

Д. ЭХЕА-РОКА, Г. СЕКО-ГРАНАДОС, Х. А. ЛОПЕС-САЛСЕДО

## ОБЗОР ТЕОРИИ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ УГРОЗ ГНСС

*В последние годы появилось множество исследований, посвященных проблеме обнаружения локально действующих помех сигналам ГНСС, вызванных интерференцией, многолучевостью и спуфингом. В настоящее время находят применение классические методы обнаружения таких помех, которые не слишком эффективны. В данной работе мы предлагаем использовать аппарат теории скорейшего обнаружения. Этот подход отвечает требованиям навигационных приложений, в которых критически важно сохранение целостности ГНСС-сигналов.*

**Ключевые слова:** скорейшее обнаружение, последовательное обнаружение, отношение правдоподобия, ГНСС, целостность.

### I. Введение

В настоящее время с широким развертыванием глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [1] одной из главных задач, требующих решения, является обеспечение целостности сигналов для пользователей (за исключением сектора гражданской авиации, где этот параметр давно уже стал определенным критерием качества работы системы). Под целостностью понимается способность пользовательского приемника обеспечить качество и надежность полученного сигнала для безопасной работы критически важных или коммерческих приложений.

В гражданской авиации целостность данных местоположения обычно обеспечивается благодаря применению алгоритмов автономного контроля целостности приемника (Receiver Autonomous Integrity Monitoring – RAIM) и спутниковых систем контроля и коррекции (Satellite Based Augmentation Systems – SBAS). Однако при использовании подобных методов предполагается, что локальные помехи, такие как многолучевость, распространение сигнала не по линии прямой видимости, интерференция и спуфинг, имеют контролируемое воздействие на сигнал [2], что не соответствует действительности в наземных условиях. Именно по этой причине анализ целостности сигнала весьма важен для обеспечения целостности координатно-временных данных, что в настоящее время является актуальной задачей для ГНСС-потребителей.

---

**Эхеа-Рока** Даниэль. Магистр по направлению «Телекоммуникационная техника», аспирант факультета телекоммуникаций и системотехники, Университет Барселоны (Испания).

**Секо-Гранадос** Гонсало. Доктор наук, доцент факультета телекоммуникаций и системотехники, Университет Барселоны.

**Лопес-Салседо** Хосе А. Доктор наук, доцент факультета телекоммуникаций и системотехники, Университет Барселоны.

---

Научный редактор перевода д.т.н. Д. А. Кошаев

Чтобы повысить целостность сигнала в наземных условиях, необходимо максимально быстро обнаруживать локальные помехи и оперативно сообщать о них пользователю. До сих пор предлагались методы, основанные на классической схеме обнаружения [3–5], которая, однако, не очень хорошо подходит для приложений обеспечения безопасности. Альтернативные методы могут быть основаны на использовании банка фильтров Калмана, впервые предложенного в [6], банка взаимодействующих фильтров Камана [7] или расширенного фильтра Калмана [8]. Данные методы нельзя назвать простыми с вычислительной точки зрения, кроме того, в них предполагается гауссовость измерений. С другой стороны, в последнее время среди исследователей стали популярны методики компенсации [9–12], где обнаружению помех отводится второстепенная роль, хотя в действительности это гораздо более важно, чем компенсация, особенно при распространении сигнала не по линии прямой видимости. Дело в том, что, до того как начать применять методики компенсации, мы можем извлечь пользу из знания о том, присутствуют помехи или нет. В частности, можно не учитывать текущие измерения [13], что позволит избежать сложных компенсирующих методик или использовать их на максимально раннем этапе.

С тем чтобы быстро выявить угрозу нарушения целостности сигнала, необходимо сформулировать задачу в контексте *статистического обнаружения изменений*, или скорейшего обнаружения. Такой подход нацелен на минимизацию задержки обнаружения, поэтому он прекрасно подходит для решения рассматриваемой проблемы. В последние годы теория скорейшего обнаружения активно изучалась и применялась в различных областях [14–16]. Одна из самых популярных методик – алгоритм CUSUM (алгоритм кумулятивных сумм), который был впервые предложен Пейджем в 1954 г. [17]. Однако прошло много времени до того момента, как Лорден (Lorden) продемонстрировал в 1971 г., что метод оптимален с асимптотической точки зрения (т.е. когда среднее время между ложными тревогами приближается к бесконечности) [18]. Наконец, в 1986 г. Мустакидес [19] доказал, что CUSUM оптимален и в качестве неасимптотического метода. Большое количество времени, которое прошло между открытием Пейджа и оптимальными результатами, полученными Лорденом и Мустакидесом, со всей очевидностью демонстрирует, что анализ статистических свойств и оптимальности теории скорейшего обнаружения связаны с определенными сложностями.

