

О. Н. БОГДАНОВ, А. В. ФОМИЧЕВ

О ВЛИЯНИИ ЗАДЕРЖЕК В ТРАКТАХ ДАТЧИКОВ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА ТОЧНОСТЬ НАВИГАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Исследовано влияние взаимных задержек в трактах датчиков угловой скорости (ДУС) на точность бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). Установлены два типа движений БИНС, для которых задержки в трактах ДУС порядка микросекунды приводят к существенным навигационным погрешностям. Исследованы чувствительность навигационных погрешностей к отклонениям от этих движений и влияние задержек в трактах ДУС на реальных траекториях, зарегистрированных при летных испытаниях.

Ключевые слова: бесплатформенная инерциальная навигационная система, задержки в трактах датчиков угловой скорости, погрешности навигационного решения.

Введение

Погрешности автономного навигационного решения БИНС вызваны преимущественно инструментальными погрешностями трактов инерциальных датчиков – акселерометров и ДУС. Стандартная модель инструментальных погрешностей обычно содержит смещения нулевых сигналов, погрешности масштабов, перекосы осей чувствительности, вариативность указанных параметров в зависимости от температуры и других воздействий, случайные погрешности [1–3]. Другим фактором, критически влияющим на точность БИНС, являются задержки и частотно-зависимые погрешности информационных трактов чувствительных элементов [4–6]. В данной статье рассмотрен вопрос о влиянии постоянных задержек в трактах ДУС.

Известно, что все погрешности трактов инерциальных датчиков могут быть пересчитаны в некоторые приведенные инструментальные погрешности трактов акселерометров и ДУС. Для этих приведенных погрешностей, в свою очередь, можно определить соответствующие им навигационные погрешности для любой конкретной траектории.

Таким образом, для оценки влияния взаимной несинхронности измерений ДУС следует вычислить соответствующий приведенный дрейф. Для исследования парциального вклада несинхронности в навигационную погрешность далее будем считать, что все остальные инструментальные погрешности БИНС отсутствуют. Введем приборную систему координат Mz ($Mz_1z_2z_3$), связанную с ося-

Богданов Олег Николаевич. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории управления и навигации МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва).

Фомичев Александр Владимирович. Кандидат физико-математических наук, заместитель начальника тематического направления – заместитель главного конструктора ПАО «МИЭА» (Москва).

ми блока чувствительных элементов (БЧЭ) БИНС. Здесь точка M – приведенный центр БИНС, z_1, z_2, z_3 – оси чувствительности БЧЭ, совпадающие с осями чувствительности ДУС из-за отсутствия перекосов осей чувствительности. Обозначим через $\omega_z(t) = (\omega_{z1}(t), \omega_{z2}(t), \omega_{z3}(t))^T$ вектор угловой скорости объекта, измеряемый ДУС в момент времени t . Если в измерительных трактах присутствуют задержки, то в момент t блок ДУС измеряет вектор $\omega'_z(t) = (\omega_{z1}(t - \tau_1), \omega_{z2}(t - \tau_2), \omega_{z3}(t - \tau_3))^T$, где τ_i – задержка в тракте ДУС с номером i .

Используя разложение в ряд Тейлора по первому приближению, для приведенного дрейфа триады ДУС можно получить выражение

$$v_z = \omega'_z - \omega_z = \begin{pmatrix} v_{z1} \\ v_{z2} \\ v_{z3} \end{pmatrix} \approx - \begin{pmatrix} \tau_1 \dot{\omega}_{z1} \\ \tau_2 \dot{\omega}_{z2} \\ \tau_3 \dot{\omega}_{z3} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Другими словами, приведенный дрейф датчиков угловой скорости пропорционален угловому ускорению при изменении модуля вектора угловой скорости либо его направления. Исходя из формулы (1), легко оценить порядок величины дрейфа, однако его влияние на навигационное решение определяется характером движения, от которого зависит, будет ли погрешность ориентации, обусловленная дрейфом, «накапливаться» либо «осредняться».

В работе определены два типа движения БИНС, для которых наличие углового ускорения и микросекундных задержек в трактах ДУС приводит к достаточно большим значениям приведенного дрейфа. Эти движения описываются простыми аналитическими функциями времени. Для каждого движения выполнено численное моделирование, подтверждающее согласованность аналитических расчетов и модели. Моделирующая программа позволяет исследовать влияние отклонения движения от установленного и определить диапазоны параметров движения, для которых приведенный дрейф от микросекундных задержек остается неприемлемо большим для автономной навигации.

Особый интерес представляет влияние взаимных задержек в трактах ДУС при движении по реальным траекториям. Моделирующая программа позволяет исследовать и этот вопрос на файлах траекторных данных, зарегистрированных в ходе летных экспериментов.

