

Н. Н. ВАСИЛЮК

РЕКУРРЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА КАЛИБРОВКИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МАГНИТОМЕТРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИЗМЕРЕНИЙ ТРЕХОСНОГО ГИРОСКОПА

Рассмотрены вопросы практической реализации алгоритма калибровки магнитометра, встроенного в электронное устройство, с использованием синхронных измерений гироскопа. Получены рекуррентные выражения для накопления промежуточных матриц, исключаяющие необходимость аккумулировать полный объем первичных измерений векторных датчиков. Сформулирован алгоритм определения момента прекращения накопления и перехода к расчету калибруемых параметров.

Ключевые слова: калибровка магнитометра, рекуррентный алгоритм, интегральный магнитометр.

Введение

В [1, 2] описан алгоритм калибровки интегрального магнитометра, при котором используются эллипсоидная аппроксимация геометрического места его измерений и дополнительные измерения трехосного гироскопа. Эллипсоидная аппроксимация определяет вектор погрешностей магнитомягкого типа (вектор смещений нулей магнитометра) и симметричную часть полярного разложения матрицы погрешностей магнитомягкого типа (матрицы магнитной проницаемости электронного устройства) [3–5]. Дополнительные измерения трехосного гироскопа позволяют получить ортогональную часть полярного разложения этой матрицы, содержащую также матрицу поворота между измерительными базисами магнитометра и гироскопа. Калибровка магнитометра называется «полной», если в результате определяются вектор магнито жестких погрешностей и полная матрица погрешностей магнитомягкого типа (то есть симметричная и ортогональная части ее полярного разложения).

В [1, 2] измерения гироскопа используются для вычисления скорости изменения проекций постоянного вектора внешнего магнитного поля на поворачивающийся измерительный базис магнитометра. Ортогональная часть находится при сравнении этой скорости с результатами численного дифференцирования измерений магнитометра. В [6–9] измерения гироскопа интегрируются для получения приращений матрицы ориентации его измерительного базиса, которые затем сравниваются с этими же приращениями, вычисленными на основе измерений магнитометра. В [10] матрица погрешностей магнитомягкого типа считается известной, а измерения гироскопа используются для получения оценок вектора погрешностей магнито жесткого типа. Кроме того, в [10] даются оценки скорости сходимости алгоритма по количеству итераций. В [11, 12] используется двухэтапный подход к полной калибровке магнитометра, который предполагает полу-

Василюк Николай Николаевич. Руководитель группы, ООО «Топкон Позиционинг Системз» (Москва).

чение симметричной части матрицы магнитной проницаемости на первом этапе за счет эллипсоидной аппроксимации. Ортогональная часть определяется на втором этапе, на котором осуществляется анализ изменений в показаниях калибруемого магнитометра, возникающих при его поворотах на контролируемые углы. В [13, 14] для полной калибровки магнитометра его измерения комплексуются

с измерениями инерциальных датчиков при помощи расширенного фильтра Калмана. Вектор состояния фильтра содержит девять коэффициентов матрицы погрешностей магнитометра мягкого типа и три компоненты вектора погрешностей магнитометра жесткого типа. В [13] в качестве вектора наблюдения используются измерения магнитометра, которые связываются с компонентами вектора состояния через приращения ориентации, вычисленные интегрированием измерений гироскопа. В [14] полная калибровка магнитометра выполняется с использованием измерений полноценного инерциального измерительного модуля. Вектор наблюдения строится на основе измерений магнитометра и акселерометра, причем влияние поступательного и центростремительного ускорений, возникающих при калибровочных вращениях, на измерения акселерометра считается пренебрежимо малым.

В работах [13, 14] рекуррентная реализация калибровочного алгоритма получается естественным образом, за счет использования алгоритма калмановской фильтрации. Алгоритмы [1, 3–12] в их оригинальной формулировке ориентированы на обработку полных массивов накопленных измерений, что неудобно для их практической реализации на вычислительных устройствах, работающих в режиме реального времени. В частности, реализация алгоритма [1] требует накопления в оперативной памяти устройства двух массивов векторных измерений магнитометра $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ и гироскопа $\{\omega_i\}_{i=1}^N$, где N – количество накопленных измерений. Увеличение продолжительности калибровки приводит к необходимости резервирования большего объема оперативной памяти, требуемого для накопления этих массивов. Вместе с тем структура алгоритма [1] позволяет заменить простое накопление массивов $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ и $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ любого объема рекуррентным накоплением 154 скалярных значений, сгруппированных в шесть промежуточных матриц с постоянными размерами. Обновление матриц выполняется сразу после получения очередной пары измерений $\{\mu_i, \omega_i\}$, которая затем отбрасывается. После завершения накопления расчет калибруемых параметров выполняется только с использованием уже подготовленных промежуточных матриц.

Калибровка [1] требовательна к пространственной структуре накопленных измерений, поскольку она основана на аппроксимации геометрического места этих измерений поверхностью второго порядка. Если измерения распределены в пространстве достаточно плотно и равномерно, то наилучшим приближением к их геометрическому месту является эллипсоид. Если условие равномерности нарушено, то наилучшим приближением может оказаться любая из 17 поверхностей второго порядка [15], так как в [1] не задается специального условия для целевой функции, которое гарантированно приводило бы к эллипсоидной приближающей поверхности.

Таким образом, при практической реализации алгоритма [1] на микроконтроллере с ограниченным размером оперативной памяти требуется в режиме реального времени оценивать пригодность структуры накопленных измерений для калибровки магнитометра. На основании текущих результатов этой оценки должен формироваться признак, после обнаружения которого калибровочные вращения и накопление измерений можно прекратить и перейти к вычислению калибруемых параметров.

1. Постановка задачи

Для получения формул рекуррентного обновления промежуточных матриц из всех математических выражений алгоритма [1] выделяются компоненты, зависящие только от первичных измерений и не зависящие от результатов какой-либо обработки их полноразмерных массивов. Расчетные формулы для этих компонент записываются в рекуррентной форме, в которой обновленное значение матрицы в текущий момент времени i получается только из ее значения в предыдущий момент времени $i-1$ и вновь полученной пары векторных измерений $\{\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\omega}_i\}$.

При выполнении калибровочных вращений начало постоянного вектора \mathbf{h}^E можно мысленно разместить в центре магнитометра. Если вращение корпуса выполняется вокруг случайных осей, равномерно распределенных в пространстве, то при достаточно большом N концы векторов $\{\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E\}_{i=1}^N$ будут лежать на сфере радиусом $|\mathbf{h}^E|$ и покрывать ее поверхность достаточно равномерно. Тогда очевидным подходом к количественной оценке пригодности набора измерений для калибровки является подсчет количества пересечений векторов $\{\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E\}_{i=1}^N$ со специально отобранными и упорядоченными сегментами сферы. Координатные плоскости, параллельные координатным плоскостям ИСК, делят эту сферу на восемь сегментов (октантов). Если количество точек в каждом октанте отличается не более чем на заданную величину, то измерения считаются равномерно распределенными по своему геометрическому месту.