Существует совсем мало исследований, в которых эта проблема скрупулезно изучается, среди них можно назвать работы Никифорова [20] и Пура [21], которые, однако, не рассчитаны на широкий круг читателей. В связи с этим цель данной работы следует сформулировать как подробный анализ статистических свойств алгоритма CUSUM (оптимальность в рамках данной статьи не рассматривается) и его применение для обнаружения локальных помех ГНСС-сигналов. Мы уже касались этой проблемы в [22]. В данной статье дается более подробное объяснение в части различных интерпретаций CUSUM (раздел III-A), а также предлагается ряд ключевых концепций (раздел III-B). Кроме того, в разделе III-C приведено доказательство результатов, что ранее не делалось. В целом наша главная задача заключается в ознакомлении потребителей информации ГНСС с методом скорейшего обнаружения для сохранения целостности сигналов.

В других частях статьи рассматриваются следующие вопросы: раздел II посвящен модели сигнала, раздел III – основным принципам метода скорейшего обнаружения. В разделе IV описывается скорейшее обнаружение интерференции и многолучевости. В разделе V представлены выводы.

## II. Модель сигнала

Рассмотрим последовательность независимых наблюдений  $\{x(0), x(1), \dots, x(v), x(v+1), \dots\}$ , где  $v$  – момент времени, когда появляется угроза нарушения целостности. Предполагается, что до момента  $v$  (гипотеза  $\mathcal{H}_0$ ) наблюдение  $x(n)$  соответствует данному статистическому распределению, в то время как после изменения (гипотеза  $\mathcal{H}_1$ ) оно соответствует другому распределению:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : x(n) &\sim f_0(x(n)), \quad n < v \\ \mathcal{H}_1 : x(n) &\sim f_1(x(n)), \quad n \geq v \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом вышеизложенного можно сказать, что метод скорейшего обнаружения нацелен на поиск стратегии, которая минимизирует задержку обнаружения и при этом сохранит большую, чем обычно, продолжительность среднего интервала времени между ложными тревогами. С этой целью Пейдж предложил алгоритм CUSUM [17], в основе которого лежит ключевое понятие в статистике, а именно логарифм отношения правдоподобия (log-likelihood ratio – LLR):

$$\text{LLR}(n) \doteq \ln \frac{f_1(x(n))}{f_0(x(n))}. \quad (2)$$

Фундаментальное свойство LLR состоит в следующем. Пусть  $E_0$  и  $E_1$  обозначают математические ожидания для двух распределений  $f_0$  и  $f_1$  соответственно. Тогда

$$E_0[\text{LLR}(n)] < 0 \text{ и } E_1[\text{LLR}(n)] > 0, \quad (3)$$

т.е. изменение распределения случайных переменных  $x(n)$  приводит к изменению знака среднего значения LLR. На рис. 1 представлена сумма LLR (нижний график)

$$S_0^n = \sum_{i=0}^n \text{LLR}(i) \quad (4)$$

для случая гауссовской последовательности наблюдений (верхний график) со средним значением до изменения  $\mu_0 = 0$ , средним после изменения  $\mu_1 = 4$  и постоянной дисперсией  $\sigma^2 = 2,5$ . Неизвестное изменение здесь происходит в момент  $v = 25$ .

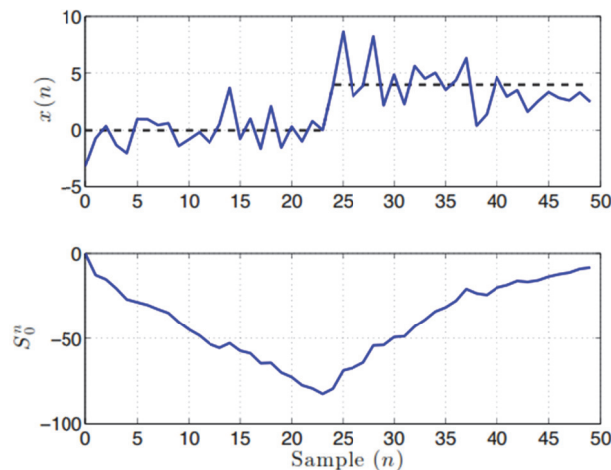


Рис. 1. Гауссовская последовательность с изменением в момент  $v = 25$  среднего значения с  $\mu_0 = 0$  на  $\mu_1 = 4$  при постоянной дисперсии  $\sigma^2 = 2,5$  (верхний график) и сумма  $S_0^n$  LLR (нижний график)