Первый тип движения: вращение объекта вокруг неподвижной относительно Земли оси с переменной угловой скоростью

Введем географическую систему координат Mx ($Mx_1x_2x_3$). Начало географической системы M совпадает с приведенным центром БИНС, ось x_1 направлена вдоль географической параллели на Восток, ось x_2 – вдоль меридиана на Север, ось x_3 – вдоль географической вертикали. Введение этой системы координат удобно для наглядного исследования влияния приведенного дрейфа на точность навигационного решения. Если для некоторого движения приведенный дрейф в проекции на географические оси имеет ненулевые тренды на временах порядка периода Шулера, то влияние задержек в трактах ДУС на навига-

ционное решение для данного движения будет существенным.

Будем считать, что БИНС расположена на объекте так, что приборная ось z_1 направлена вдоль боковой оси в сторону правого борта, ось z_2 направлена по продольной оси объекта вперед, ось z_3 – по вертикальной оси объекта. Переход из географической системы координат к приборной описывается следующей цепочкой поворотов:

$$\begin{array}{ccccccc} & -\psi & & \vartheta & & & \gamma \\ Mx & \rightarrow & Mx' & \rightarrow & Mx'' & \rightarrow & Mz \\ & 3 & & 1 & & & 2 \end{array} \quad (2)$$

Здесь ψ – угол истинного курса, ϑ – угол тангажа, γ – угол крена, Mx', Mx'' – промежуточные системы координат. Под каждой стрелкой указан номер оси системы координат, вокруг которой совершается текущий поворот.

Предположим, что в начальный момент времени БИНС повернута на некоторый угол курса ψ , углы крена и тангажа нулевые. Далее система вращается вокруг оси x_2 географической системы координат, поворот описывается углом поворота κ . Вектор измерений идеальных ДУС для этого движения имеет вид:

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} = \dot{\kappa}(t) \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Отсюда и из (1) следует выражение для вектора приведенного дрейфа:

$$v_z = \omega'_z - \omega_z = -\ddot{\kappa}(t) \begin{pmatrix} \tau_1 \sin \psi \\ \tau_2 \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В осях географической системы Mx вектор приведенного дрейфа записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} v_x &= \begin{pmatrix} v_{z1} \cos \psi \cos \kappa - v_{z2} \sin \psi \cos \kappa \\ v_{z1} \sin \psi + v_{z2} \cos \psi \\ -v_{z1} \cos \psi \sin \kappa + v_{z2} \sin \psi \sin \kappa \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \ddot{\kappa}(t) \begin{pmatrix} -(\tau_1 - \tau_2) \cos \psi \sin \psi \cos \kappa \\ -\tau_1 \sin^2 \psi - \tau_2 \cos^2 \psi \\ (\tau_1 - \tau_2) \cos \psi \sin \psi \sin \kappa \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Замечание. При вычислении вектора измерений идеальных ДУС (3) и вектора приведенного дрейфа (4) здесь и далее не учитывается угловая скорость вращения Земли, малая по сравнению с характерными угловыми скоростями маневрирования объектов, на которые устанавливаются БИНС, или угловыми

скоростями при стендовых испытаниях. Географический трехгранник считается неподвижным. Из приводимых ниже формул и оценок по порядку величины следует, что учет угловой скорости Земли приведет к пренебрежимо малым поправкам.

Из формулы (5) видно, что при вращении относительно одной из осей чувствительности $\psi = \pi n / 2$, $n \in \mathbb{Z}$ лишь вторая компонента вектора v_x отлична от нуля. В условиях стендовых экспериментов с вращением относительно фиксированной оси характерны следующие движения, содержащие угловые ускорения:

- поворот из одного неподвижного относительно Земли положения в другое;
- разгон до некоторой угловой скорости и дальнейшее вращение с почти постоянной угловой скоростью;
- колебания относительно оси.

На коротких интервалах времени для определения порядка погрешностей ориентации, обусловленных приведенным дрейфом (5), можно воспользоваться грубой оценкой сверху

$$\beta = \int_0^t |v_x| dt \sim \ddot{\kappa} t \tau, \quad (6)$$

следующей из выражения модуля вектора (5). Здесь β – модуль вектора малого поворота, описывающего погрешность вычисленной ориентации географического трехгранника, обусловленную приведенным дрейфом, $\ddot{\kappa}$ – характерная величина углового ускорения при рассматриваемом движении, $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$.

Ясно, что при всех вышеописанных движениях, кроме колебаний, практически осуществимое угловое ускорение не может действовать продолжительное время и для оценки можно ограничиться коротким временным интервалом порядка секунды. Пусть, например, $\ddot{\kappa} = 1 \text{ c}^{-2}$, $\tau = 10^{-6} \text{ c}$, $t = 1 \text{ c}$. Тогда $|v_x| \sim 10^{-6} \text{ c} \approx 0.2^\circ / \text{ч}$ и $\beta \sim 0.2''$, что является достаточно малой величиной для навигационных систем с позиционными погрешностями не более 1,85 км за каждый час работы, для которых погрешность построения вертикали имеет величину порядка десяти угловых секунд.

При использовании формулы (6) необходимо иметь в виду, что она непригодна для использования на длительных интервалах времени, поскольку компоненты вектора (5) могут быть знакопеременными функциями, имеющими среднее значение, близкое к нулю. Именно поэтому представляет интерес выявить движения, при которых приведенные дрейфы в географических осях будут иметь ненулевые средние значения. Два типа таких движений описаны ниже.