Проблема в таком подходе заключается в том, что компоненты столбца $\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E$ при различных ориентациях корпуса неизвестны. Вместо этих компонент измеряется вектор $\boldsymbol{\mu}_i$, получаемый в результате аффинного преобразования вектора $\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E$. Неизвестный вектор смещений нулей \mathbf{b}^M может быть настолько велик, что геометрическое место всех измерений $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$ целиком окажется в одном из октантов. Матрица \mathbf{M} заставляет геометрическое место векторов $\{\mathbf{h}_{\text{ИСК}i}^E\}_{i=1}^N$ растягиваться/сжиматься и поворачиваться, тем самым превращая сферу в повернутый эллипсоид. При таких преобразованиях изначально равномерное распределение точек на сфере в одних октантах эллипсоида сгущается, а в других – разрежается. Для того чтобы корректно подсчитать количество измерений магнитометра, попавших в различные октанты, их необходимо по меньшей мере отцентрировать, для этого требуется получить оценку $\check{\mathbf{b}}^M$ вектора \mathbf{b}^M . Перед подсчетом желательно выполнить коррекцию деформации сферы при помощи оценки $\check{\mathbf{M}}^{-1}$ матрицы \mathbf{M}^{-1} . Окончательные оценки $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$ получаются только в результате полной калибровки магнитометра и на этапе накопления первичных измерений еще недоступны.

По этой причине предлагается другой вариант получения оценки $\check{\mathbf{b}}^M$, не требующий значительных вычислительных затрат: оценка вычисляется из измеренных границ динамических диапазонов отдельных компонент измерений магнитометра, полученных в процессе калибровочных вращений. Оценка матрицы $\check{\mathbf{M}}^{-1}$ не вычисляется, вместо нее назначается эмпирическое пороговое значение минимального количества измерений, попавших в один из октантов. Превышение этого порогового значения останавливает накопление промежу-

точных матриц и запускает алгоритм двухэтапного вычисления окончательных оценок $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$.

2. Рекуррентное накопление промежуточных матриц

2.1. Накопление симметричной матрицы \mathbf{T}

Симметричная неотрицательно определенная матрица \mathbf{T} размера 10×10 [1, формула (10)] строится из массива измерений $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=1}^N$: $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^N \mathbf{T}_i$, $\mathbf{T}_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i$. Матрицы \mathbf{T}_i и $\mathbf{T} = \{t_{kj}\}_{k,j=1}^{10}$ (k – номер строки, j – номер столбца) содержат только 55 уникальных элементов, расположенных на главной диагонали и выше нее. Если t_{kj} – элемент, расположенный в строке $k = 1 \dots 10$ и в столбце $j = k \dots 10$ матрицы \mathbf{T} , то ему можно присвоить порядковый номер $n = 10(k-1) - (k-1)k/2 + j$, $n = 1 \dots 55$. Уникальные элементы \mathbf{T} упаковываются в строку $\mathbf{T}^C = \{t_n^C\}_{n=1}^{55}$ размером 1×55 , причем $t_n^C = t_{kj}$. При таком способе нумерации сначала в строку \mathbf{T}^C упаковывается первая строка матрицы \mathbf{T} , затем – часть второй строки от элемента главной диагонали до правого края и так далее. Перед началом накопления строка \mathbf{T}^C заполняется нулями. Отсюда непосредственно следует формула для рекуррентного обновления строки \mathbf{T}^C :

$$\mathbf{T}^C = \mathbf{T}^C + [\mathbf{t}_{1i}^{1:10} \mid \mathbf{t}_{2i}^{2:10} \mid \mathbf{t}_{3i}^{3:10} \mid \mathbf{t}_{4i}^{4:10} \mid \mathbf{t}_{5i}^{5:10} \mid \mathbf{t}_{6i}^{6:10} \mid \mathbf{t}_{7i}^{7:10} \mid \mathbf{t}_{8i}^{8:10} \mid \mathbf{t}_{9i}^{9:10} \mid 1], \quad (1)$$

где $\mathbf{t}_{ki}^{k:10}$ – строка матрицы \mathbf{T}_i с номером $k = 1 \dots 10$, из которой взяты элементы с номерами от k до 10 включительно.

2.2. Накопление матрицы $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$

На втором вычислительном этапе калибровки возникает матрица $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ размером 9×9 [1, формула (16)]. Матрицу $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \sum_{i=2}^N \mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{11} & [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{12} & [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{13} \\ [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{12} & [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{22} & [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{23} \\ [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{13} & [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{23} & [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{33} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj} = [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{jk} = \sum_{i=1}^N \omega_{ki} \omega_{ji} [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times]^T [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times]$, $j, k = 1 \dots 3$ – матричный блок размером 3×3 для матрицы $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$; $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i = \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M)$ – вектор измерений магнитометра, откорректированный с использованием результатов $\hat{\mathbf{D}} = \{\hat{d}_{jk}\}_{j,k=1}^3$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$ первого вычислительного этапа калибровки [1, формула (14)]. Матрицу $[\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times]^T$ после подстановки в нее явного выражения для $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\boldsymbol{\mu}}_i \times]^\top &= [\hat{\mathbf{D}}_1^\top (\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M) \quad \hat{\mathbf{D}}_2^\top (\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M) \quad \hat{\mathbf{D}}_3^\top (\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M)], \\
 \hat{\mathbf{D}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\hat{d}_{13} & \hat{d}_{12} \\ 0 & -\hat{d}_{23} & \hat{d}_{22} \\ 0 & -\hat{d}_{33} & \hat{d}_{23} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{d}_{13} & 0 & -\hat{d}_{11} \\ \hat{d}_{23} & 0 & -\hat{d}_{12} \\ \hat{d}_{33} & 0 & -\hat{d}_{13} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}_3 = \begin{bmatrix} -\hat{d}_{12} & \hat{d}_{11} & 0 \\ -\hat{d}_{22} & \hat{d}_{12} & 0 \\ -\hat{d}_{23} & \hat{d}_{13} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Подставим представление (3) в блок $[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}$ матрицы (2)

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj} &= \sum_{q=1}^3 \hat{\mathbf{D}}_q^\top [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(1)} \hat{\mathbf{D}}_q - \sum_{q=1}^3 \hat{\mathbf{D}}_q^\top \hat{\mathbf{b}}^M [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(2)\top} \hat{\mathbf{D}}_q - \\
 &\quad - \sum_{q=1}^3 \hat{\mathbf{D}}_q^\top [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(2)} \hat{\mathbf{b}}^{M\top} \hat{\mathbf{D}}_q + [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(3)} \sum_{q=1}^3 \hat{\mathbf{D}}_q^\top \hat{\mathbf{b}}^{M\top} \hat{\mathbf{b}}^M \hat{\mathbf{D}}_q \quad (4)
 \end{aligned}$$

и выделим в записи компоненты, не зависящие от $\hat{\mathbf{D}}$ и $\hat{\mathbf{b}}^M$:

$$[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(1)} = \sum_{i=1}^N \omega_{ki} \omega_{ji} \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^\top, \quad [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(2)} = \sum_{i=1}^N \omega_{ki} \omega_{ji} \boldsymbol{\mu}_i, \quad [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(3)} = \sum_{i=1}^N \omega_{ki} \omega_{ji}. \quad (5)$$

Компонента $[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(1)}$ представляет собой матрицу размером 3×3 , компонента $[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(2)}$ – столбец размером 3×1 , компонента $[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(3)}$ – скаляр, причем $[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(q)} = [\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{jk}^{(q)}$, $q = 1, 2, 3$. Таким образом, в каждом массиве из девяти матриц $\{[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{jk}^{(1)}\}_{j,k=1}^3$, векторов $\{[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{jk}^{(2)}\}_{j,k=1}^3$ и скаляров $\{[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{jk}^{(3)}\}_{j,k=1}^3$ содержатся только шесть уникальных элементов (матриц, векторов и скаляров соответственно). Для рекуррентного накопления уникальных элементов введем матрицу $\mathbf{W}^{(1)}$ размером 6×6 , матрицу $\mathbf{W}^{(2)}$ размером 3×6 и строку $\mathbf{W}^{(3)}$ размером 1×6 , которые перед стартом алгоритма калибровки заполняются нулями.