В этом случае функции плотности распределения вероятности равны

$$f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_{0,1})^2}{2\sigma^2}}, \quad (5)$$

откуда

$$LLR(n) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left( x(n) - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right), \quad (6)$$

$$S_0^n = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=0}^n \left( x(i) - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right). \quad (7)$$

Следует отметить, что это результаты для конкретного случая изменения среднего значения гауссовской величины. Однако (3) справедливо для любого изменения и, следовательно, для любых распределений  $f_0$  и  $f_1$ .

### III. Основные принципы метода скорейшего обнаружения

В этом разделе приводится обзор наиболее важных результатов теории скорейшего обнаружения. Сначала рассмотрим несколько версий алгоритма CUSUM, чтобы сориентироваться в проблеме скорейшего обнаружения. Эти версии можно найти в [20]. Затем проанализируем свойства алгоритма CUSUM, которые в основном выражены в теоремах 1 и 2 (см. [20] и [21]). Наконец, рассмотрим случай с неизвестными параметрами, предложим альтернативу алгоритму CUSUM и проанализируем характеристики его работы, описанные в теореме 3. Насколько известно авторам, доказательство теоремы 3 приводится здесь впервые.

#### А. Версии алгоритма CUSUM

##### Интуитивный подход

Как показано на рис. 1, типичное поведение суммы LLR – это отрицательный дрейф до изменения и положительный после изменения. При этом полезная информация содержится в разности между текущим значением суммы LLR и его минимальным значением. Правило принятия решения в любой момент времени состоит в сравнении этой разности с порогом  $h$ :

$$g(n) = S_0^n - m(n) \geq h, \quad (8)$$

где  $S_0^n$  описано в (4) и

$$m(n) = \min_{1 \leq j \leq n} S_0^j. \quad (9)$$

##### Подход Пейджа

Представим версию алгоритма CUSUM на основе повторяющегося применения последовательного критерия отношения вероятностей (sequential probability ratio test – SPRT). Подробные сведения о SPRT можно найти в [23]. Идея Пейджа [17] заключалась в проверке двух простых гипотез для последовательных значений  $n$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: f(\mathbf{x}(n)) &= f_0(\mathbf{x}(n)), \\ \mathcal{H}_1: f(\mathbf{x}(n)) &= f_1(\mathbf{x}(n)) \end{aligned} \quad (10)$$

с помощью SPRT, где  $\mathbf{x}(n)$  – вектор, содержащий  $x(0), x(1), \dots, x(n)$ ;  $f_0(\mathbf{x}(n)), f_1(\mathbf{x}(n))$  – многомерные версии  $f_0(x(n)), f_1(x(n))$  из (1). SPRT определяется парой параметров  $(d, T)$ , где  $d$  – параметр принятия окончательного решения, который может быть равным 0 или 1, указывая на выбор гипотезы  $\mathcal{H}_0$  или  $\mathcal{H}_1$ , а  $T$  – время остановки взятия отсчетов, когда принимается окончательное решение. Формально  $d, T$  определяются как

$$d = \begin{cases} 0, & \text{при } S_0^T \leq -\epsilon \\ 1, & \text{при } S_0^T \geq h \end{cases}, \quad (11)$$

$$T = T_{-\epsilon, h} = \min \left\{ n : \left( S_0^n \geq h \right) \cup \left( S_0^n \leq -\epsilon \right) \right\}. \quad (12)$$

Пороги  $\epsilon \geq 0$  и  $h \geq 0$  выбираются в соответствии с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода –  $\alpha, \gamma$ . Основная идея Пейджа заключалась в перезапуске алгоритма SPRT при каждом принятии решения  $d = 0$ . Более того, первый раз, когда  $d = 1$ , алгоритм SPRT останавливается, сигнализируя об обнаружении изменения. Пейдж предположил, что оптимальное значение нижнего порога  $\epsilon$  должно быть нулевым. Таким образом, повторяя SPRT для этого порога, результирующее правило принятия решения можно записать как

$$g(n) = \begin{cases} gLLR(n), & \text{при } gLLR(n) > 0 \\ 0, & \text{при } gLLR(n) \leq 0 \end{cases}, \quad (13)$$

