}$ – единичная матрица; S_a, S_g – матрицы коэффициентов, которые представляются в виде суммы двух матриц:

$$S_a = K_a + G_a, \quad (6)$$

$$S_g = K_g + G_g. \quad (7)$$

Здесь K_a, K_g – диагональные матрицы масштабных коэффициентов, G_a, G_g – матрицы, обусловленные неортогональностью измерительных осей блоков акселерометров и гироскопов [17]:

$$G_a = \begin{bmatrix} 0 & G_a^{XY} & G_a^{XZ} \\ G_a^{YX} & 0 & G_a^{YZ} \\ G_a^{ZX} & G_a^{ZY} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_g = \begin{bmatrix} 0 & G_g^{XY} & G_g^{XZ} \\ G_g^{YX} & 0 & G_g^{YZ} \\ G_g^{ZX} & G_g^{ZY} & 0 \end{bmatrix}.$$

Значения элементов матриц (K_a, K_g, G_a, G_g) можно определить на этапе калибровки [17–20]. Постоянные дрейфы ($\mathbf{b}_{aS}, \mathbf{b}_{gS}$) подчиняются дифференциальным уравнениям:

$$\dot{\mathbf{b}}_{aS} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_{gS} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Случайные составляющие дрейфа ($\mathbf{b}_{aR}, \mathbf{b}_{gR}$) представляются в виде суммы трех компонент [18–19]:

$$\mathbf{b}_{aR} = \mathbf{b}_{accrw} + \mathbf{b}_{ad} + \mathbf{W}_{vrv}, \quad (10)$$

$$\mathbf{b}_{gR} = \mathbf{b}_{rrw} + \mathbf{b}_{gd} + \mathbf{W}_{arw}. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{b}_{accrw} – случайное блуждание ускорения (acceleration random walk); \mathbf{b}_{rrw} – случайное блуждание угловой скорости (rate random walk); $\mathbf{b}_{ad}, \mathbf{b}_{gd}$ – экспоненциально-коррелированные (марковские) шумы; \mathbf{W}_{vrv} – белый шум с нулевыми средними (velocity random walk); \mathbf{W}_{arw} – белый шум с нулевыми средними (angle random walk). Составляющие $\mathbf{b}_{accrw}, \mathbf{b}_{rrw}$ описываются винеровскими случайными процессами [17–19]:

$$\dot{\mathbf{b}}_{accrw} = \mathbf{W}_{accrw}, \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_{rrw} = \mathbf{W}_{rrw}, \quad (13)$$

где $\mathbf{W}_{accrw}, \mathbf{W}_{rrw}$ – белые шумы с нулевыми средними.

Составляющие \mathbf{b}_{ad} и \mathbf{b}_{gd} подчиняются дифференциальным уравнениям [18–19]:

$$\dot{\mathbf{b}}_{ad} = T_{ca} \mathbf{b}_{ad} + \mathbf{W}_{ad}, \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_{gd} = T_{cg} \mathbf{b}_{gd} + \mathbf{W}_{gd}. \quad (15)$$

где T_{ca}, T_{cg} – матрицы корреляции, $\mathbf{W}_{ad}, \mathbf{W}_{gd}$ – белые шумы с нулевыми средними. Для исследования случайных составляющих выходных сигналов инерциальных датчиков широко применяют метод анализа вариаций Аллана (Allan Variance) [21]. Задача определения характеристик (значений коэффициентов) случайных составляющих выходных сигналов инерциальных датчиков здесь не рассматривается, то есть они считаются известными.

Дискретизация алгоритма работы БИНС

Дискретизация алгоритма работы БИНС осуществляется интегрированием уравнений (1)–(3), (9)–(8), (12)–(15) по методу прямоугольников с учетом погрешностей датчиков (соотношения (4)–(5)) и без учета возмущений:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b &\cong (I_{3 \times 3} + S_g) \omega_{ib}^b + \mathbf{b}_{gS} + \mathbf{b}_{accrw} + \mathbf{b}_{ad} \Rightarrow \omega_{ib,k}^b = (I_{3 \times 3} + S_g)^{-1} \cdot (\tilde{\omega}_{ib,k}^b - \mathbf{b}_{aS,k} - \mathbf{b}_{rrw,k} - \mathbf{b}_{gd,k}); \\
 \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= \frac{1}{2} [\Omega^{(1)}(\omega_{ib}^b) - \Omega^{(2)}(\omega_{in}^n)] \cdot \bar{\mathbf{q}} \Rightarrow \bar{\mathbf{q}}_{k+1} \cong \left(I_{4 \times 4} + \frac{T_S}{2} \cdot (\Omega^{(1)}(\omega_{ib,k}^b) - \Omega^{(2)}(\omega_{in,k}^n)) \right) \cdot \bar{\mathbf{q}}_k; \\
 \dot{\mathbf{P}} &= \bar{A} \cdot \mathbf{V}^n \Rightarrow \mathbf{P}_{k+1} \cong \mathbf{P}_k + T_S \cdot \bar{A}_k \cdot \mathbf{V}_k^n; \\
 \dot{\tilde{\mathbf{f}}}^b &\cong (I_{3 \times 3} + S_a) \mathbf{f}^b + \mathbf{b}_{aS} + \mathbf{b}_{accrw} + \mathbf{b}_{ad} \Rightarrow \mathbf{f}_k^b = (I_{3 \times 3} + S_a)^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_k^b - \mathbf{b}_{aS,k} - \mathbf{b}_{accrw,k} - \mathbf{b}_{ad,k}); \\
 \dot{\mathbf{V}}^n &= -(\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n) \cdot \mathbf{V}^n + C_b^n \mathbf{f}^b + \bar{\mathbf{g}}^n \Rightarrow \mathbf{V}_{k+1}^n \cong \mathbf{V}_k^n + T_S \cdot \left(-(\Omega_{in,k}^n + \Omega_{ie,k}^n) \cdot \mathbf{V}_k^n + C_{b,k}^n \mathbf{f}_k^b + \bar{\mathbf{g}}_k^n \right); \\
 \dot{\mathbf{b}}_{gS} &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}_{gS,k+1} = \mathbf{b}_{gS,k}; \\
 \dot{\mathbf{b}}_{rrw} &\cong \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}_{rrw,k+1} = \mathbf{b}_{rrw,k}; \\
 \dot{\mathbf{b}}_{gd} &\cong T_{cg} \mathbf{b}_{gd} \Rightarrow \mathbf{b}_{gd,k+1} \cong \left(I_{3 \times 3} + T_S \cdot T_{cg} \right) \cdot \mathbf{b}_{gd,k}; \\
 \dot{\mathbf{b}}_{aS} &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}_{aS,k+1} = \mathbf{b}_{aS,k}; \\
 \dot{\mathbf{b}}_{accrw} &\cong \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}_{accrw,k+1} = \mathbf{b}_{accrw,k}; \\
 \dot{\mathbf{b}}_{ad} &\cong T_{ca} \mathbf{b}_{ad} \Rightarrow \mathbf{b}_{ad,k+1} \cong \left(I_{3 \times 3} + T_S \cdot T_{ca} \right) \cdot \mathbf{b}_{ad,k}.
 \end{aligned}$$

Полученные соотношения можно объединить следующим образом:

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k), \tag{16}$$

где $\mathbf{X}_k = \left[\bar{\mathbf{q}}_k^T \quad \mathbf{P}_k^T \quad (\mathbf{V}_k^n)^T \quad \mathbf{b}_{gS,k}^T \quad \mathbf{b}_{rrw,k}^T \quad \mathbf{b}_{gd,k}^T \quad \mathbf{b}_{aS,k}^T \quad \mathbf{b}_{accrw,k}^T \quad \mathbf{b}_{ad,k}^T \right]^T$ – вектор состояния БИНС размерности (28×1) , $f(*)$ – нелинейная вектор-функция:

$$f(\mathbf{X}_k) = \begin{bmatrix} \left(I_{4 \times 4} + \frac{T_S}{2} \cdot (\Omega^{(1)}(\omega_{ib,k}^b) - \Omega^{(2)}(\omega_{in,k}^n)) \right) \cdot \bar{\mathbf{q}}_k \\ \mathbf{P}_k + T_S \cdot \bar{A}_k \cdot \mathbf{V}_k^n \\ \mathbf{V}_k^n + T_S \cdot \left(-(\Omega_{in,k}^n + \Omega_{ie,k}^n) \cdot \mathbf{V}_k^n + C_{b,k}^n \mathbf{f}_k^b + \bar{\mathbf{g}}_k^n \right) \\ \mathbf{b}_{gS,k} \\ \mathbf{b}_{rrw,k} \\ \left(I_{3 \times 3} + T_S \cdot T_{cg} \right) \cdot \mathbf{b}_{gd,k} \\ \mathbf{b}_{aS,k} \\ \mathbf{b}_{accrw,k} \\ \left(I_{3 \times 3} + T_S \cdot T_{ca} \right) \cdot \mathbf{b}_{ad,k} \end{bmatrix},$$

k – дискретное время, соответствующее рабочей частоте $\frac{1}{T_S}$, T_S – шаг дискретизации, который принимается равным интервалу между измерениями БИНС ($T_S = \frac{1}{200} = 0.005 c$).

Расширенный фильтр Калмана

Для получения уравнения погрешностей, оцениваемых посредством расширенного ФК, требуется записать выражения для погрешностей определения век-

тора состояния БИНС \mathbf{X} . Погрешность оценки кватерниона формируется за счет его мультипликативной погрешности [11]: $\delta\hat{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \otimes \hat{\mathbf{q}}^{-1}$, где \otimes – символ произведения кватернионов, $\hat{\mathbf{q}}$ – оцениваемое (с помощью расширенного ФК) значение кватерниона. В действительности погрешность $\delta\hat{\mathbf{q}}$ представляет собой преобразование из истинной системы координат $ONED$ в вычисленную систему координат $ONED^{\sim}$. Предположим, что оценка кватерниона $\hat{\mathbf{q}}$ очень близка к истинному значению $\bar{\mathbf{q}}$, тогда $\|\delta\hat{\mathbf{q}}\| \ll 1$ и $\delta q_4 = 1$, следовательно, только векторная часть погрешности оценки кватерниона входит в $\delta\mathbf{X}$, так как $\delta\dot{q}_4 = 0$. При этом $\delta\dot{\mathbf{q}}$ подчиняется уравнению [11]

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = F_q \cdot \delta\mathbf{X} + G_q \cdot \mathbf{W}, \quad (17)$$

где

$$F_q = \begin{bmatrix} -[\omega_{ib}^b \times] & \mathbf{0}_{3 \times 6} & -\frac{1}{2}A_g & -\frac{1}{2}A_g & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix}_{3 \times 21}, G_q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}A_g & \mathbf{0}_{3 \times 15} \end{bmatrix}_{3 \times 18}, A_g = (I_{3 \times 3} + S_g)^{-1},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{arw}^T & \mathbf{W}_{rrw}^T & \mathbf{W}_{gd}^T & \mathbf{W}_{vrw}^T & \mathbf{W}_{accrw}^T & \mathbf{W}_{ad}^T \end{bmatrix}^T.$$

Тогда уравнение погрешности оценки координат ($\delta\mathbf{P} = \mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}}$) формируется следующим образом [16]. Варьируя уравнение (2), получим линеаризованное уравнение $\delta\dot{\mathbf{P}} = \delta\bar{A} \cdot \mathbf{V}^n + \bar{A} \cdot \delta\mathbf{V}^n$, которое можно переписать в виде

$$\delta\dot{\mathbf{P}} = F_P \cdot \delta\mathbf{X} + G_P \cdot \mathbf{W}, \quad (18)$$

где

$$F_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \delta\bar{A} & M_P & \mathbf{0}_{3 \times 12} \end{bmatrix}_{3 \times 21}, G_P = \mathbf{0}_{3 \times 18},$$

$$\delta\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{r^2} \\ \frac{v_E \tan \varphi}{r \cos \varphi} & 0 & -\frac{v_E}{r^2 \cos \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, r = \sqrt{N \cdot M} + h.$$

Аналогичным образом уравнение погрешности оценки скорости ($\delta\mathbf{V}^n = \mathbf{V}^n - \hat{\mathbf{V}}^n$) формируется из уравнения (1):

$$\delta\dot{\mathbf{V}}^n = F_{V^n} \cdot \delta\mathbf{X} + G_{V^n} \cdot \mathbf{W}, \quad (19)$$

где

$$F_{V^n} = \begin{bmatrix} -2C_b^n [\mathbf{f}^b \times] & M_{V, \omega 1} + M_{Vg} & M_{V, \omega 2} + M_{\delta V} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & -C_b^n A_a & -2C_b^n A_a \end{bmatrix}_{3 \times 21},$$

$$G_{V^n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 9} & -C_b^n A_a & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix}_{3 \times 18}, A_a = (I_{3 \times 3} + S_a)^{-1},$$

$$M_{V,\omega 1} = \left[\mathbf{V}^n \times \right] \begin{bmatrix} -2\omega_e \sin \varphi & 0 & -\frac{v_E}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_E}{r^2} \\ -2\omega_e \cos \varphi - \frac{v_E(1 + \tan^2 \varphi)}{r} & 0 & \frac{v_E \tan \varphi}{r^2} \end{bmatrix}, M_{V,\omega 2} = \left[\mathbf{V}^n \times \right] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tan \varphi}{r} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{Vg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin 2\varphi(g_0(a_1 + 2a_2 \sin^2 \varphi) + a_4 h) & 0 & a_3 + a_4 \sin^2 \varphi + 2a_5 h \end{bmatrix}, M_{\delta V} = -(\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n).$$

Из соотношений (12)–(15), (17)–(19) получим

$$\delta \dot{\mathbf{X}} = F \cdot \delta \mathbf{X} + G \cdot \mathbf{W}, \quad (20)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} F_q \\ F_p \\ F_{V^n} \\ 0_{3 \times 21} \\ \left[0_{3 \times 12} \quad T_{cg} \quad 0_{3 \times 6} \right] \\ 0_{3 \times 21} \\ \left[0_{3 \times 18} \quad T_{ca} \right] \end{bmatrix}_{21 \times 21}, G = \begin{bmatrix} G_q \\ G_p \\ G_{V^n} \\ \left[0_{3 \times 3} \quad I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 12} \right] \\ \left[0_{3 \times 6} \quad I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 9} \right] \\ \left[0_{3 \times 12} \quad I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3} \right] \\ \left[0_{3 \times 15} \quad I_{3 \times 3} \right] \end{bmatrix}_{21 \times 18},$$

$$\delta \mathbf{X} = \left[\delta \mathbf{q}^T \quad \delta \mathbf{P}^T \quad (\delta \mathbf{V}^n)^T \quad \mathbf{b}_{rrw}^T \quad \mathbf{b}_{gd}^T \quad \mathbf{b}_{accrw}^T \quad \mathbf{b}_{ad}^T \right]^T.$$

Здесь $(\mathbf{b}_{accrw}, \mathbf{b}_{rrw}, \mathbf{b}_{ad}, \mathbf{b}_{gd})$ рассматриваются как погрешности постоянных дрейфов.