Каждая из девяти матриц $[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(1)}$, $k, j = 1, 2, 3$ – симметричная, в ней только шесть уникальных скалярных компонент. Все уникальные скаляры массива матриц $\{[\mathbf{L}^\top \mathbf{L}]_{kj}^{(1)}\}_{k,j=1}^3$ записываются в виде шести строк, объединенных в одну матрицу $\mathbf{W}^{(1)}$, где $W_{(kjmp)i}^{(1)} = \omega_{ki} \omega_{ji} \mu_{mi} \mu_{pi}$, $k, j, m, p = 1, 2, 3$, рекуррентное обновление которой осуществляется по правилу

$$\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^{(1)} + \begin{bmatrix} W_{(1111)i}^{(1)} & W_{(1112)i}^{(1)} & W_{(1113)i}^{(1)} & W_{(1122)i}^{(1)} & W_{(1123)i}^{(1)} & W_{(1133)i}^{(1)} \\ W_{(1211)i}^{(1)} & W_{(1212)i}^{(1)} & W_{(1213)i}^{(1)} & W_{(1222)i}^{(1)} & W_{(1223)i}^{(1)} & W_{(1233)i}^{(1)} \\ W_{(1311)i}^{(1)} & W_{(1312)i}^{(1)} & W_{(1313)i}^{(1)} & W_{(1322)i}^{(1)} & W_{(1323)i}^{(1)} & W_{(1333)i}^{(1)} \\ W_{(2211)i}^{(1)} & W_{(2212)i}^{(1)} & W_{(2213)i}^{(1)} & W_{(2222)i}^{(1)} & W_{(2223)i}^{(1)} & W_{(2233)i}^{(1)} \\ W_{(2311)i}^{(1)} & W_{(2312)i}^{(1)} & W_{(2313)i}^{(1)} & W_{(2322)i}^{(1)} & W_{(2323)i}^{(1)} & W_{(2333)i}^{(1)} \\ W_{(3311)i}^{(1)} & W_{(3312)i}^{(1)} & W_{(3313)i}^{(1)} & W_{(3322)i}^{(1)} & W_{(3323)i}^{(1)} & W_{(3333)i}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Каждый столбец $[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}^{(2)}$ содержит три уникальные скалярные компоненты, а значит, весь набор столбцов $\{[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}^{(2)}\}_{k,j=1}^3$ состоит только из $6 \times 3 = 18$ уникальных скалярных компонент. Поэтому вторую матричную сумму в (5) можно переписать в рекуррентной форме, где $W_{(kjm)i}^{(2)} = \omega_{ki} \omega_{ji} \mu_{mi}$:

$$\mathbf{W}^{(2)} = \mathbf{W}^{(2)} + \begin{bmatrix} W_{(111)i}^{(2)} & W_{(121)i}^{(2)} & W_{(131)i}^{(2)} & W_{(221)i}^{(2)} & W_{(231)i}^{(2)} & W_{(331)i}^{(2)} \\ W_{(112)i}^{(2)} & W_{(122)i}^{(2)} & W_{(132)i}^{(2)} & W_{(222)i}^{(2)} & W_{(232)i}^{(2)} & W_{(332)i}^{(2)} \\ W_{(113)i}^{(2)} & W_{(123)i}^{(2)} & W_{(133)i}^{(2)} & W_{(223)i}^{(2)} & W_{(233)i}^{(2)} & W_{(333)i}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Набор из девяти скаляров $\{[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}^{(3)}\}_{j,k=1}^3$ содержит только шесть уникальных компонент. Рекуррентное обновление строки $\mathbf{W}^{(3)}$ получается из третьей суммы в (4):

$$\mathbf{W}^{(3)} = \mathbf{W}^{(3)} + [\omega_{1i} \omega_{1i} \quad \omega_{1i} \omega_{2i} \quad \omega_{1i} \omega_{3i} \quad \omega_{2i} \omega_{2i} \quad \omega_{2i} \omega_{3i} \quad \omega_{3i} \omega_{3i}]. \quad (8)$$

2.3. Накопление матрицы $\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}$

Матрица $\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}$ размером 9×1 появляется при расчете вектора \mathbf{f}_j [1, формула (16)]:

$$\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{i=2}^N \mathbf{1}_i^T \dot{\boldsymbol{\mu}}_i = [[\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}]_1^T \quad [\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}]_2^T \quad [\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}]_3^T]^T, \quad (9)$$

где $[\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}]_q = \sum_{i=2}^N \omega_{qi} [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \times]^T \dot{\boldsymbol{\mu}}_i$, $q = 1, 2, 3$ – блок размером 3×1 матрицы $\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}$. Производную $\dot{\boldsymbol{\mu}}_i$ можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_i = \frac{1}{T_{\text{ИЗМ}}} [\hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\mu}_i - \hat{\mathbf{b}}^M) - \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\mu}_{i-1} - \hat{\mathbf{b}}^M)] = \hat{\mathbf{D}} \dot{\boldsymbol{\mu}}_i = [\dot{\boldsymbol{\mu}}_i^T \hat{\mathbf{d}}_1 \quad \dot{\boldsymbol{\mu}}_i^T \hat{\mathbf{d}}_2 \quad \dot{\boldsymbol{\mu}}_i^T \hat{\mathbf{d}}_3]^T,$$

где $\dot{\boldsymbol{\mu}}_i = (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_{i-1}) / T_{\text{ИЗМ}}$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = [\hat{d}_{11} \quad \hat{d}_{12} \quad \hat{d}_{13}]^T$, $\hat{\mathbf{d}}_2 = [\hat{d}_{12} \quad \hat{d}_{22} \quad \hat{d}_{23}]^T$, $\hat{\mathbf{d}}_3 = [\hat{d}_{13} \quad \hat{d}_{23} \quad \hat{d}_{33}]^T$, и подставить эту запись в выражение для блока

$$[\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}]_q = \sum_{q=1}^3 \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{M}_q^{(1)} \hat{\mathbf{d}}_q - \sum_{q=1}^3 \hat{\mathbf{D}}^T \hat{\mathbf{b}}^M \mathbf{M}_q^{(2)} \hat{\mathbf{d}}_q, \quad (10)$$

где $\mathbf{M}_q^{(1)} = \sum_{i=2}^N \omega_{qi} \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^T$ – матрица размером 3×3 ; $\mathbf{M}_q^{(2)} = \sum_{i=1}^N \omega_{qi} \dot{\boldsymbol{\mu}}_i^T$ – строка размером 1×3 ; $q = 1, 2, 3$. Матрицы $\mathbf{M}_q^{(1)}$ и $\mathbf{M}_q^{(2)}$ зависят только от измерений, получаемых в процессе калибровочных вращений устройства.