Рассмотрим гармонические колебания объекта вокруг оси x_2 . Тогда

$$\kappa = \kappa_0 \sin \omega t, \quad (7)$$

где κ_0 – амплитуда колебаний, ω – частота колебаний, а для малых значений амплитуды κ_0 колебаний справедливо приближение

$$\ddot{\kappa} \sin \kappa \approx -\kappa_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \quad (8)$$

В результате средние значения компонент приведенного дрейфа ДУС в осях географической системы координат вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle v_{x1} \rangle &= \langle v_{x2} \rangle = 0, \\ \langle v_{x3} \rangle &\approx \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)\kappa_0^2\omega^2 \sin\psi \cos\psi = \frac{1}{4}(\tau_2 - \tau_1)\kappa_0^2\omega^2 \sin 2\psi.\end{aligned}\quad (9)$$

Из соотношения (9) следует, что среднее значение приведенного дрейфа $\langle v_{x3} \rangle$ отлично от нуля и при $\psi = \pi/4$ достигает наибольшей величины. Для численных оценок рассмотрим колебания с секундным периодом ($\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$), амплитудой $\kappa_0 = 5^\circ$ и разностью задержек в измерительных трактах ДУС $\tau_2 - \tau_1 = 10^{-6} \text{ с}$. Тогда из (9) следует, что среднее значение приведенного дрейфа $\langle v_{x3} \rangle = 0.015^\circ / \text{ч}$, а это критично для навигационных систем приведенной ранее мильной точности.

Отметим, что рассмотренное движение легко реализовать при испытаниях на поворотных стендах. В условиях эксплуатации движение, близкое к рассмотренному, может быть реализовано, например, при качке объекта на волнах или при виброиспытаниях [5, 6].

Второй тип движения: вращение по двум осям с постоянными угловыми скоростями

Другим движением, допускающим простое аналитическое описание и реализуемым в стендовых экспериментах, является движение, при котором углы ориентации изменяются так, что

$$\vartheta = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \text{const}, \quad \dot{\gamma} = \text{const}.\quad (10)$$

При произвольном движении приборного трехгранника относительно географического угловая скорость в приборных осях ω_z выражается через углы ориентации и их производные по формуле:

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma \end{pmatrix}.\quad (11)$$

Для рассмотренного движения

$$\omega_z = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) \end{pmatrix}.\quad (12)$$

Здесь γ_0 – значение угла крена в начальный момент. Вектор измерений блока ДУС при наличии задержек τ_1, τ_2, τ_3 в измерительных трактах будет иметь вид:

$$\omega'_z = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t - \dot{\gamma}\tau_1) \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t - \dot{\gamma}\tau_3) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Следовательно,

$$v_z = \omega'_z - \omega_z \approx \begin{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\gamma}\tau_1 \cos \vartheta \cos(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) \\ 0 \\ \dot{\psi}\dot{\gamma}\tau_3 \cos \vartheta \sin(\gamma_0 + \dot{\gamma}t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Запишем проекцию v_z на оси географической системы координат Mx . Матрица A_{xz} перехода из приборной системы в географическую выражается через углы курса ψ , тангажа ϑ и крена γ :

$$A_{xz} = \begin{pmatrix} c_\psi c_\gamma - s_\psi s_\vartheta s_\gamma & -s_\psi c_\vartheta & c_\psi s_\gamma - s_\psi s_\vartheta c_\gamma \\ s_\psi c_\gamma + c_\psi s_\vartheta s_\gamma & c_\psi c_\vartheta & s_\psi s_\gamma - c_\psi s_\vartheta c_\gamma \\ -c_\vartheta s_\gamma & s_\vartheta & c_\vartheta c_\gamma \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь для краткости символами « c » и « s » обозначены функции косинус и синус соответственно, а нижние индексы – аргументы этих функций. Из (14) и (15) следует, что

$$v_x = A_{xz} v_z = \dot{\psi}\dot{\gamma}c_\vartheta \begin{pmatrix} \tau_1 c_\gamma (c_\psi c_\gamma - s_\psi s_\vartheta s_\gamma) + \tau_3 s_\gamma (c_\psi s_\gamma + s_\psi s_\vartheta c_\gamma) \\ \tau_1 c_\gamma (s_\psi c_\gamma + c_\psi s_\vartheta s_\gamma) + \tau_3 s_\gamma (s_\psi s_\gamma - c_\psi s_\vartheta c_\gamma) \\ (\tau_3 - \tau_1) c_\vartheta s_\gamma c_\gamma \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Среднее значение приведенного дрейфа в географических осях отлично от нуля при

$$\dot{\psi} = 2\dot{\gamma}. \quad (17)$$

В этом случае

$$\gamma = \gamma_0 + \dot{\gamma}t, \quad \psi = \psi_0 + 2\dot{\gamma}t, \quad (18)$$