Приведя уравнение (20) к системе разностных уравнений, получим уравнение погрешностей, оцениваемых расширенным ФК:

$$\delta \mathbf{X}_{k+1} = \Phi \cdot \delta \mathbf{X}_k + \Gamma \cdot \mathbf{W}_k. \quad (21)$$

Здесь $\Phi \cong I_{21 \times 21} + T_s \cdot F$ – матрица эволюции процесса размерности (21×21) ; $\Gamma = T_s G$ – матрица возмущений размерности (21×18) ; \mathbf{W}_k – вектор гауссовских белых последовательностей размерности (18×1) с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q_k = \text{diag}(\sigma_{arw}^2, \sigma_{rrw}^2, \sigma_{gd}^2, \sigma_{vrw}^2, \sigma_{accrw}^2, \sigma_{ad}^2)_{18 \times 18}$, где σ_i – средние квадратические отклонения.

Коррекция БИНС осуществляется с использованием информации от СНС. Координаты $\mathbf{P}_{SNS} = [\varphi_{SNS} \quad \lambda_{SNS} \quad h_{SNS}]^T$ и составляющие скорости $\mathbf{V}_{SNS}^n = [v_{N/SNS} \quad v_{E/SNS} \quad v_{D/SNS}]^T$, измеряемые приемником СНС, используются для формирования вектора измерений следующим образом:

$$\mathbf{P}_{SNS} = \mathbf{P} + \mathbf{v}_P^{SNS} = \hat{\mathbf{P}} + \delta\mathbf{P} + \zeta_P^{SNS}, \quad (22)$$

$$\mathbf{V}_{SNS}^n = \mathbf{V}^n + \mathbf{v}_{V^n}^{SNS} = \hat{\mathbf{V}}^n + \delta\mathbf{V}^n + \zeta_{V^n}^{SNS}, \quad (23)$$

где \mathbf{P}, \mathbf{V}^n – истинные значения координат и скорости, $\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{V}}^n$ – оценки координат и скорости, $\zeta_P^{SNS}, \zeta_{V^n}^{SNS}$ – белые шумы с нулевыми средними. Соотношения (22) и (23) можно переписать в виде:

$$\delta\mathbf{P}_{SNS} = \mathbf{P}_{SNS} - \hat{\mathbf{P}} = \delta\mathbf{P} + \zeta_P^{SNS}, \quad (24)$$

$$\delta\mathbf{V}_{SNS}^n = \mathbf{V}_{SNS}^n - \hat{\mathbf{V}}^n = \delta\mathbf{V}^n + \zeta_{V^n}^{SNS}. \quad (25)$$

Соотношения (24) и (25) можно объединить следующим образом:

$$\delta\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{P}_{SNS} \\ \delta\mathbf{V}_{SNS}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_P^{SNS} \\ \zeta_{V^n}^{SNS} \end{bmatrix} = H \cdot \delta\mathbf{X} + \zeta^{SNS}, \quad (26)$$

где $H = [0_{6 \times 3}, I_{6 \times 6}, 0_{6 \times 12}]_{6 \times 21}$. Запишем уравнение (26) в дискретном времени:

$$\delta\mathbf{Z}_i = H \cdot \delta\mathbf{X}_i + \zeta_i^{SNS}, \quad (27)$$

где i – шаг дискретизации на рабочей частоте измерения $\frac{1}{T_{SNS}}$, ζ_i^{SNS} – белые шумы размерности (6×1) с нулевыми средними, нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R_i = \text{diag}((\sigma_P^{SNS})^2, (\sigma_{V^n}^{SNS})^2)_{6 \times 6}$.

Соотношение (27) представляет собой уравнение измерения расширенного ФК. Коррекция БИНС осуществляется в частоте СНС (в данном случае частота измерения СНС равна 5 Гц). Реализация расширенного ФК состоит из двух этапов [4]: прогнозирования и коррекции. На первом этапе рассчитывается предполагаемое состояние БИНС в следующий момент времени (априорные оценки, прогноз), которое можно получить из соотношения (16). На втором этапе априорные оценки корректируются с учетом новой информации. Таким методом получают апостериорные оценки.

Сигма-точечный фильтр Калмана

Сигма-точечный ФК является распространением линейной фильтрации Калмана, если уравнения динамики и наблюдения системы нелинейные и не могут быть адекватно линеаризованы. Этот алгоритм использует подход сигма-точечного преобразования, который подразумевает выбор некоего минимального набора $2n + 1$ сигма-точек, где n – размерность вектора состояния, для вычисления математического ожидания и ковариации искомого вектора. По сигма-точкам строятся нелинейные функции прогноза, которые затем используются для вычисления матрицы ковариации. Основная идея сигма-точечного преобразования основана на предположении, что при фиксированном числе заданных параметров плотность распределения удобнее аппроксимировать гауссовской кривой,

чем произвольной нелинейной функцией [4, 7, 11]. Уравнения состояния БИНС с учетом возмущений представляются в виде следующей нелинейной системы:

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k) + G_k \cdot \mathbf{W}_k, \quad (28)$$

где

$$G_k = \begin{bmatrix} G_{W\bar{q}} & 0_{4 \times 15} \\ & 0_{4 \times 18} \\ 0_{3 \times 3} & C_b^n & 0_{3 \times 12} \\ & 0_{3 \times 18} \\ 0_{3 \times 6} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 9} \\ 0_{3 \times 9} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ & 0_{3 \times 18} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 12} \\ & 0_{3 \times 15} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{28 \times 18}, \quad G_{W\bar{q}} = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}_{4 \times 3}.$$

Уравнение измерений представляется в виде

$$\mathbf{Z}_k = h(\mathbf{X}_k) + \zeta_k. \quad (29)$$

Здесь $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{P}_{SNS}^T \quad (\mathbf{V}_{SNS}^n)^T]_k^T$ – измерения от СНС, $h(\mathbf{X}_k) = [\mathbf{P}^T \quad (\mathbf{V}^n)^T]_k^T$.

Сигма-точечный ФК можно представить в виде процедуры «прогноз–коррекция». Для инициализации сигма-точечного ФК осуществляется вычисление весовых коэффициентов для каждой из $2n + 1$ точек согласно правилу [4–5]:

$$W_j^{mean} = \begin{cases} \frac{1}{n + \lambda}, j = 0, \\ \frac{\lambda}{2(n + \lambda)}, j = 2, \dots, 2n; \end{cases} \quad W_j^{cov} = \begin{cases} \frac{1}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), j = 0, \\ \frac{\lambda}{2(n + \lambda)}, j = 2, \dots, 2n; \end{cases}$$

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n.$$

Здесь α, β, κ – параметры, определяющие положения сигма-точек в пространстве состояний. Согласно [7], α и κ регулируют разброс точек относительно математического ожидания. Параметр β отвечает за учет четвертого момента. Для нормального распределения принято задавать значения этих параметров: $\kappa = 0, \beta = 2, \alpha = 10^{-4} \dots 1$ [7]. В данной реализации $\alpha = 5 \times 10^{-3}$.