где  $gLLR(n) = g(n-1) + LLR(n)$  и  $g(0) = 0$  или, в более компактном виде,

$$g(n) = (g(n-1) + LLR(n))^+, \quad (14)$$

где  $(x)^+ = \max(0, x)$ . Следовательно, время остановки определяется по известному выражению для алгоритма CUSUM:

$$t_\alpha \doteq \min \{ n : g(n) \geq h \}. \quad (15)$$

#### Подход Лордена

Наконец, поясним идею Лордена [18], которая может быть полезна при анализе обнаружения изменений. Отметим, что (8) можно переписать как

$$g(n) = \max_{1 \leq j \leq n} S_j^n, \quad (16)$$

где  $S_j^n \doteq \sum_{i=j}^n LLR(i)$ . С учетом этого результата время остановки CUSUM  $t_\alpha$  можно интерпретировать как набор параллельных так называемых «неограниченных» алгоритмов SPRT, которые активируются при каждом возможном моменте изменения  $j = 1, \dots, n$  с верхним порогом  $h$  и нижним порогом  $-\epsilon = -\infty$ . Каждый из этих алгоритмов останавливается в момент времени  $n$ , если для какого-то  $j \leq n$  наблюдения  $x_j, \dots, x_n$  являются значимыми для обнаружения изменения. Это можно формализовать следующим образом. Пусть  $T_j$  – время остановки для SPRT, активированного в момент  $j$ :

$$T_j = \min \{ n \geq j : S_j^n \geq h \}, \quad (17)$$

при этом что  $T_j = \infty$ , когда этот минимум невозможно достигнуть. Теперь определим следующее время остановки как минимум от  $T_j$ :

$$T^* \doteq \min_{j=1,2,\dots} \{ T_j \}. \quad (18)$$

Сравнивая (15) и (18) и используя определение  $g(n)$  в (16), мы видим, что  $t_\alpha = T^*$ .

## В. Свойства алгоритма CUSUM

В этом разделе описываются некоторые критерии качества работы алгоритма CUSUM, которыми можно руководствоваться, чтобы задать порог обнаружения  $h$ . Например, удобно использовать среднюю задержку обнаружения ( $\bar{T} = E_1[t_\alpha]$ ) и среднюю наработку между ложными тревогами ( $\bar{T} = E_0[t_\alpha]$ ). В принципе было бы интересно найти специальную функцию, которая содержала бы все данные, относящиеся к обоим значениям. Эта функция – средняя длина серии (average run length – ARL), определяемая как

$$L_\theta(T) \doteq E_\theta[T], \quad (19)$$

где  $\theta = \theta_0$  при  $\mathcal{H}_0$  и  $\theta = \theta_1$  при  $\mathcal{H}_1$ ,  $T$  – время остановки. Таким образом, функция ARL определяет при  $\theta_0$  среднее время между ложными тревогами, а при  $\theta_1$  – среднюю задержку обнаружения.

Теперь определим две важные концепции, полезные для анализа статистических свойств SPRT и для расчета функции ARL алгоритма CUSUM. Такой расчет ARL описан в [20] и [21] и представлен в теореме 1.

**Определение 1 (ASN).** Средний объем выборки (average sample number – ASN) SPRT – это среднее количество реализаций  $E_0[T_{-\epsilon, h}]$ , необходимых для проверки гипотез при приемлемых условиях (т.е.  $\alpha$  и  $\gamma$ ).

**Определение 2 (OC).** Вероятность  $P_\theta(T_{-\epsilon, h})$  принятия гипотезы  $H_0$  (т.е. SPRT достигает нижнего порога  $-\epsilon$ ) называется рабочей характеристикой (operating characteristic – OC).

**Теорема 1.** Если  $E_\theta[T_{0, h}]$  и  $P_\theta(T_{0, h})$  – ASN и OC SPRT соответственно с порогами  $-\epsilon = 0$  и  $h$ , ARL алгоритма CUSUM  $L_\theta(t_\alpha)$  представляет собой

$$L_\theta(t_\alpha) = E_\theta[t_\alpha] = \frac{E_\theta[T_{0, h}]}{1 - P_\theta(T_{0, h})}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Учитывая, что алгоритм CUSUM может быть выведен из SPRT, возможно связать функцию ARL алгоритма CUSUM со статистическими свойствами SPRT с нижним  $\epsilon = 0$  и верхним  $h$  порогами. Действительно

$$L_\theta(t_\alpha) = E_\theta[t_\alpha] = E_\theta\left[T_{-\epsilon, h} \mid S_0^{T_{-\epsilon, h}} \leq -\epsilon\right] \cdot E_\theta[c-1] + E_\theta\left[T_{-\epsilon, h} \mid S_0^{T_{-\epsilon, h}} \geq h\right] \cdot 1, \quad (21)$$