где ψ_0, γ_0 – значения углов в начальный момент времени. Тригонометрические преобразования формулы (16) приводят к сокращению членов $\dot{\gamma}t$ и $2\dot{\gamma}t$ и появлению постоянных ненулевых средних значений компонент вектора (16), что и поясняет выбор соотношения между угловыми скоростями (17). Осреднение (16) дает следующий результат:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{8} \dot{\psi}^2 (\tau_1 - \tau_3) \cos \vartheta (1 - \sin \vartheta) \begin{pmatrix} \cos(\psi_0 - 2\gamma_0) \\ \sin(\psi_0 - 2\gamma_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что модуль вектора приведенного дрейфа $\langle v_x \rangle$ постоянен. Его максимальное значение достигается при значении угла тангажа $\Theta = -30^\circ$:

$$\langle v_x \rangle = \frac{3\sqrt{3}}{32} \dot{\psi}^2 (\tau_1 - \tau_3). \quad (20)$$

Для определенности возьмем характерное для маневренных летательных аппаратов значение угловой скорости $\dot{\psi} = 1 \text{ с}^{-1}$ и разность задержек в измерительных трактах ДУС $\tau_1 - \tau_3 = 10^{-6} \text{ с}$. Тогда модуль усредненного приведенного дрейфа $\langle v_x \rangle \approx 1.62 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1} \approx 0.03^\circ / \text{ч}$.

Таким образом, при специально подобранных параметрах движения неосредняемый приведенный дрейф в осях географического трехгранника достигает существенных значений и будет приводить к соответствующим навигационным погрешностям. Рассмотренное движение можно воспроизвести при испытаниях на высокоточных двух- и трехосных поворотных стендах.

В данной работе выявлены не все движения, вызывающие неосредняемые приведенные дрейфы в географических осях. Тем не менее способ получения вышеприведенных соотношений позволяет понять механизм появления неосредняемых дрейфов, которые являются результатом циклических угловых маневров определенного вида. Данный результат описан в литературе, например в [5, 6] рассмотрен для синфазных колебаний относительно приборных осей. Это позволяет предположить, что задержки в трактах ДУС в эксплуатации могут проявляться при выполнении летательным аппаратом однотипных циклических маневров либо при воздействии вибрации на навигационную систему.

Численное моделирование описанных движений

Рассмотренные выше движения демонстрируют, что приведенный дрейф, вызванный задержками в измерительных трактах ДУС, может оказаться существенным даже при задержках порядка 1 мкс. Представляет интерес подтвердить этот результат и исследовать чувствительность приведенного дрейфа к изменению параметров движения. Последний вопрос можно исследовать, задав движение, при котором условие (17) будет выполняться неточно, то есть

$$\dot{\psi} = 2\dot{\gamma} + \dot{\delta}. \quad (21)$$

Варьируя расстройку $\dot{\delta}$, можно изучить ее влияние на навигационную погрешность.

Математическое моделирование навигационной задачи БИНС состоит из двух этапов:

- на первом этапе формируются показания инерциальных датчиков (ДУС и акселерометров): показания акселерометров формируются идеальными, показания ДУС содержат задержки [8];
- на втором этапе по вычисленным измерениям датчиков решаются уравнения инерциальной навигации [1].

Пусть рассматриваемый интервал времени $[t_0, t_n]$ имеет длину $n \cdot \Delta t$, где n – целое число, а Δt – интервал времени, на котором формируется каждое измерение ДУС.

На **первом этапе** для моделирования измерений ДУС на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ ($j=1, \dots, n$) используется решение кинематических уравнений Пуассона:

$$A_z(t_j) = \left(E + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \hat{\alpha}_z + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \hat{\alpha}_z^2 \right) A_z(t_{j-1}). \quad (22)$$

Здесь $A_z(t_{j-1}), A_z(t_j)$ – матрица ориентации приборной системы относительно инерциального пространства в моменты времени соответственно t_{j-1}, t_j , α_z – вектор поворота приборной системы за интервал времени $[t_{j-1}, t_j]$, α – его модуль, $\hat{\alpha}_z$ – кососимметрическая матрица, элементы которой вычисляются через компоненты вектора $\alpha_z = (\alpha_{z1}, \alpha_{z2}, \alpha_{z3})^T$:

$$\hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Замечание. Поскольку в рассмотренных в работе движениях приведенный центр БИНС M неподвижен относительно Земли, а угловой скоростью вращения Земли мы пренебрегаем, то можно считать, что географическая система координат является инерциальной. Поэтому $A_z = A_{xz}$, где A_z вычисляется по формуле (22).