Реализация сигма-точечного ФК состоит из двух этапов: прогноза и коррекции. На этапе прогноза осуществляется генерирование $2n + 1$ сигма-точек, которые помещаются в матрицу \mathbf{S}_k по столбцам согласно правилу:

$$\mathbf{S}_k = [\hat{\mathbf{X}}_k^+, \hat{\mathbf{X}}_k^+ + \gamma\sqrt{P_k^+}, \hat{\mathbf{X}}_k^+ - \gamma\sqrt{P_k^+}], \gamma = \sqrt{n + \lambda}.$$

Здесь P_k^+ – матрицы ковариации. Эффективным методом вычисления квадратного корня матрицы P_k^+ является разложение Холецкого. Надстрочный ин-

декс $(^+)$ обозначает апостериорную оценку. Матрица S_k имеет размерность $n \times (2n+1)$. Далее для обозначения столбца матрицы S_k будем обозначать его номер индексом j . Так, например, запись $S_{k,j}$ означает вектор-столбец, сформированный из j -го столбца матрицы S_k . Далее, следуя алгоритму, столбцы матрицы S_k пропускаются через нелинейную функцию $f(*)$:

$$S_{k+1} = f(S_k).$$

Затем вычисляется прогноз оценки состояния с использованием взвешенной суммы:

$$\hat{X}_{k+1}^- = \sum_{j=0}^{2n} W_j^{mean} S_{k,j}.$$

Надстрочный индекс $(^-)$ обозначает априорную оценку. Матрица ковариации вычисляется также с использованием взвешенной суммы:

$$P_{k+1}^- = \sum_{j=0}^{2n} W_j^{cov} (S_{k,j} - X_{k+1}^-)(S_{k,j} - X_{k+1}^-)^T + G_k Q_k G_k^T.$$

На этапе коррекции осуществляется уточнение оценки вектора состояния и матрицы ковариации:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1}^+ &= \hat{X}_{k+1}^- + K_{k+1}(\mathbf{Z}_{k+1} - \mathbf{Z}_{k+1}^-), \\ P_{k+1}^+ &= P_{k+1}^- - K_{k+1} P_{k+1}^- K_{k+1}^T, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k+1}^- &= \sum_{j=0}^{2n} W_j^{mean} h(S_{k+1,j}); \quad K_{k+1} = P_{k+1}^{XZ} (P_{k+1}^{ZZ})^{-1}, \\ P_{k+1}^{XZ} &= \sum_{j=0}^{2n} W_j^{cov} (S_{k+1,j} - X_{k+1}^-)(h(S_{k+1,j}) - \mathbf{Z}_{k+1}^-)^T, \\ P_{k+1}^{ZZ} &= \sum_{j=0}^{2n} W_j^{cov} (h(S_{k+1,j}) - \mathbf{Z}_{k+1}^-)(h(S_{k+1,j}) - \mathbf{Z}_{k+1}^-)^T + R_{k+1}. \end{aligned}$$

Настройка расширенного и сигма-точечного ФК

Перед запуском алгоритмов расширенного и сигма-точечного ФК необходимо задать начальные условия для оценочного вектора состояния $\hat{X}(0)$ и матрицы $P(0)$. Начальные значения координат и скоростей задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{P}_{SNS}(0) + \sigma_{\mathbf{P}}^{SNS}, \\ \mathbf{V}^n(0) &= \mathbf{V}_{SNS}^n(0) + \sigma_{\mathbf{V}^n}^{SNS}. \end{aligned}$$

Это значит, что начальные погрешности в определении координат и скоростей равны $\sigma_{\mathbf{p}}^{SNS}$, $\sigma_{\mathbf{v}^n}^{SNS}$ соответственно. Начальные значения углов ориентации (ϕ, θ, ψ) приведены вместе с экспериментальными данными: $\phi(0) = \phi_{IA}$, $\theta(0) = \theta_{IA}$, $\psi(0) = \psi_{IA}$, IA обозначает начальную выставку (initial alignment).

Начальные углы ориентации преобразуются в кватернион с помощью отношений [16]:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= \sin \frac{\phi(0)}{2} \cos \frac{\theta(0)}{2} \cos \frac{\psi(0)}{2} - \cos \frac{\phi(0)}{2} \sin \frac{\theta(0)}{2} \sin \frac{\psi(0)}{2}, \\ q_2(0) &= \cos \frac{\phi(0)}{2} \sin \frac{\theta(0)}{2} \cos \frac{\psi(0)}{2} - \sin \frac{\phi(0)}{2} \cos \frac{\theta(0)}{2} \sin \frac{\psi(0)}{2}, \\ q_3(0) &= \cos \frac{\phi(0)}{2} \cos \frac{\theta(0)}{2} \sin \frac{\psi(0)}{2} - \sin \frac{\phi(0)}{2} \sin \frac{\theta(0)}{2} \cos \frac{\psi(0)}{2}, \\ q_4(0) &= \cos \frac{\phi(0)}{2} \cos \frac{\theta(0)}{2} \cos \frac{\psi(0)}{2} - \sin \frac{\phi(0)}{2} \sin \frac{\theta(0)}{2} \sin \frac{\psi(0)}{2}. \end{aligned}$$

В данной работе точность начальной выставки определяется как

$$\delta\phi_{IA} = 1^\circ, \delta\theta_{IA} = 1^\circ, \delta\psi_{IA} = 2^\circ.$$

Начальные значения постоянных дрейфов гироскопов и акселерометров равны нулю: $\mathbf{b}_{gS}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{b}_{aS}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$.

Для ковариационной матрицы P задавались следующие начальные значения в случае расширенного ФК:

$$P_{EKF}(0) = \text{diag} \left((\delta\mathbf{q}_{IA})^2, (\sigma_{\mathbf{p}}^{SNS})^2, (\sigma_{\mathbf{v}^n}^{SNS})^2, \sigma_{rrw}^2, \sigma_{gd}^2, \sigma_{accrw}^2, \sigma_{ad}^2 \right)_{21 \times 21},$$

где $\delta\mathbf{q}_{IA}$ обозначает точность начальной выставки. В случае сигма-точечного ФК

$$P_{SPKF}(0) = \text{diag} \left((\delta\bar{\mathbf{q}}_{IA})^2, (\sigma_{\mathbf{p}}^{SNS})^2, (\sigma_{\mathbf{v}^n}^{SNS})^2, (\delta\mathbf{b}_{gS}(0))^2, \sigma_{rrw}^2, \sigma_{gd}^2, (\delta\mathbf{b}_{aS}(0))^2, \sigma_{accrw}^2, \sigma_{ad}^2 \right)_{28 \times 28},$$

где $\delta\bar{\mathbf{q}}_{IA} = [\delta\mathbf{q}_{AI}^T \ \delta q_{4/IA}]^T$, $\delta\mathbf{b}_{gS}(0), \delta\mathbf{b}_{aS}(0)$ обозначает начальные погрешности в определении постоянных дрейфов гироскопов и акселерометров. Задавались следующие значения:

$$\delta\mathbf{b}_{gS}(0) = [2 \times 10^{-4} \ 2 \times 10^{-4} \ 2 \times 10^{-4}]^T, \delta\mathbf{b}_{aS}(0) = [2 \times 10^{-2} \ 2 \times 10^{-2} \ 2 \times 10^{-2}]^T.$$

Ковариационная матрица P должна быть положительной и полуопределенной. Для обеспечения этого условия на каждой итерации программы выполняется вычисление P по формуле

$$P = \frac{1}{2}(P + P^T).$$

Результаты эксперимента

Для оценивания эффективности расширенного и сигма-точечного ФК используются необработанные данные эксперимента, полученные с БИНС (Ekinox INS [22]) на базе технологии МЭМС. Характеристики гироскопов и акселерометров данной БИНС были получены в работах [23–24] с помощью метода анализа по вариациям Аллана. В качестве СНС используется приемник с двойной антенной (ГЛОНАСС + GPS) с точностью определения координат: 0,5 м – для широты и долготы, 1 м – для высоты и 0,1 м/с – для скорости. Системы были установлены на поперечном алюминиевом стержне на крыше автомобиля, как показано на рис. 3, *а*. Частоты дискретизации данных БИНС и СНС – 200 Гц и 5 Гц соответственно. Экспериментальные данные были получены в городе Турине (45°03'49"N 7°39'21"E) в Италии [23]. Для сравнения используются эталонные значения координат, скоростей, углов ориентации и постоянных дрейфов гироскопов и акселерометров наряду с необработанными данными. Эталонные значения получены постобработкой данных БИНС и СНС с использованием программы Inertial Explorer, NovAtel Inc [25]. На рис. 3, *б* показана траектория движения автомобиля.