Все элементы в массивах матриц $\{\mathbf{M}_q^{(1)}\}_{q=1}^3$ и $\{\mathbf{M}_q^{(2)}\}_{q=1}^3$ – уникальные. Введем матрицу $\mathbf{M}^{(1)}$ размером 3×9 и матрицу $\mathbf{M}^{(2)}$ размером 3×3 для накопления элементов соответствующих матричных массивов. Матрицы $\mathbf{M}^{(1)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$ перед стартом алгоритма заполняются нулями, а формулы их рекуррентного накопления выводятся из (10):

$$\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} + [\omega_{1i} \dot{\mathbf{m}}_i \dot{\mathbf{m}}_i^T \mid \omega_{2i} \dot{\mathbf{m}}_i \dot{\mathbf{m}}_i^T \mid \omega_{3i} \dot{\mathbf{m}}_i \dot{\mathbf{m}}_i^T], \quad (11)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)} + [\omega_{1i} \dot{\mathbf{m}}_i \mid \omega_{2i} \dot{\mathbf{m}}_i \mid \omega_{3i} \dot{\mathbf{m}}_i]^T. \quad (12)$$

2.4. Восстановление калибровочных матриц после накопления

Матрица \mathbf{T} не требует восстановления до исходной размерности, поскольку для известных реализаций [16] алгоритма расчета собственных значений и векторов симметричной действительной матрицы, основанных на методе вращений Якоби, достаточно передать на вход только верхнюю треугольную часть квадратной симметричной матрицы. Посредством взаимно однозначной переиндексации программных циклов по тому же правилу, которое использовалось при получении строки (5), выборку элементов из двумерного верхнего треугольника можно заменить выборкой из одномерной строки. Матрица \mathbf{T} используется для первого вычислительного этапа калибровки, на выходе которого получаются матрица $\hat{\mathbf{D}}$ и вектор $\hat{\mathbf{b}}^M$, применяемые при восстановлении матриц второго этапа калибровки.

Для выписывания формул восстановления матрицы $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ введем обозначения для скалярных элементов промежуточных матриц (6)–(8): $\mathbf{W}^{(1)} = \{w_{mp}^{(1)}\}_{m,p=1}^6$, $w_{mp}^{(1)}$ – скалярный элемент, стоящий в строке m и столбце p ; $\mathbf{W}^{(2)} = \{\mathbf{w}_p^{(2)}\}_{p=1}^6$, $\mathbf{w}_p^{(2)}$ – столбец с номером p , $\mathbf{W}^{(3)} = \{w_p^{(3)}\}_{p=1}^6$. Тогда

$$[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}^{(1)} = \begin{bmatrix} w_{m1}^{(1)} & w_{m2}^{(1)} & w_{m3}^{(1)} \\ w_{m2}^{(1)} & w_{m4}^{(1)} & w_{m5}^{(1)} \\ w_{m3}^{(1)} & w_{m5}^{(1)} & w_{m6}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}^{(2)} = \mathbf{w}_m^{(2)}, \quad [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}^{(3)} = w_m^{(3)}, \quad (13)$$

где $m = 3(k-1) - 0,5(k-1)k + j$. Матричный блок $[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}$ восстанавливается из компонент (13) в соответствии с (4), а полная матрица $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ – из блоков $[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]_{kj}$ в соответствии с (2).

Матричные блоки $\mathbf{M}_q^{(1)}$ и $\mathbf{M}_q^{(2)}$ восстанавливаются из матриц $\mathbf{M}^{(1)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$:

$$\mathbf{M}_q^{(1)} = [\mathbf{m}_{3q-2}^{(1)} \quad \mathbf{m}_{3q-1}^{(1)} \quad \mathbf{m}_{3q}^{(1)}], \quad \mathbf{M}_q^{(2)} = \mathbf{m}_q^{(2)}, \quad (14)$$

где $\mathbf{m}_{3q-2}^{(1)}$, $\mathbf{m}_{3q-1}^{(1)}$, $\mathbf{m}_{3q}^{(1)}$ – столбцы матрицы $\mathbf{M}^{(1)}$; $\mathbf{m}_q^{(2)}$ – строка матрицы $\mathbf{M}^{(2)}$ с номером $q = 1, 2, 3$. Матричный блок $[\mathbf{L}^T \dot{\mathbf{m}}]_q$ восстанавливается из (14) согласно (10), а матрица $\mathbf{L}^T \dot{\mathbf{m}}$ – из блоков $[\mathbf{L}^T \dot{\mathbf{m}}]_q$ согласно (9).

3. Алгоритм определения момента прекращения накопления

Для устранения случайных выбросов первичные измерения магнитометра пропускаются через медианный фильтр [17] с нечетным размером $N_{\text{МЕД}}$ скользящего First In First Out (FIFO) буфера. Все дальнейшие алгоритмические операции выполняются только с профильтрованными измерениями $\check{\mu}_i = [\check{\mu}_{1i} \ \check{\mu}_{2i} \ \check{\mu}_{3i}]^T$. По этой причине алгоритм начнет работать только после того, как будут получены первые $N_{\text{МЕД}}$ измерений магнитометра. Диагональные элементы r_{qq}^M , $q = 1, 2, 3$ ковариационной матрицы \mathbf{R}^M шумов измерений магнитометров считаются известными. Обозначим среднеквадратическую погрешность (СКП) этих шумов как $\sigma_q^M = \sqrt{r_{qq}^M}$. Перед запуском алгоритма сбрасываются в ноль значения восьми счетчиков, подсчитывающих количество измерений, попавших в соответствующие октанты $N_s^{\text{ОКТ}} = 0$, $s = 1 \dots 8$.

Начальные оценки минимальной и максимальной границ диапазонов изменения скалярных компонент устанавливаются после получения первого вектора, профильтрованного медианным фильтром: $\check{\mu}_{\text{max}} = \check{\mu}_{N_{\text{МЕД}}}$, $\check{\mu}_{\text{min}} = \check{\mu}_{N_{\text{МЕД}}}$. Все последующие измерения с $i > N_{\text{МЕД}}$ проверяются на соответствие этим границам, и при обнаружении компоненты $\check{\mu}_{qi}$, не попадающей в отрезок $[\check{\mu}_{q\text{min}}, \check{\mu}_{q\text{max}}]$ при $q = 1, 2, 3$, границы уточняются по следующим правилам:

1. если для $\check{\mu}_{qi}$ справедливо $(\check{\mu}_{q\text{min}} - 3\sigma_q^M) \leq \check{\mu}_{qi} \leq (\check{\mu}_{q\text{max}} + 3\sigma_q^M)$, то никаких изменений границ этой компоненты не производится;

2. если для $\check{\mu}_{qi}$ выполняется какое-либо из условий (а) или (б), то уточняется соответствующая граница:

а. $3\sigma_q^M < \check{\mu}_{qi} - \check{\mu}_{q\text{max}} \leq 12\sigma_q^M$, то $\check{\mu}_{q\text{max}} = \check{\mu}_{qi}$,

б. $3\sigma_q^M < \check{\mu}_{q\text{min}} - \check{\mu}_{qi} \leq 12\sigma_q^M$, то $\check{\mu}_{q\text{min}} = \check{\mu}_{qi}$;

3. если для $\check{\mu}_{qi}$ выполняется какое-либо из условий (а) или (б), то уточняется соответствующая граница. После уточнения границы значения октантных счетчиков $\{N_s^{\text{ОКТ}}\}_{s=1}^8$ объявляются неправильными и для них устанавливается признак сброса в ноль:

а. $\check{\mu}_{qi} - \check{\mu}_{q\text{max}} > 12\sigma_q^M$, то $\check{\mu}_{q\text{max}} = \check{\mu}_{qi}$, сброс счетчиков,

б. $\check{\mu}_{q\text{min}} - \check{\mu}_{qi} > 12\sigma_q^M$, то $\check{\mu}_{q\text{min}} = \check{\mu}_{qi}$, сброс счетчиков.