Исходными данными для моделирования являются углы ориентации: углы курса $\psi(t)$, тангажа $\vartheta(t)$ и крена $\gamma(t)$, заданные при $t \in [t_0, t_n]$. Через углы ориентации вычисляются матрицы ориентации $A_z(t_j)$, $j=0, \dots, n$. На каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ ($j=1, \dots, n$) по известным значениям матриц $A_z(t_{j-1})$ и $A_z(t_j)$ из (22) определяется вектор поворота α_z . Вектор угловой скорости получается из вектора поворота делением каждой компоненты на длину интервала Δt :

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{z1} / \Delta t \\ \alpha_{z2} / \Delta t \\ \alpha_{z3} / \Delta t \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Приведенная последовательность действий позволяет вычислить вектор измерений идеальных ДУС. Отметим, что показания ДУС представляют собой среднюю угловую скорость на каждом отрезке времени $[t_{j-1}, t_j]$. При наличии задержек в измерительных трактах первый ДУС измеряет вектор средней скорости на отрезке времени $[t_{j-1} - \tau_1, t_j - \tau_1]$, второй ДУС – на отрезке $[t_{j-1} - \tau_2, t_j - \tau_2]$, третий – на отрезке $[t_{j-1} - \tau_3, t_j - \tau_3]$.

Вектор $\omega'_z = (\omega'_{z1}, \omega'_{z2}, \omega'_{z3})^T$ вычисляется покомпонентно. Для вычисления каждой компоненты ω'_{zi} ($i=1, 2, 3$) на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ вычисляются матрицы

$A_z(t_{j-1} - \tau_i)$ и $A_z(t_j - \tau_i)$, и из соотношения (22) находится вектор поворота объекта α_z за отрезок времени $[t_{j-1} - \tau_i, t_j - \tau_i]$. Из него по формуле (24) определяется величина ω'_{zi} i -й компоненты вектора ω'_z . Корректность такого подхода подтверждена совпадением дрейфов (9) и (19), полученных аналитически, с результатами моделирования.

Моделирование измерений акселерометров выполняется на основе векторного динамического уравнения движения:

$$\dot{v}_x = \hat{\omega}_x v_x + g_x^0 + A_{xz} f_z. \quad (25)$$

Здесь v_x – вектор абсолютной скорости объекта в проекциях на оси географической системы координат Mx , $\hat{\omega}_x$ – кососимметрический оператор, соответствующий вектору абсолютной угловой скорости географической системы координат, строящийся по правилу (23), g_x^0 – вектор силы тяготения в осях географической системы и f_z – вектор измерений акселерометров в осях приборной системы координат. Для неподвижного относительно Земли приведенного центра БИНС можно положить $f_x = (0, 0, g)^T$, $f_z = A_{xz}^T f_x$, однако для моделирования движения по траекториям, описанного далее, необходимо использовать соотношения (25).

Замечание. Поскольку запаздывание в измерительных трактах акселерометров не является предметом настоящего исследования, вопрос моделирования их измерений не раскрыт так детально, как для ДУС. Взаимная рассинхронизация измерений ДУС и акселерометров рассматривается, например, в [7].

На **втором этапе** решаются уравнения инерциальной навигации по вычисленным измерениям инерциальных датчиков. По измерениям ДУС с помощью кинематического уравнения Пуассона (22) вычисляется матрица ориентации. Вектор скорости объекта определяется по измерениям акселерометров с помощью динамического уравнения (25). Для определения географических координат по измерениям датчиков – долготы λ' и географической широты ϕ' – используется решение кинематических уравнений Пуассона для матрицы ориентации A_x географической системы относительно инерциального пространства:

$$A_x(t_j) = \left(E + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \hat{\alpha}_x + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \hat{\alpha}_x^2 \right) A_x(t_{j-1}). \quad (26)$$

Здесь $\hat{\alpha}_x$ – кососимметрический оператор, соответствующий вектору поворота α_x географической системы за интервал времени $[t_{j-1}, t_j]$, α – его модуль. Вектор поворота определяется из формулы $\alpha_x = \omega_x \Delta t$, где угловая скорость модельного географического трехгранника ω_x вычисляется по горизонтальным компонентам вектора скорости v_x и главным радиусам кривизны Земли в соответствии с известными навигационными соотношениями [1]. Таким образом, соотношение (26) позволяет определить матрицу $A_x(t_j)$, а по ее элементам – углы широты и долготы.

Замечание. При моделировании навигационного решения с учетом погрешностей появляется модельная точка M' , соответствующая вычисленному местоположению. При ее перемещении относительно Земли ориентация географического трехгранника изменяется в соответствии с (26). При этом ориентация географического трехгранника для точки M остается неизменной, а его угловая скорость – нулевой.

Пусть λ, ϕ – географические координаты траектории, на которой проводится моделирование (в рассматриваемых нами примерах $\lambda = const, \phi = const$), λ', ϕ' – результат решения уравнений навигации. Тогда $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, $\Delta\phi = \phi' - \phi$ – погрешности навигационного решения, соответствующие влиянию задержек.

Результаты моделирования

Моделирование колебательного движения вокруг горизонтальной оси (качка) проводилось для значений параметров, использованных в аналитической оценке (см. текст после формулы (9)):

$$\psi = \frac{\pi}{4}; \quad \omega = 2\pi; \quad \kappa_0 = 5^\circ; \quad \tau_2 - \tau_1 = 10^{-6} \text{ с}. \quad (27)$$

Моделирование подтверждает, что среднее значение приведенного дрейфа вдоль вертикальной оси $\langle v_{x3} \rangle \approx 0.015^\circ / \text{ч}$. Соответствующие ему навигационные погрешности имеют порядок 100 м за 1 час движения. Однако при качке относительно другого направления могут возникать проекции приведенного дрейфа на горизонтальную плоскость, которые приведут к существенно большим навигационным погрешностям.