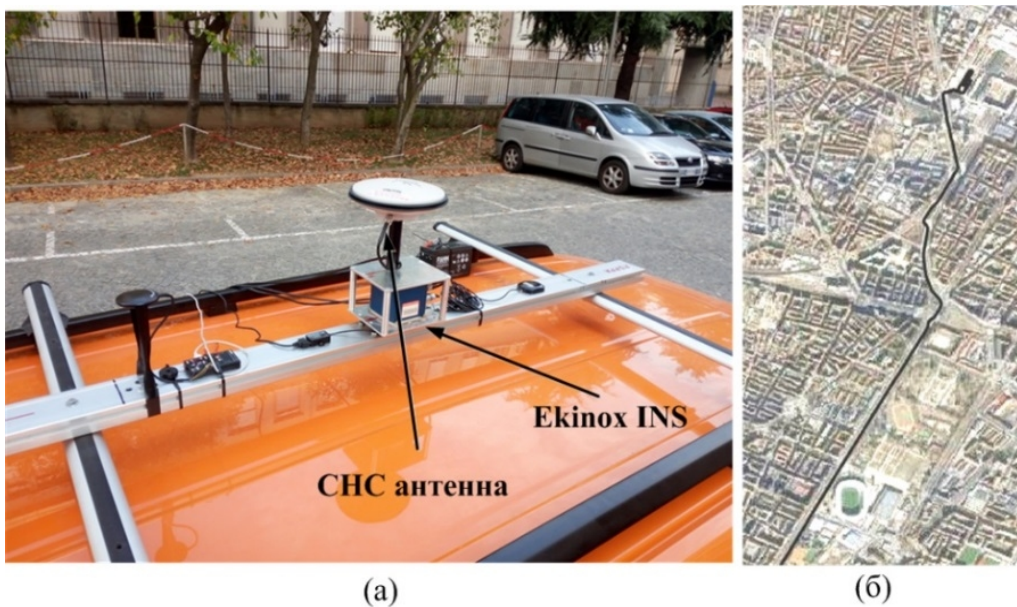


Рис. 3. *а* – навигационное оборудование, расположенное на поперечной балке автомобиля;
б – траектория движения автомобиля

На первом этапе оцениваются результаты применения расширенного и сигма-точечного ФК, когда доступен сигнал СНС. На рис. 4 показаны результаты оценивания постоянных дрейфов гироскопов и акселерометров. Кривые приближаются к значениям оцениваемых дрейфов. При наличии случайных возмущений и погрешностей измерений нулевые погрешности оценивания принципиально недостижимы. Можно отметить, что времена переходных процессов составляют около 50 с. По сравнению с расширенным сигма-точечный ФК достигает истинных значений быстрее и с большей точностью.

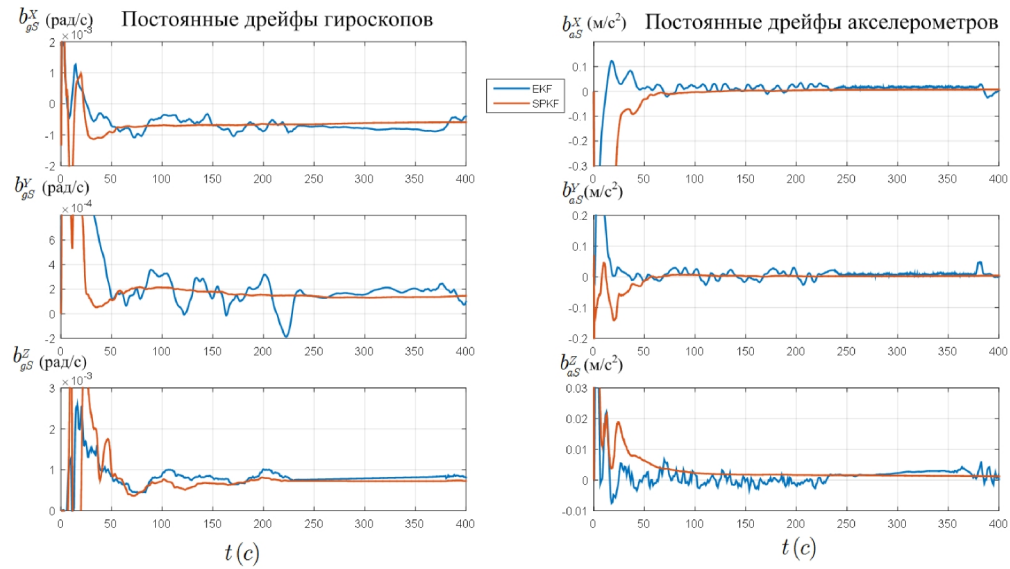


Рис. 4. Результаты оценивания постоянных дрейфов гироскопов и акселерометров с использованием расширенного и сигма-точечного ФК

На рис. 5 показаны погрешности оценивания углов Эйлера ($\delta\phi, \delta\theta, \delta\psi$) с использованием расширенного и сигма-точечного ФК, а также евклидово расстояние между двумя векторами ($\mathbf{f}^b, \mathbf{g}^b$): $\|\mathbf{f}^b - \mathbf{g}^b\| = \sqrt{(f_x^b - g_x^b)^2 + (f_y^b - g_y^b)^2 + (f_z^b - g_z^b)^2}$, где $\mathbf{g}^b = C_n^b \mathbf{g}^n$ – вектор гравитационного ускорения в связанной системе координат $OXYZ$.

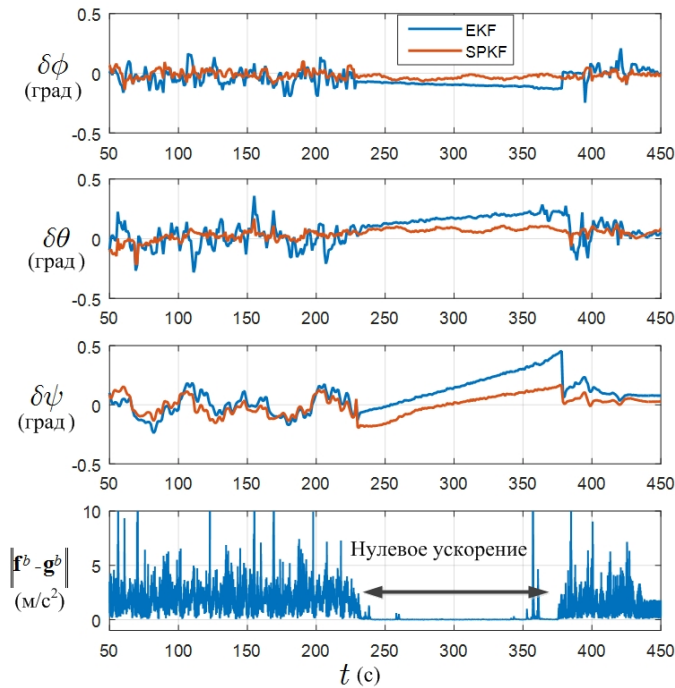


Рис. 5. Влияние изменения ускорения на точность оценки углов ориентации с использованием расширенного и сигма-точечного ФК

При нулевых (или относительно малых) значениях $\|\mathbf{f}^b - \mathbf{g}^b\|$ погрешность оценки углов ориентации резко возрастает, что вызвано ненаблюдаемостью дрейфов гироскопов (рис. 4). Это совпадает с результатами, полученными в [26–29], где детально рассмотрена проблема наблюдаемости погрешности состояния в ИНС/СНС с использованием расширенного ФК. В этих работах было показано, что все ненаблюдаемые погрешности могут быть наблюдаемыми при маневрировании. Изменения ускорения улучшают оценки углов ориентации и дрейфов гироскопов. Таким образом, можно отметить, что проблема наблюдаемости в меньшей степени проявляется в сигма-точечном ФК, чем в расширенном ФК (рис. 5).

Для сопоставления расширенного и сигма-точечного ФК проведен анализ соответствия вырабатываемых оценок расчетным значениям ковариаций погрешностей оценивания. На рис. 6 показаны реализации погрешностей оценивания координат и скоростей, а также предельные значения $\pm 3\sigma$, где величина σ рассчитывалась как квадратный корень из соответствующего диагонального элемента матрицы P . Погрешности оценивания координат показаны в метрах, где угловые величины умножаются на соответствующие радиусы кривизны меридиана и параллели.