После уточнения границ сначала обновляется оценка $\check{\mathbf{b}}^M$:

$$\check{\mathbf{b}}^M = 0,5(\check{\mu}_{\text{max}} + \check{\mu}_{\text{min}}). \quad (15)$$

Далее определяется, какому из октантов принадлежит измерение $\check{\mu}_i$. Сначала проверяется вырожденность границ $[\check{\mu}_{q\text{min}}, \check{\mu}_{q\text{max}}]$ для каждой компоненты в отдельности. Если хотя бы для одной компоненты $\check{\mu}_{q\text{max}} - \check{\mu}_{q\text{min}} \leq 12r_{qq}^M$, то

границы считаются вырожденными и определение принадлежности измерения к октанту не производится. Если для всех компонент $\check{\mu}_{q \max} - \check{\mu}_{q \min} > 12r_{qq}^M$, принадлежность измерения к октанту определяется согласно таблице истинности. После определения принадлежности измерения к октанту s обновляется значение счетчика измерений, соответствующего данному октанту $N_s^{\text{OKT}} = N_s^{\text{OKT}} + 1$.

Т а б л и ц а

Таблица истинности для определения октанта, которому принадлежит измерение $\check{\mu}_i$

№ октанта	$\text{sign}\{\check{\mu}_{1i} - \check{b}_1^M\}$	$\text{sign}\{\check{\mu}_{2i} - \check{b}_2^M\}$	$\text{sign}\{\check{\mu}_{3i} - \check{b}_3^M\}$
I	+	+	+
II	-	+	+
III	-	-	+
IV	+	-	+
V	+	+	-
VI	-	+	-
VII	-	-	-
VIII	+	-	-

Для этого на этапе настройки алгоритма определяется минимальное количество измерений, попавших в один октант, при котором достигается приемлемая точность калибровки. Это значение назначается в качестве порога $N_{\text{ПОР}}^{\text{OKT}}$ прекращения накопления. Иными словами, накопление прекращается при выполнении условия $\min\{N_s^{\text{OKT}}\}_{s=1}^8 \geq N_{\text{ПОР}}^{\text{OKT}}$. Поскольку начальный этап работы алгоритма определения момента прекращения накопления сопровождается сбросами октантных счетчиков, общее количество измерений N , накопленных в промежуточных матрицах, всегда несколько превышает количество измерений $N^{\text{OKT}} = \sum_{s=1}^8 N_s^{\text{OKT}}$, посчитанных в октантах.

4. Пошаговая формулировка алгоритма рекуррентного накопления

Номера и названия блоков на блок-схеме алгоритма рекуррентного накопления промежуточных матриц (рис. 1) соответствуют номерам и названиям отдельных пунктов в пошаговом описании. Данное описание алгоритма можно рассматривать как описание эффективной реализации блока 2 «Выполнение калибровочных вращений» в [1].

1. *Вход.* Запуск алгоритма. На этом этапе предполагается, что заданы численные значения $\{\sigma_q^M\}_{q=1}^3$, $N_{\text{МЕД}}$ и $N_{\text{ПОР}}^{\text{OKT}}$.

2. *Инициализация промежуточных матриц.* Заполнение нулями областей памяти, выделенных под промежуточные матрицы. В скобках указан размер матрицы, всего во всех матрицах 154 скалярных элемента: \mathbf{T}^C (1×55), $\mathbf{W}^{(1)}$ (6×6), $\mathbf{W}^{(2)}$ (3×6), $\mathbf{W}^{(3)}$ (1×9), $\mathbf{M}^{(1)}$ (3×9), $\mathbf{M}^{(2)}$ (3×9).

3. *Ожидание измерений.* Ожидание очередной пары измерений $\{\mu_i, \omega_i\}$.

4. *Обновление промежуточных матриц.* Блок принимает на вход пару измерений $\{\mu_i, \omega_i\}$, записывает μ_i в FIFO-буфер медианного фильтра и выполняет обновление промежуточных матриц согласно формулам, номера которых указаны в скобках: \mathbf{T}^C (1), $\mathbf{W}^{(1)}$ (6), $\mathbf{W}^{(2)}$ (7), $\mathbf{W}^{(3)}$ (8), $\mathbf{M}^{(1)}$ (11), $\mathbf{M}^{(2)}$ (12).

5. *FIFO-буфер заполнен.* Проверка заполнения FIFO-буфера медианного фильтра. Если номер текущего измерения $i \geq N_{\text{МЕД}}$, то буфер заполнен и можно продолжить работу алгоритма.

6. *Вычисление медианы $\check{\mu}_i$* из текущего содержимого FIFO-буфера.

7. *Обновление границ диапазонов и оценки смещений нулей.* Блок принимает на вход профильтрованное значение $\check{\mu}_i$ и текущие границы диапазонов $\check{\mu}_{\text{max}}$ и $\check{\mu}_{\text{min}}$. Выполняется проверка и обновление границ диапазонов согласно разделу 3, вычисляется новая оценка смещений нулей $\check{\mathbf{b}}^M$ (15). Выходом блока являются новые значения $\check{\mu}_{\text{max}}$, $\check{\mu}_{\text{min}}$, $\check{\mathbf{b}}^M$ и признак сброса октантных счетчиков.

8. *Сброс счетчиков.* Если признак сброса установлен, счетчики обнуляются.

9. *Обновление октантных счетчиков.* Блок принимает на вход значения $\check{\mu}_i$ и $\check{\mathbf{b}}^M$. Выполняет инкремент одного октантного счетчика, номер которого определяется согласно таблице. Выходом блока являются обновленные значения счетчиков $\{N_s^{\text{ОКТ}}\}_{s=1}^8$.

10. *Прекращение накопления.* Блок принимает на вход значения октантных счетчиков $\{N_s^{\text{ОКТ}}\}_{s=1}^8$ и проверяет условие прекращения накопления $\min\{N_s^{\text{ОКТ}}\}_{s=1}^8 \geq N_{\text{ПОР}}^{\text{ОКТ}}$. Если условие выполнено, алгоритм завершается, если нет – возвращается к ожиданию следующего измерения.

11. *Выход.* Выходом алгоритма рекуррентного накопления являются шесть промежуточных матриц.

Здесь целесообразно указать, в какие блоки алгоритма калибровки [1] передаются полученные матрицы. Блок 3 «Расчет весовой матрицы \mathbf{T} » становится ненужным, так как матрица \mathbf{T} накапливается одновременно с другими промежуточными матрицами. Матрица \mathbf{T}^c в своем исходном виде подается на вход блока 4 «Вычисление собственных чисел и векторов матрицы \mathbf{T} ». Восстановление матриц $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^T\dot{\boldsymbol{\mu}}$ выполняется в блоке 8 «Инициализация итерационного МНК», для чего ему на вход передаются все промежуточные матрицы, кроме \mathbf{T}^c . Блок 7 «Применение результатов первого этапа калибровки магнитометра» становится ненужным, так как результаты этого этапа учитываются при накоплении промежуточных матриц и восстановлении матриц $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^T\dot{\boldsymbol{\mu}}$.