Моделирование движения проводилось для значений параметров

$$\dot{\psi} = 1 \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\gamma} = 0.5 \text{ с}^{-1}, \quad \tau_1 - \tau_3 = 10^{-6} \text{ с}, \quad \psi_0 = \gamma_0 = 0 \quad (28)$$

и подтвердило аналитическую оценку, следующую из формулы (19):

$$\langle v_{x1} \rangle \approx 0.03^\circ / \text{ч}, \quad \langle v_{x2} \rangle = 0^\circ / \text{ч}, \quad \langle v_{x3} \rangle = 0^\circ / \text{ч}. \quad (29)$$

Для исследования чувствительности дрейфа к параметрам движения в соответствии с (21) были рассмотрены расстройки, когда $\dot{\psi} = 1.001 \text{ с}^{-1}$, $\dot{\psi} = 1.01 \text{ с}^{-1}$, $\dot{\psi} = 1.1 \text{ с}^{-1}$, а значения остальных параметров (28) остаются прежними.

На рис. 1 и 2 приведены графики зависимости погрешностей навигационного решения по координатам от времени при $\dot{\psi} = 1 \text{ с}^{-1}$, $\dot{\gamma} = 0.5 \text{ с}^{-1}$, $\tau_1 - \tau_3 = 10^{-6} \text{ с}$, $\psi_0 = \gamma_0 = 0$ и при наличии вышеуказанных расстроек. Сплошная линия соответствует погрешности широты $\Delta\phi$, пунктирная линия – погрешности долготы $\Delta\lambda$. Из представленных графиков видно, что навигационные погрешности быстро убывают при увеличении расстройки частот. Очевидно, что в условиях эксплуатации БИНС на летательных аппаратах длительные строго периодические движения с соизмеримыми частотами маловероятны, поэтому естественно предположить, что влияние задержек порядка микросекунды в реальных условиях будет пренебрежимо малым.

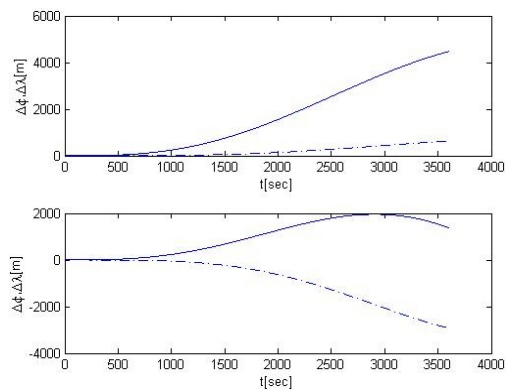


Рис. 1. Графики погрешностей широты $\Delta\varphi$ и долготы $\Delta\lambda$ (верхний график соответствует случаю $\dot{\psi} = 1 \text{ рад/с}$, нижний – случаю $\dot{\psi} = 1,001 \text{ рад/с}$)

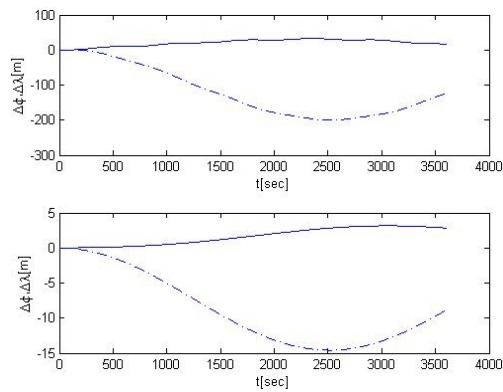


Рис. 2. Графики погрешностей широты $\Delta\varphi$ и долготы $\Delta\lambda$ (верхний график соответствует случаю $\dot{\psi} = 1,01 \text{ рад/с}$, нижний – случаю $\dot{\psi} = 1,1 \text{ рад/с}$)

Моделирование навигационной задачи по зарегистрированным траекторным данным

Исходной информацией для моделирования являются углы ориентации объекта – курс ψ , тангаж ϑ и крен γ и его координаты – географическая широта φ , долгота λ и высота h , зарегистрированные в файлах данных летных испытаний.

Математическое моделирование решения навигационной задачи БИНС на файлах траекторных данных представляет собой достаточно сложную процедуру, детально описанную, например, в статьях [8, 9]. Далее приводится качественное описание этой процедуры, состоящей из трех этапов:

1. на первом этапе осуществляются интерполяция зарегистрированных данных на требуемую частоту работы инерциальных датчиков и последующее сглаживание данных с помощью оконного фильтра;
2. на втором этапе формируются показания инерциальных датчиков (ДУС и акселерометров): как и ранее, показания акселерометров формируются идеальными, показания ДУС содержат задержки [6, 7];
3. на третьем этапе по вычисленным измерениям датчиков и начальным условиям решаются навигационные уравнения.

Отметим, что при моделировании движения по траектории географическая система координат Mx является подвижной и поэтому не может рассматриваться как инерциальная. Движение географической системы координат относительно инерциальной подробно изложены в [1] и здесь не приводятся.