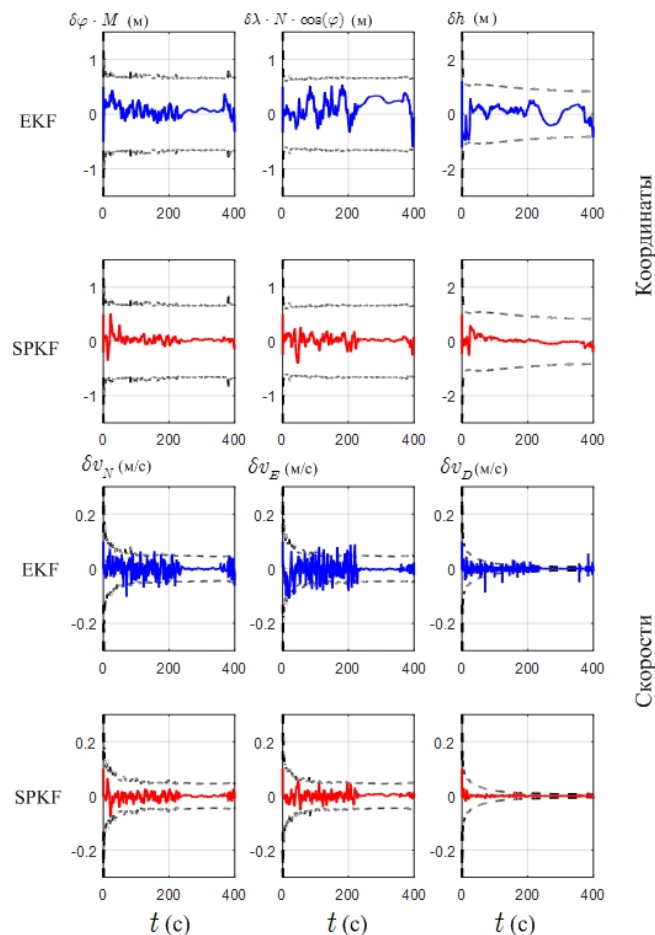


Рис. 6. Погрешности оценивания координат и скорости и расчетные предельные погрешности $\pm 3\sigma$, полученные при использовании расширенного и сигма-точечного ФК

Анализ рис. 6 показывает, что погрешности формируемых с использованием сигма-точечного ФК оценок согласуются с расчетными среднеквадратическими значениями, в то время как в случае применения расширенного ФК наблюдаются превышения расчетных предельных значений (случаи $\delta v_E, \delta v_D$). Результаты проведенного анализа совпадают с результатами, полученными в работе [11], и подтверждают превосходство сигма-точечного ФК над расширенным при наличии сигнала СНС.

Проверим эффективность расширенного и сигма-точечного ФК при отсутствии сигнала СНС для 7 имитированных отключений сигнала, периоды всех отключений – 60 с. На рис. 7 показаны полученные и эталонная траектории.

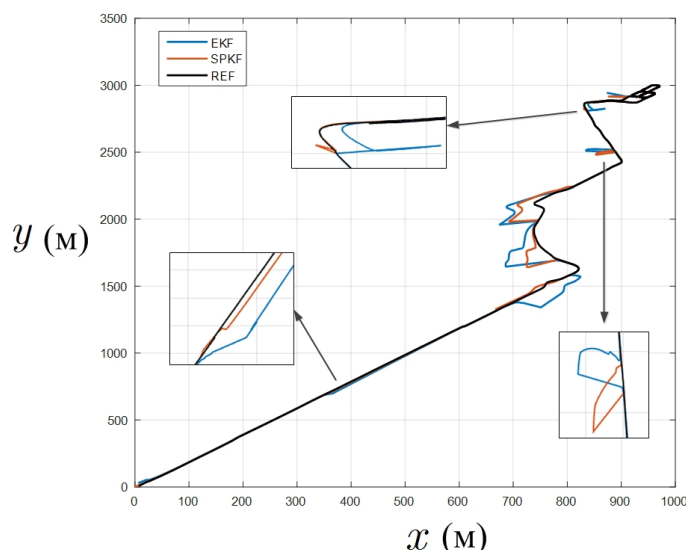


Рис. 7. Траектории движения автомобиля при имитированных отключениях сигнала СНС;
 $x = (\lambda - \lambda_0) \cdot N \cdot \cos \varphi$, $y = (\varphi - \varphi_0) \cdot M$

На рис. 8 показана погрешность оценивания координат E_{XYZ} с использованием расширенного и сигма-точечного ФК при отключениях сигнала СНС. Погрешность E_{XYZ} задается расстоянием между истинными координатами и оцененными с помощью фильтра (расширенного и сигма-точечного ФК) координатами по формуле $E_{XYZ} = \sqrt{(X_{REF}^e - X_{KF}^e)^2 + (Y_{REF}^e - Y_{KF}^e)^2 + (Z_{REF}^e - Z_{KF}^e)^2}$, где координаты написаны в системе $O_e X_e Y_e Z_e$. Здесь тоже сигма-точечный ФК превосходит расширенный по точности оценивания координат.

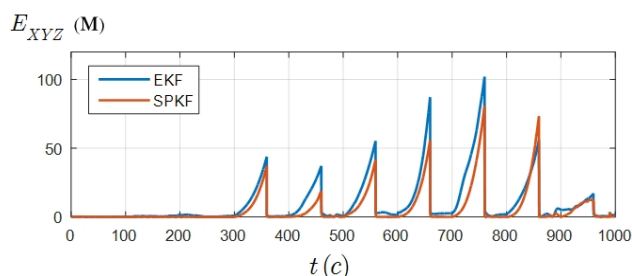


Рис. 8. Погрешность оценивания координат с использованием расширенного и сигма-точечного ФК при 7 отключениях сигнала СНС

Для анализа эффективности расширенного и сигма-точечного ФК в таблице приведены значения абсолютных величин погрешностей навигационных параметров, оцененных с использованием расширенного и сигма-точечного ФК при 7 отключениях сигнала СНС. Погрешность задается как разность между оценочными и эталонными параметрами. Погрешности широты и долготы задаются в метрах (угловые величины умножаются на соответствующие радиусы кривизны меридиана и параллели). В последнем столбце приведены средние значения модулей погрешностей. Результаты показывают, что в общем случае погрешности оценивания сигма-точечного ФК при отключениях сигнала СНС значительно меньше, чем у расширенного ФК (таблица).

Т а б л и ц а

Навигационный параметр	КФ	Отключения сигнала СНС (60 с)							Среднее значение
		1	2	3	4	5	6	7	
φ (м)	Расширенный ФК	20,4	15,1	54,7	85,5	90,3	42,9	13,2	46,0
	Сигма-точечный ФК	18,4	16,1	37,5	55,4	60,3	40,5	4,0	33,2
λ (м)	Расширенный ФК	40,1	35,0	9,6	25,2	50,4	37,2	6,6	29,2
	Сигма-точечный ФК	35,5	8,2	20,4	11,6	48,2	62,0	10,2	28,0
h (м)	Расширенный ФК	1,3	1,2	3,9	2,6	4,1	1,8	7,0	3,1
	Сигма-точечный ФК	0,4	1,1	2,0	2,3	0,7	1,5	5,4	1,9
v_N (м/с)	Расширенный ФК	0,83	0,48	0,69	0,82	1,67	1,91	0,42	0,97
	Сигма-точечный ФК	0,64	0,42	0,40	0,34	1,4	1,49	0,19	0,69
v_E (м/с)	Расширенный ФК	1,06	0,86	1,41	1,2	2,47	1,44	0,41	1,26
	Сигма-точечный ФК	0,98	0,25	1,61	1,51	2,03	1,72	0,49	1,23
v_D (м/с)	Расширенный ФК	0,06	0,06	0,07	0,06	0,09	0,04	0,12	0,07
	Сигма-точечный ФК	0,04	0,05	0,05	0,05	0,02	0,03	0,08	0,05
ϕ (град)	Расширенный ФК	0,21	0,14	0,21	0,28	0,34	0,25	0,10	0,22
	Сигма-точечный ФК	0,17	0,07	0,18	0,25	0,23	0,10	0,07	0,15
θ (град)	Расширенный ФК	0,08	0,07	0,28	0,32	0,41	0,58	0,17	0,27
	Сигма-точечный ФК	0,04	0,05	0,17	0,24	0,31	0,34	0,14	0,18
ψ (град)	Расширенный ФК	0,90	1,20	1,02	0,62	0,82	0,54	1,12	0,89
	Сигма-точечный ФК	0,55	0,95	0,79	0,52	0,31	0,25	0,81	0,60