5. Экспериментальные результаты

Экспериментальная обработка осуществлялась с целью проверки адекватности предложенного критерия прекращения накопления измерений и определения численного значения порога $N_{\text{ПОР}}^{\text{ОКТ}}$. Эксперименты проводились на электронном приборе, описанном в [1], использующем гироскоп MPU-9150 [18] и магнитометр LSM303AGR [19] с частотой измерений 100 Гц. В процессе калибровки квалифицированный оператор держал включенное электронное устройство в руках и произвольным способом выполнял калибровочные повороты корпуса вокруг различных случайных пространственных осей в течение 76 с (крутил его в руках так, чтобы устройство совершило не менее одного оборота вокруг каждой случайно выбранной оси). Результаты этого вращения показаны на рис. 2 с указанием количественного распределения измерений по октантам.

Всего за время вращения было получено $N_3=7673$ векторных измерений или 46038 скалярных значений.

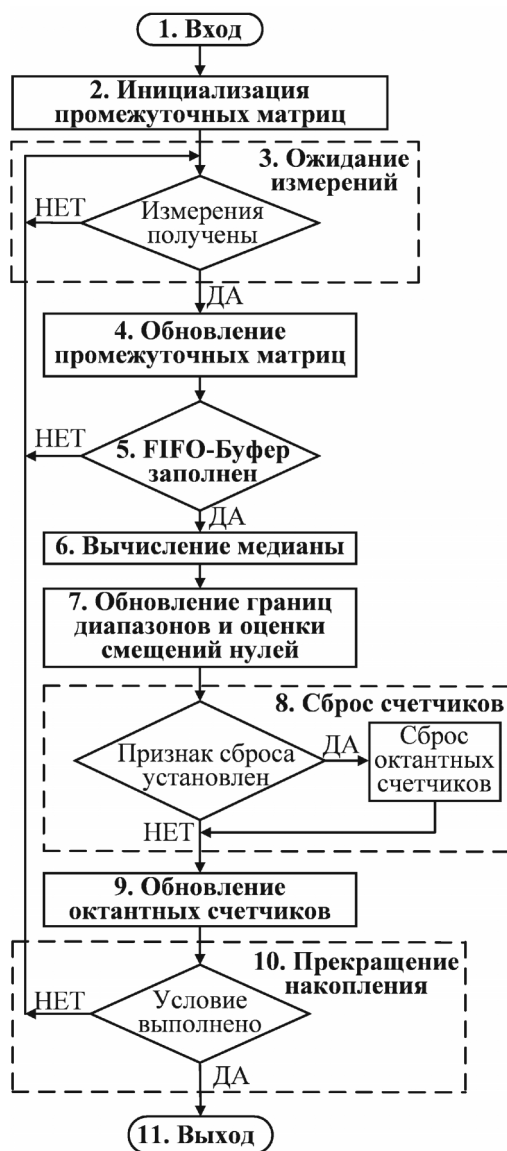


Рис. 1. Блок-схема алгоритма накопления промежуточных матриц с определением момента прекращения накопления

В экспериментальной реализации размер медианного буфера был установлен в $N_{\text{МЕД}} = 3$. СКП шумовой ошибки магнитометра, состоящей из собственных шумов магнитометра и шумов, вносимых окружающими электронными блоками, определялась экспериментально и была установлена в $\sigma^M = 3,6$ мкТл для каждой скалярной компоненты. Рис. 3 показывает запись скалярной компоненты $\{\mu_{1i}\}_{i=1}^{N_3}$ векторных измерений магнитометра, на которую наложены графики оценок границ динамического диапазона $\check{\mu}_{1\max}$, $\check{\mu}_{1\min}$ и оценки смещения нуля этой компоненты \check{b}_1^M . Кроме того, на этот рисунок наложен график оценки

смещения нуля \hat{b}_1^M , полученной реализацией алгоритма полной калибровки магнитометра после получения каждой новой пары измерений $\{\mu_i, \omega_i\}$. Из этого графика видно, что если оператору при вращении устройства удастся перекрыть весь динамический диапазон изменения измеряемых компонент, то оценки \hat{b}_1^M и \tilde{b}_1^M дают достаточно близкие значения.

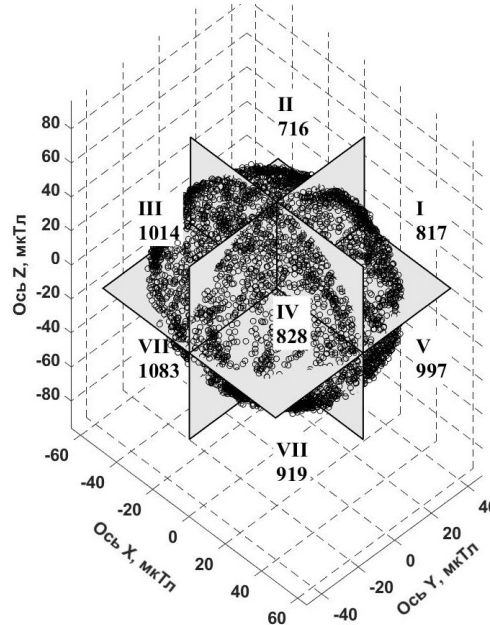


Рис. 2. Геометрическое место измерений магнитометра с распределением по октантам

Для определения порогового значения $N_{\text{ПОП}}^{\text{ОКТ}}$ был искусственно сгенерирован набор из 1000 точек $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{1000}$, равномерно распределенных по единичной сфере в соответствии с алгоритмом [20]. Этот набор был подвергнут аффинному преобразованию $\mathbf{y}^k = (\hat{\mathbf{M}}_{\text{Э}}^{-1})^{-1} \mathbf{x}^k + \hat{\mathbf{b}}_{\text{Э}}^M$, где $\hat{\mathbf{M}}_{\text{Э}}^{-1}$ и $\hat{\mathbf{b}}_{\text{Э}}^M$ получены на выходе алгоритма полной калибровки по всему доступному набору из $N_{\text{Э}}$ измерений. После этого алгоритм полной калибровки запускался для каждого значения $n = 1 \dots N_{\text{Э}}$, в результате чего вычислялись оценки $\hat{\mathbf{M}}_n^{-1}$ и $\hat{\mathbf{b}}_n^M$. Для каждого номера $n = 1 \dots N_{\text{Э}}$ вычислялся набор откорректированных векторов $\{\mathbf{x}_n^k\}_{k=1}^{1000}$, $\mathbf{x}_n^k = \hat{\mathbf{M}}_n^{-1}(\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{b}}_n^M)$. Угловые рассогласования между «истинным» вектором \mathbf{x}^k и откорректированным вектором \mathbf{x}_n^k рассчитывались по их скалярному произведению $\alpha_n^k = \arccos(\mathbf{x}^{kT} \mathbf{x}_n^k / |\mathbf{x}_n^k|)$, $|\mathbf{x}^k| = 1$, $\alpha_n^k \geq 0$. Графики значений α_n^k для всех $k=1 \dots 1000$ показаны как функции от количества накопленных измерений n на рис. 4. Там же представлен график среднего значения углового рассогласования $\langle \alpha_n \rangle = 0,001 \sum_{k=1}^{1000} \alpha_n^k$. Потребуем, чтобы максимальное значение углового рассогласования, вносимого преждевременным прекращением калибровки, не превышало $0,5^\circ$. Из рис. 4 видно, что это требование начинает выполняться

при полном количестве измерений $n \geq 3000$. В качестве значения порога выбираем из графика на рис. 4 максимальное значение счетчика при $n = 3000$: $N_{\text{ПОР}}^{\text{ОКТ}} = 430$. При таком выборе порога минимальное количество измерений, подсчитанных в одном октанте при пользовательской калибровке, гарантированно превысит максимальное количество измерений, попавших в один октант при калибровке, признанной хорошей.