Рассмотрены три типовые полетные траектории:

1. перелет из одного аэропорта в другой на рабочей высоте длительностью около часа – траектория магистрального перелета;
2. многократное движение примерно по одной и той же замкнутой траектории на постоянной высоте;
3. интенсивное маневрирование со значительными изменениями высоты, большими значениями угловой скорости и углового ускорения по каждой координатной оси.

При моделировании задавались следующие значения задержек в измерительных трактах ДУС:

$$\tau_1 = 10^{-6} c, \quad \tau_2 = 2 \cdot 10^{-6} c, \quad \tau_3 = 3 \cdot 10^{-6} c. \quad (30)$$

Перечисленные траектории и соответствующие этим траекториям навигационные погрешности от задержек в измерительных трактах ДУС представлены на рис. 3–5. Во всех трех случаях навигационные погрешности незначительные, что дополнительно подтверждает приведенные выше соображения о малой вероятности появления значительных навигационных погрешностей в эксплуатации при задержках порядка микросекунды.

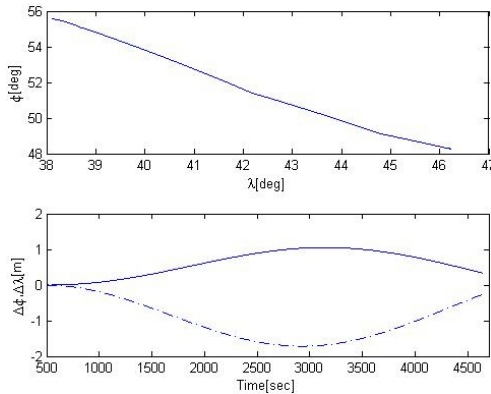


Рис. 3. Профиль траектории 1 и график погрешностей широты $\Delta\phi$ (сплошная линия) и долготы $\Delta\lambda$ (пунктирная линия)

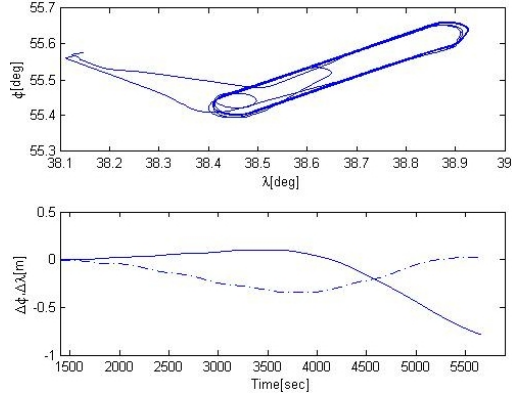


Рис. 4. Профиль траектории 2 и график погрешностей широты $\Delta\phi$ (сплошная линия) и долготы $\Delta\lambda$ (пунктирная линия)

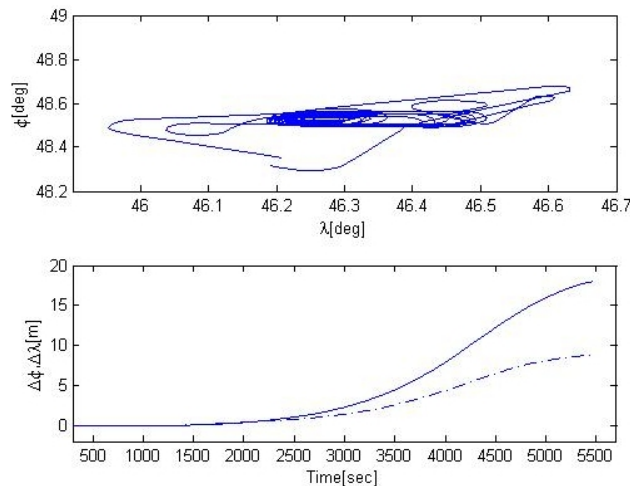


Рис. 5. Профиль траектории 3 и график погрешностей широты $\Delta\phi$ (сплошная линия) и долготы $\Delta\lambda$ (пунктирная линия)

Заключение

В статье проведен анализ влияния взаимных задержек в измерительных трактах ДУС на точность навигационного решения. Получена формула для приведенного дрейфа, обусловленного задержками. Для нескольких видов движений, допускающих аналитическое описание, проведено аналитическое и численное моделирование. Выявлены движения, легко реализуемые на поворотных стендах, для которых весьма малые задержки порядка одной микросекунды

приводят к существенным значениям неосредняемого приведенного дрейфа в географических осях порядка 0.01 °/час и более, неприемлемого для БИНС высокого класса точности. Однако при отклонении параметров движения от выявленных навигационные погрешности быстро убывают по мере увеличения отклонений. По этой причине существенное влияние задержек порядка микросекунды на точность навигационного решения, обусловленное маневрированием объекта в эксплуатации, маловероятно, что подтверждается моделированием на нескольких файлах траекторных данных, соответствующих ряду типовых траекторий маневренного самолета.