З а к л ю ч е н и е

В статье рассмотрена задача интеграции БИНС/СНС на основе слабосвязанной схемы комплексирования с применением алгоритмов расширенного и сиг-

ма-точечного ФК. Используются полные стохастические модели измерений инерциальных датчиков на базе МЭМС-технологии. Эффективность расширенного и сигма-точечного ФК подтверждена на основе реальных экспериментальных данных от БИНС и СНС. Результаты испытаний продемонстрировали способность обоих фильтров к оцениванию постоянных дрейфов инерциальных датчиков. Сигма-точечный ФК обеспечивает более высокую точность по сравнению с расширенным ФК как при наличии сигнала СНС, так и при его отсутствии. Показано, что проблема наблюдаемости в меньшей степени характерна для сигма-точечного ФК, чем для расширенного ФК.

Приведен статистический анализ погрешностей оценивания расширенного и сигма-точечного ФК для отключений сигнала СНС. Сигма-точечный ФК более надежен и обеспечивает более высокую точность. Полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [11–14], и подтверждают большую эффективность сигма-точечного ФК по сравнению с расширенным ФК для задачи интеграции БИНС/СНС на основе слабосвязанной схемы комплексирования. Недостатком сигма-точечного ФК являются вычислительные затраты на определение сигма-точек и их обработку нелинейной функцией (уравнением процесса) и вычисление матричного квадратного корня, однако это несущественно в случае использования высокопроизводительных вычислительных средств либо при распараллеливании процесса вычислений. Перспективным является применение технологии искусственного интеллекта (нейронных сетей, например) для оценки и компенсации погрешностей сигма-точечного ФК при отсутствии сигнала СНС [30].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Salychev, O.S.**, Inertial systems in navigation and geophysics. Moscow: Bauman MSTU Press, 1998. 352 pp.
2. **Grewal, M.S., Weill, L.R., Andrews, A.P.**, Global positioning systems, inertial navigation, and integration. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2007. 408 pp.
3. **Матвеев В.В., Распопов В.Я.** Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2009. 278 с.
4. **Crassidis, J.L., Junkins, J.L.**, Optimal estimation of dynamic systems. 2nd ed. New York: CRC press, 2011. 749 pp.
5. **Kong, X., Wu, W., Zhang, L., & Wang, Y.**, Tightly-coupled stereo visual-inertial navigation using point and line features, *Sensors*, 2015, 15(6), 12816–12833.
6. **Shang, J., Hu, X., Gu, F., Wang, D., & Yu, S.**, Improvement schemes for indoor mobile location estimation: A survey, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
7. **Wan, E.A., Van Der Merwe, R.**, The unscented Kalman filter for nonlinear estimation, *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, IEEE, 2000, pp. 153–158.
8. **Li, F., Chang, L., Hu, B., & Li, K.**, Marginalized unscented quaternion estimator for integrated INS/GPS, *The Journal of Navigation*, 2016, 69(5), 1125–1142.
9. **LaViola, J.J.**, A comparison of unscented and extended Kalman filtering for estimating quaternion motion, *American Control Conference*, 2003, vol. 3. pp. 2435–2440.
10. **El-Sheimy, N., Shin, E.H., Niu, X.**, Kalman filter face-off: Extended vs. unscented Kalman filters for integrated GPS and MEMS inertial, *Inside GNSS*, 2006, vol. 1, no. 2, pp. 48–54.
11. **Crassidis, J.L.**, Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 750–756.
12. **Конаков А.С., Шаврин В.В., Тисленко В.И., Савин А.А.** Сравнительный анализ среднеквадратической погрешности определения координат объекта в бесплатформенной инерциальной навигационной системе при использовании различных алгоритмов нелинейной фильтрации // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2012. № 1-1 (25). С. 5–9.
13. **Шаврин В.В., Тисленко В.И., Лебедев В.Ю., Конаков А.С., Филимонов В.А., Кравец А.П.** Квазиоптимальная оценка параметров сигналов ГНСС в режиме когерентного приема

- с использованием алгоритма сигма-точечного фильтра Калмана // Гирокоспия и навигация. 2016, № 3 (94). С. 26–37.
14. **Болотин Ю.В., Фатехрад М.** Навигация пешехода с использованием бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), установленной на стопе // Российский журнал биомеханики, Т. 19, № 1, 2015. С. 25–36.
 15. **Ryu, J.H., Gankhuyag, G., Chong, K.T.**, Navigation system heading and position accuracy improvement through GPS and INS data fusion, *Journal of Sensors*, 2016, vol. 2016, pp. 1–6.
 16. **Jekeli, C.**, Inertial navigation systems with geodetic applications. Berlin: Walter de Gruyter, 2001. 352 pp.
 17. **Емельянец Г.И., Степанов А.П.** Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб.: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
 18. **Матвеев В.В.** Инерциальные навигационные системы: Учебное пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. 199 с.
 19. **Quinchia, A.G., Falco, G., Falletti, E., Dovis, F., Ferrer, C.**, A comparison between different error modeling of MEMS applied to GPS/INS integrated systems, *Sensors*, 2013, vol. 13, no. 8, pp. 9549–9588.
 20. **Martin, H., Groves, P., & Newman, M.**, The Limits of In-Run Calibration of MEMS Inertial Sensors and Sensor Arrays, *NAVIGATION: Journal of The Institute of Navigation*, 2016(63(2)), 127–143.
 21. **Hou, H., El-Sheimy, N.**, Inertial sensors errors modeling using Allan variance, *Proceedings of the 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS/GNSS 2003)*, 2001, pp. 2860–2867.
 22. **SBG Systems**, Ekinox INS – User Manual: EKINOXINSUM.1.2 Revision 1.2, Mar 6, 2014.
 23. **Gonzalez, R., Catania, C.A., Dabove, P., Taffernaberry, J.C., Piras, M.**, Model validation of an open-source framework for post-processing INS/GNSS systems, *Proceedings of the 3rd International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management (GISTAM 2017)*, Porto, 2017, pp. 201–208.
 24. **Gonzalez, R.**, NaveGo: an open-source MATLAB/GNU Octave toolbox for simulating integrated navigation systems and performing Allan variance analysis, 2016. URL: www.github.com/rodrazlez/NaveGo/.
 25. **NovAtel Inc.** Inertial Explorer R User Guide version 8.50, OM-20000106, Rev 9. Canada, 2013.
 26. **Hong, S., Lee, M.H., Chun, H.H., Kwon, S.H., Speyer, J.L.**, Observability of error states in GPS/INS integration, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2005, vol. 54, no. 2, pp. 731–743.
 27. **Tang, Y., Wu, Y., Wu, M., Wu, W., Hu, X., Shen, L.**, INS/GPS integration: Global observability analysis, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, vol. 58, no. 3, pp. 1129–1142.
 28. **Klein, I., & Diamant, R.**, Observability Analysis of Heading Aided INS for a Maneuvering AUV, *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, 2018, 65(1), 73–82.
 29. **Shen, K., Xia, Y., Wang, M., Neusybin, K. A., & Proletarsky, A. V.**, Quantifying Observability and Analysis in Integrated Navigation, *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, 2018, 65(2), 169–181.
 30. **Аль Битар Н., Гаврилов А.И.** Технологии интеллектуальных вычислений в задачах повышения точности интегрированных навигационных систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2019. № 1. С. 62–89.