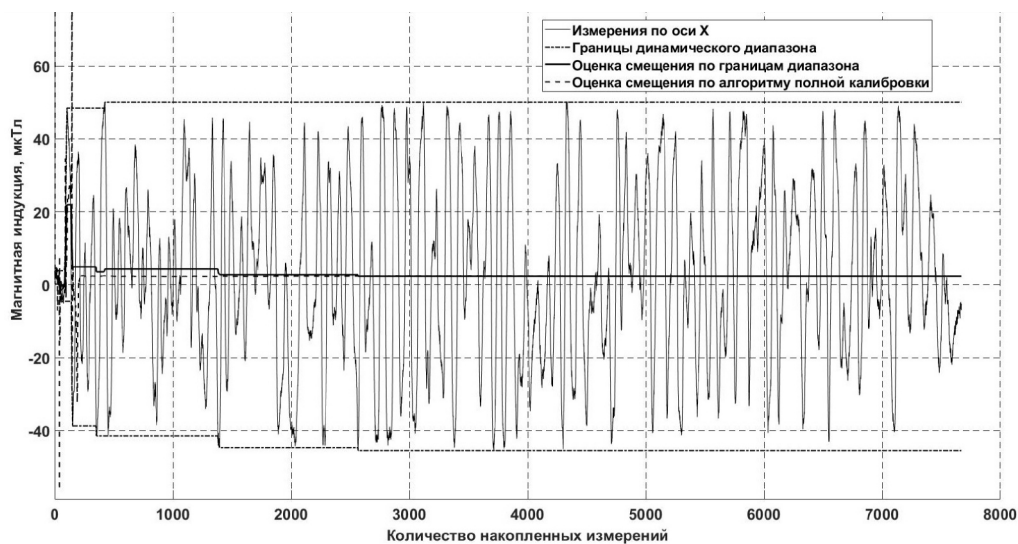


Рис. 3. Определение границ динамического диапазона X-компоненты измерений магнитометра

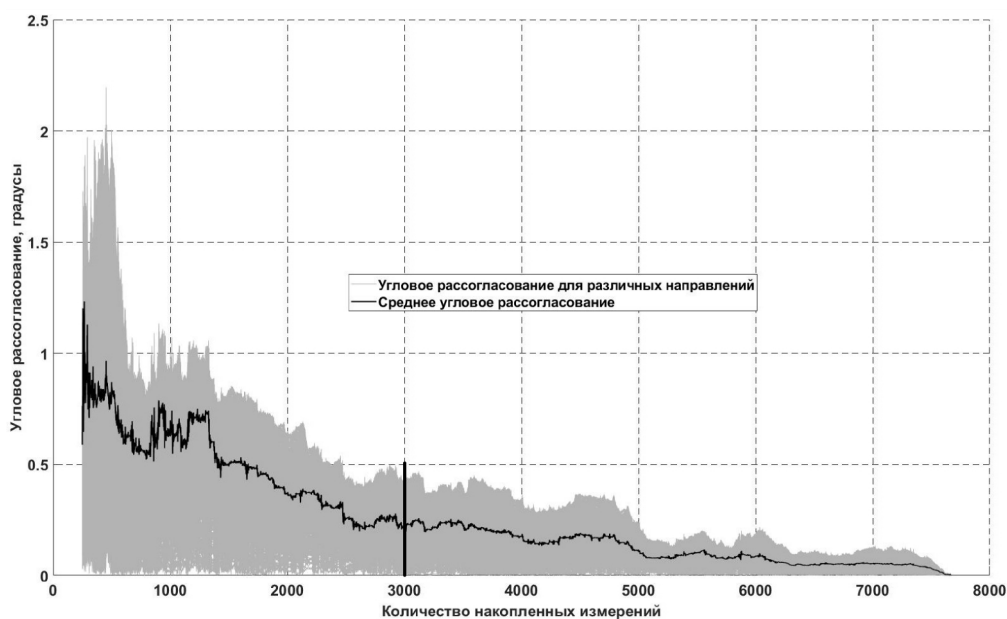


Рис. 4. Угловые рассогласования модельных измерений магнитометра, равномерно распределенных по сфере

Заключение

Рекуррентная реализация алгоритма калибровки магнитометра [1] позволяет не только существенно уменьшить объем оперативной памяти, необходимой для хранения калибровочных измерений, но и сделать его заранее определенным (154 скалярных значения). Непосредственное накопление калибровочных измерений требует сохранения неопределенного количества пар векторных измерений магнитометра и гироскопа, общее количество скалярных компонент в которых измеряется десятками тысяч. Выигрыш в требуемом объеме оперативной памяти достигается за счет увеличения вычислительной нагрузки на процессор электронного устройства и усложнения алгоритмов предварительной обработки калибровочных измерений в режиме реального времени.

Предложенный алгоритм определения момента прекращения калибровки позволяет ослабить требования к качеству калибровочных вращений. Подход, при котором накопление измерений прекращается после получения заданного количества измерений или по истечении заданного промежутка времени, требует от пользователя определенной калибровочной квалификации. Пользователь должен вращать устройство достаточно быстро и разнообразно, чтобы измерения магнитометра успели покрыть свое геометрическое место достаточно плотно и равномерно за отведенное для накопления время. При использовании предложенного алгоритма пользователь может просто вращать устройство случайным образом с комфортной для себя скоростью, алгоритм сам определит момент остановки. Однако обеспечение вращения корпуса вокруг всевозможных направлений относительно постоянного вектора \mathbf{h}^E по-прежнему остается в сфере ответственности пользователя. Наличие функции сброса октантных счетчиков при значительном изменении границ динамического диапазона (без сброса промежуточных матриц) заставит пользователя более ответственно относиться к выбору траектории для калибровочных вращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Василюк Н.Н.** Калибровка коэффициентов линейной модели интегрального магнитометра за счет использования измерений трехосного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2019. №1. С. 107–126. DOI 10.17285/0869-7035.2018.27.1.107-126.
2. **Патентная заявка WO2017135836.** A method and device for calibration of a three-axis magnetometer. Vasilyuk N. N., Doronin A. V., Tychinskiy S. I., Klimenkov A. V. Дата подачи 01.02.2016. Дата публикации 10.08.2017.
3. **Foster, C.C., Elkaim, G.H.,** Extension of a two-step calibration methodology to include nonorthogonal sensor axes, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 1070–1078.
4. **Cui, X., Li, Y., Wang, Q., Zang, M., Li, J.,** Three-axis magnetometer calibration based on optimal ellipsoidal fitting under constraint condition for pedestrian positioning system using foot-mounted inertial sensor/magnetometer, *2018 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS)*, Monterey, CA, 2018, pp. 166–174.
5. **Vasconcelos, J.F., Elkaim, G., Silvestre, C., Oliveira, P., Cardeira, B.,** Geometric Approach to Strapdown Magnetometer Calibration in Sensor Frame, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, vol. 47, no. 2, pp. 1293–1306.
6. **Yang, D., You, Z, Li, B, Duan, W., Yuan, B.,** Complete Tri-Axis Magnetometer Calibration with a Gyro Auxiliary, *Sensors (Basel)*, 2017, vol. 17, no. 6. DOI: 10.3390/s17061223.
7. **Ding, Z., Cai, H., Yu, C., Zhang, W.,** Novel low cost calibration methods for MEMS inertial/magnetic integrated sensors, *Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, Yantai, 2014, pp. 505–511.
8. **Zhu, M., Zhu, Y., Yu, W.,** An Efficient Method for Gyroscope-Aided Full Magnetometer Calibration, *IEEE Sensors Journal*, 2019, vol. 19, no. 15, pp. 6355–6361.