Авторы выражают благодарность профессору Г. И. Емельянцеву за привлечение внимания к теме исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС Пресс, 2011. 136 с.
2. Savage, P.G., Improved Strapdown Inertial System Calibration Procedures, Part 1: Procedures and Accuracy Analysis. Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, MN 55359 USA WBN-14020-1, www.strapdownassociates.com, October 20, 2017.
3. Savage, P.G., Improved Strapdown Inertial System Calibration Procedures, Part 2: Analytical Derivations. Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, MN 55359 USA WBN-14020-2, www.strapdownassociates.com, October 20, 2017.
4. Емельянец Г.И., Степанов А.П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. Под общей ред. акад. РАН В.Г.Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2016. 394 с.
5. Слюсарь В.М. Актуальные вопросы проектирования алгоритмов ориентации БИНС Часть 3. Динамическое обобщение задачи проектирования алгоритмов // Гироскопия и навигация. 2006. № 4.
6. Слюсарь В.М. О влиянии инструментальных факторов на скорость углового дрейфа БИНС // XIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: сборник материалов. СПб., 2006. С. 303–307.
7. Кухтевич С.Е. Рафельсон В.Ф. Фомичев А.В. О погрешностях БИНС, обусловленных несинхронностью трактов измерения угловых скоростей и линейных ускорений и геометрий блока акселерометров // Труды МИЭА. 2011. Вып. 3. С. 86–95.
8. Богданов О.Н., Фомичев А.В. Об имитации идеальных показаний датчиков БИНС при произвольном движении объекта // Труды МИЭА. 2013. Вып. 5. С. 46–59.
9. Богданов О.Н., Фомичев А.В. Имитация показаний идеальных датчиков угловой скорости БИНС на основе телеметрических данных движения объекта // Вестник Московского университета. Серия I. Математика. Механика. 2014. №3. С. 42–49.

Bogdanov O.N. (Control and Navigation Laboratory, Lomonosov Moscow State University, Russia), **Fomichev A.V.** (Moscow Institute of Electromechanics and Automation (MIEA), JSC, Russia). Effect of Delays in Rate Sensor Channels on the Accuracy of Navigation Solution of Strapdown Inertial Navigation System. *Гироскопия и Навигация*. 2018. Vol. 26. No. 2 (101). P. 15–28.

Abstract. The effect of mutual delays in rate sensor (RS) channels on the accuracy of a strapdown inertial navigation system (SINS) has been studied. Two types of SINS motion have been identified, for which the delays of about one microsecond in the RS channels result in significant navigation errors. Sensitivity of navigation errors to the deviations from these motions has been investigated, as well as the effect of delays in the RS channels on real trajectories registered in course of flight tests.

Key words: strapdown inertial navigation system, rate sensor channels delay, navigation solution errors.

REFERENCES

1. **Golovan, A.A., and Parusnikov, N.A.**, *Matematicheskie osnovy navigatsionnykh system. Chast 1. Matematicheskie modeli inertial'noi navigatsii* (Mathematical Fundamentals of Navigation Systems. Part 1. Mathematical Models of Inertial Navigation), Ed. 3, MAKS Press, Moscow, 2011.
2. **Savage, Paul G.**, Improved Strapdown Inertial System Calibration Procedures. Part 1. Procedures and Accuracy Analysis. Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, MN 55359 USA WBN-14020-1 www.strapdownassociates.com October 20, 2017.
3. **Savage, Paul G.**, Improved Strapdown Inertial System Calibration Procedures. Part 2. Analytical Derivations. Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, MN 55359 USA WBN-14020-2 www.strapdownassociates.com October 20, 2017.
4. **Emel'yantsev, G.I., and Stepanov, A.P.**, *Integrirovannye inertial'no-sputnikovye sistemy orientatsii i navigatsii* (Integrated Inertial Satellite systems of Orientation and Navigation), ed. Acad. V.G. Peshekhonov, Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg, 2016.
5. **Slyusar', V.M.**, Problems of Strapdown Attitude Algorithms Design. Part 3. Dynamic Generalization of Algorithms Design Task, *Giroskopiya i navigatsiya*, 2006, no. 4, pp. 61–75.
6. **Slyusar', V.M.**, On Effect of Instrumental Factors on Strapdown Attitude Drift Rate, *Giroskopiya i navigatsiya*, 2007, no. 1 (56), pp. 47–61.
7. **Kukhtevich, S.E., Rafel'son, V.F., and Fomichev, A.V.**, Strapdown Inertial Navigation System Errors Caused by Asynchronism of Angular Rates and Linear Accelerations Measurement Channels and Accelerometer Unit Configuration, *Trudy MIEA*, 2011, no. 3, pp. 86–95.
8. **Bogdanov, O.N., and Fomichev, A.V.**, On Simulation of Ideal Readings of SINS Sensors in Random Movement of Vehicle, *Trudy MIEA*, 2013, no. 5, pp. 46–59.
9. **Bogdanov, O.N., and Fomichev, A.V.**, Simulation of Angular Velocity Sensor Measurements Using Telemetry Data on the Motion of an Object, *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 42–49.

Материал поступил 02.02.2018