Al Bitar, N. and Gavrilov, A. I. (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia) Comparative Analysis of Fusion Algorithms in a Loosely-Coupled Integrated Navigation System on the Basis of Real Data Processing, *Girokopiya i Navigatsiya*, 2019, vol. 27, no. 3 (106), pp. 31–52.

Abstract. The paper presents a comparative analysis of the extended Kalman filter (EKF) and the sigma-point Kalman filter (SPKF) applied to solve the problem of SINS/GNSS integration based on a loosely-coupled integration scheme. Complete stochastic measurement models of MEMS inertial sensors are considered. The efficiency of the EKF and the SPKF is evaluated using real experimental data on complex motion from an SINS based on MEMS technology and a GNSS receiver with a double

antenna. The estimation accuracy of navigation parameters using the EKF and the SPKF in the presence of the GNSS signal and during the GNSS outages is analyzed. The results of the statistical analysis of the errors in estimating navigation parameters for different periods of GNSS signal outage are considered.

Key words: strapdown inertial navigation systems, satellite navigation systems, sigma-point Kalman filter, extended Kalman filter, MEMS.

REFERENCES

1. **Salychev, O.S.**, *Inertial Systems in Navigation and Geophysics*, Moscow: Bauman MSTU Press, 1998.
2. **Grewal, M.S., Weill, L.R., and Andrews, A.P.**, *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*, 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 2007.
3. **Matveev, V.V. and Raspopov, V.Ya.**, *Osnovy postroyeniya besplatformennykh inertial'nykh navigatsionnykh sistem* (Fundamentals of Designing Strapdown Inertial Navigation Systems), St. Petersburg: TsNII Elektropribor, 2009.
4. **Crassidis, J.L. and Junkins, J.L.**, *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, 2nd ed., New York: CRC Press, 2011.
5. **Kong, X., Wu, W., Zhang, L., and Wang, Y.**, Tightly-coupled stereo visual-inertial navigation using point and line features, *Sensors*, 2015, 15(6), pp. 12816–12833.
6. **Shang, J., Hu, X., Gu, F., Wang, D., and Yu, S.**, Improvement schemes for indoor mobile location estimation: A survey, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
7. **Wan, E.A. and Van Der Merwe, R.**, The unscented Kalman filter for nonlinear estimation, *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, IEEE, 2000, pp. 153–158.
8. **Li, F., Chang, L., Hu, B., and Li, K.**, Marginalized unscented quaternion estimator for integrated INS/GPS, *The Journal of Navigation*, 2016, 69(5), pp. 1125–1142.
9. **LaViola, J.J.**, A comparison of unscented and extended Kalman filtering for estimating quaternion motion, *American Control Conference*, 2003, vol. 3, pp. 2435–2440.
10. **El-Sheimy, N., Shin, E.H., and Niu, X.**, Kalman filter face-off: Extended vs. unscented Kalman filters for integrated GPS and MEMS inertial, *Inside GNSS*, 2006, vol. 1, no. 2, pp. 48–54.
11. **Crassidis, J.L.**, Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 750–756.
12. **Konakov, A.S., Shavrin, V.V., Tislenko, V.I., and Savin, A.A.**, Comparative analysis of the root-mean-square error in determining an object's coordinates of in a strapdown inertial navigation system using various nonlinear filtering algorithms, *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki*, 2012, no. 1-1 (25), pp. 5–9.
13. **Shavrin, V.V., Tislenko, V.I., Lebedev V.Yu., Konakov A.S., Filimonov, V.A., and Kravets, A.P.**, Quasi-optimal estimation of GNSS signal parameters in coherent reception mode using the sigma-point Kalman filter algorithm, *Girokopiya i Navigatsiya*, 2016, no. 3 (94), pp. 26–37.
14. **Bolotin, Yu.V. and Fatekhrad, M.**, Pedestrian navigation using a strapdown inertial navigation system (SINS) on a foot, *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, vol. 19, no. 1, 2015, pp. 25–36.
15. **Ryu, J.H., Gankhuyag, G., and Chong, K.T.**, Navigation system heading and position accuracy improvement through GPS and INS data fusion, *Journal of Sensors*, 2016, vol. 2016, pp. 1–6.
16. **Jekeli, C.**, *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*, Berlin: Walter de Gruyter, 2001.
17. **Emel'yantsev, G.I. and Stepanov, A.P.**, *Integrirovannyye inertial'no-sputnikovyye sistemy orientatsii i navigatsii* (Integrated INS-GNSS Orientation and Navigation Systems), Peshekhonov, V.G., Ed., St. Petersburg: Kontsern TsNII Elektropribor, 2016.
18. **Matveev, V.V.**, *Inertial'nye navigatsionnye sistemy: Uchebnoye posobiye* (Inertial Navigation Systems: Tutorial), Tula: TulGU, 2012.
19. **Quinchia, A.G., Falco, G., Falletti, E., Dovis, F., and Ferrer, C.**, A comparison between different error modeling of MEMS applied to GPS/INS integrated systems, *Sensors*, 2013, vol. 13, no. 8, pp. 9549–9588.
20. **Martin, H., Groves, P., and Newman, M.**, The limits of in-run calibration of MEMS inertial sensors and sensor arrays, *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, 2016(2), pp. 127–143.
21. **Hou, H. and El-Sheimy, N.**, Inertial sensors errors modeling using Allan variance, *Proceedings of the 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS/GNSS 2003)*, 2001, pp. 2860–2867.

22. **SBG Systems**, Ekinox INS – User Manual: EKINOXINSUM.1.2 Revision 1.2, Mar 6, 2014.
23. **Gonzalez, R., Catania, C.A., Dabove, P., Taffernaberry, J.C., and Piras, M.**, Model validation of an open-source framework for post-processing INS/GNSS systems, *Proceedings of the 3rd International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management (GISTAM 2017)*, Porto, 2017, pp. 201–208.
24. **Gonzalez, R.**, NaveGo: an open-source MATLAB/GNU Octave toolbox for simulating integrated navigation systems and performing Allan variance analysis, 2016. URL: www.github.com/rodraz/NaveGo/.
25. **NovAtel Inc.** Inertial Explorer R User Guide version 8.50, OM-20000106, Rev 9. Canada, 2013.
26. **Hong, S., Lee, M.H., Chun, H.H., Kwon, S.H., and Speyer, J.L.**, Observability of error states in GPS/INS integration, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2005, vol. 54, no. 2, pp. 731–743.
27. **Tang, Y., Wu, Y., Wu, M., Wu, W., Hu, X., and Shen, L.**, INS/GPS integration: Global observability analysis, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, vol. 58, no. 3, pp. 1129–1142.
28. **Klein, I. and Diamant, R.**, Observability Analysis of Heading Aided INS for a Maneuvering AUV, *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, 2018, 65(1), pp. 73–82.
29. **Shen, K., Xia, Y., Wang, M., Neusypin, K.A., and Proletarsky, A.V.**, Quantifying Observability and Analysis in Integrated Navigation, *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, 2018, 65(2), 169–181.
30. **Al Bitar, N. and Gavrilov, A.I.**, Intelligent computing technologies in problems of improving the accuracy of integrated navigation systems, *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman, Ser. Priborostroenie*, 2019, no.1, pp. 62–89.

Материал поступил 19.11.2018