9. **Wu, Y., Luo, S.**, On Misalignment Between Magnetometer and Inertial Sensors, *IEEE Sensors Journal*, 2016, vol. 16, no. 16, pp. 6288–6297.
10. **Fedele, G., D'Alfonso, L., D'Aquila, G.**, Magnetometer Bias Finite-Time Estimation Using Gyroscope Data, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 2926–2936.
11. **Ousaloo, H.S., Sharifi, G., Mahdian, J., Nodeh, M.T.**, Complete Calibration of Three-Axis Strapdown Magnetometer in Mounting Frame, *IEEE Sensors Journal*, 2017, vol. 17, no. 23, pp. 7886–7893.
12. **Zhang, Z.**, Two-Step Calibration Methods for Miniature Inertial and Magnetic Sensor Units, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, vol. 62, no. 6, pp. 3714–3723.
13. **Han, K., Han, H., Wang, Z., Xu, F.**, Extended Kalman Filter-Based Gyroscope-Aided Magnetometer Calibration for Consumer Electronic Devices, *IEEE Sensors Journal*, 2017, vol. 17, no. 1, pp. 63–71.
14. **Wu, Y., Zou, D., Liu, P., Yu, W.**, Dynamic Magnetometer Calibration and Alignment to Inertial Sensors by Kalman Filtering, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 2, pp. 716–723.
15. **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. Для вузов. 9-е изд., испр. М.: Физико-математическая литература, 2001. 376 с.
16. **Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P.**, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 2002, 949 с.
17. **Хуанг Т.С., Эклундб Дж.О., Нуссбаумер Г.Дж. и др.** Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. Преобразования и медианные фильтры. М: Радио и связь, 1984. 224 с.
18. **MPU-9150** Nine-Axis (Gyro + Accelerometer + Compass) MEMS Motion Tracking (NV) Device. URL: <https://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/> (дата обращения: 15.02.2019).
19. **LSM303AGR** e-Compass with 3D digital linear acceleration sensor, 3D digital magnetic sensor. URL: <https://www.st.com/en/mems-and-sensors/lsm303agr.html> (дата обращения: 15.02.2019).
20. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1982. 296 с.

Vasilyuk, N.N. (Topcon Positioning Systems LLC, Moscow, Russia)

Recurrent Implementation of Integral Magnetometer Calibration Algorithm Using the Measurements of a Three-Axis Gyro, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2019, vol. 27, no. 3 (106), pp. 87–102.

Abstract. The paper addresses the practical implementation of a calibration algorithm for a magnetometer integrated in an electronic device, using synchronous measurements of a gyroscope. Recurrent expressions have been derived for accumulating the intermediate matrices, due to which there is no need for accumulating the full set of primary measurements of vector gauges. An algorithm has been formulated for determining the time point when accumulation stops and calculation of calibrated parameters starts.

Key words: magnetometer calibration, recurrent algorithm, integrated magnetometer.

REFERENCES

1. **Vasilyuk, N.N.**, Calibration of integral magnetometer linear model coefficients using simultaneous measurements of a three-axis gyro, *Gyroscopy and Navigation*, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 99–110.
2. **Vasilyuk, N.N., Doronin, A.V., Tychinskii, S.I. and Klimenkov, A.V.**, Patent application No. WO2017135836, A method and device for calibration of a three-axis magnetometer, 2017.
3. **Foster, C.C. and Elkaim, G.H.**, Extension of a two-step calibration methodology to include nonorthogonal sensor axes, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 1070–1078.
4. **Cui, X., Li, Y., Wang, Q., Zang, M. and Li, J.**, Three-axis magnetometer calibration based on optimal ellipsoidal fitting under constraint condition for pedestrian positioning system using

- foot-mounted inertial sensor/magnetometer, *2018 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS)*, Monterey, CA, 2018, pp. 166–174.
5. **Vasconcelos, J.F., Elkaim, G., Silvestre, C., Oliveira, P. and Cardeira, B.**, Geometric approach to strapdown magnetometer calibration in sensor frame, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, vol. 47, no. 2, pp. 1293–1306.
 6. **Yang, D., You, Z., Li, B., Duan, W. and Yuan, B.**, Complete tri-axis magnetometer calibration with a gyro auxiliary, *Sensors*, 2017, vol. 17, no. 6. DOI: 10.3390/s17061223.
 7. **Ding, Z., Cai, H., Yu, C. and Zhang, W.**, Novel low cost calibration methods for MEMS inertial/magnetic integrated sensors, *Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, Yantai, 2014, pp. 505–511.
 8. **Zhu, M., Zhu, Y. and Yu, W.**, An efficient method for gyroscope-aided full magnetometer calibration, *Sensors*, 2019, vol. 19, no. 15, pp. 6355–6361.
 9. **Wu, Y. and Luo, S.**, On misalignment between magnetometer and inertial sensors, *Sensors*, 2016, vol. 16, no. 16, pp. 6288–6297.
 10. **Fedele, G., D’Alfonso, L. and D’Aquila, G.**, Magnetometer bias finite-time estimation using gyroscope data, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 2926–2936.
 11. **Ousaloo, H.S., Sharifi, G., Mahdian, J. and Nodeh, M.T.**, Complete calibration of three-axis strapdown magnetometer in mounting frame, *Sensors*, 2017, vol. 17, no. 23, pp. 7886–7893.
 12. **Zhang, Z.**, Two-step calibration methods for miniature inertial and magnetic sensor units, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, vol. 62, no. 6, pp. 3714–3723.
 13. **Han, K., Han, H., Wang, Z. and Xu, F.**, Extended Kalman filter-based gyroscope-aided magnetometer calibration for consumer electronic devices, *Sensors*, 2017, vol. 17, no. 1, pp. 63–71.
 14. **Wu, Y., Zou, D., Liu, P. and Yu, W.**, Dynamic magnetometer calibration and alignment to inertial sensors by Kalman filtering, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 2, pp. 716–723.
 15. **Beklemishev, D.V.**, *Kurs analiticheskoi geometrii i lineinoi agebry* (Course of Analytical Geometry and Linear Algebra), textbook for higher educational institutions, Moscow: Fiziko-matematicheskaya literatura, 2001.
 16. **Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P.**, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 2002.
 17. **Huang, T.S., Eklund, J.-O., Nussbaumer, G.J. et al.**, *Fast Algorithms in Digital Image Processing. Transformations and Median Filters*, Moscow: Radio i svyaz’, 1984.
 18. **MPU-9150** Nine-Axis (Gyro + Accelerometer + Compass) MEMS MotionTracking (NV) Device. <https://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>. Accessed February 15, 2019.
 19. **LSM303AGR** e-Compass with 3D digital linear acceleration sensor, 3D digital magnetic sensor. <https://www.st.com/en/mems-and-sensors/lsm303agr.html>. Accessed February 15, 2019.
 20. **Ermakov, S.M. and Mikhailov, G.A.**, *Statisticheskoe modelirovanie* (Statistical Modeling), 2nd Ed., additional, Moscow: Nauka, 1982.

Материал поступил 20.02.2019