где  $E_\theta[T_{-\epsilon, h} \mid S_0^{T_{-\epsilon, h}} \leq -\epsilon]$  – условный ASN одного цикла SPRT, когда накопленная сумма достигает нижнего порога  $-\epsilon$ , а  $E_\theta[T_{-\epsilon, h} \mid S_0^{T_{-\epsilon, h}} \geq h]$  – условный ASN одного цикла SPRT, когда накопленная сумма достигает верхнего порога  $h$ , и затем принимается окончательное решение.

В (21)  $E_\theta[c-1]$  – среднее количество циклов до цикла принятия окончательного решения (т.е. до того, пока накопленная сумма не достигнет верхнего порога  $h$ ). Случайная переменная  $y = c-1$  может быть представлена как геометрическая случайная переменная с распределением  $f(y) = (1-p)p^y$  при  $y = 0, 1, 2, \dots$ , где  $p = P_\theta(T_{-\epsilon, h})$  – это OC. Таким образом,

$$E_\theta[c-1] = \frac{p}{1-p}, \quad (22)$$

и из (21) следует, что

$$L_0(t_\alpha) = \frac{E_0 \left[ T_{-\epsilon, h} \mid S_0^{T_{-\epsilon, h}} \leq -\epsilon \right] p}{1-p} + \frac{E_0 \left[ T_{-\epsilon, h} \mid S_0^{T_{-\epsilon, h}} \geq h \right] (1-p)}{1-p}. \quad (23)$$

Теперь, учитывая, что  $p$  представляет собой ОС времени остановки  $T_{-\epsilon, h}$ , мы имеем, что сложение двух числителей в (23) равно  $E_0 [T_{\epsilon, h}]$ . Учитывая это и используя значение нижнего порога для алгоритма CUSUM (т.е.  $\epsilon = 0$ ), приходим к (20).

ASN и ОС являются решениями интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое решается численно. Чтобы избежать сложностей численного решения и упростить алгоритм CUSUM, можно использовать аппроксимации [20]. Обычно использование границ функции ARL предпочтительнее, чем аппроксимации. Это объясняется тем, что на практике важно зафиксировать условно выбранный уровень работы алгоритма обнаружения изменений (заданный фиксированным порогом  $h$ ) и затем быть уверенным в том, что этот уровень всегда будет достигнут в определенных пределах. Это особенно важно для контроля целостности в реальном времени, когда рабочие условия со временем меняются, а также постоянно ведется расчет порога  $h$ . По этой причине обязательно использование границ, чтобы обеспечить постоянное сохранение желаемых ограничений.

**Теорема 2.** Если  $K(f_1, f_0) = E_1[LLR(n)]$  – расстояние Кульбака-Лейблера между плотностями вероятностей  $f_1$  и  $f_0$ , для среднего времени между ложными тревогами и среднего времени задержки в обнаружении изменений при использовании алгоритма CUSUM справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \bar{T} &\geq e^h, \\ \bar{T} &\leq \frac{h}{K(f_1, f_0)}. \end{aligned} \quad (24)$$

**Доказательство.** Нижнюю границу для  $\bar{T}$  можно получить из неравенств Вальда [23]:

$$h \leq \ln\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\right) \text{ и } -\epsilon \geq \ln\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right). \quad (25)$$

Для алгоритма CUSUM нижний порог равен нулю (т.е.  $\epsilon = 0$ ). Что касается вероятности пропуска обнаружения – ошибки 2-го рода, то алгоритм CUSUM всегда обнаружит наличие изменения, сколько бы времени это ни заняло. Таким образом, вероятность того, что алгоритм CUSUM не обнаружит наличие изменения, равна нулю (т.е.  $\gamma = 0$ ), и из (25)  $h \leq -\ln(\alpha)$ . С учетом этого, а также того, что среднее время между ложными тревогами – ошибками 1-го рода, можно определить как величину, обратную частоте ложных тревог (т.е.  $\bar{T} = 1/\alpha$ ), нижняя граница для  $\bar{T}$  принимает вид правой части первого неравенства из (24).

С другой стороны, можно получить верхнюю границу средней задержки обнаружения по результатам аппроксимаций Вальда [23]:

$$\bar{T} = E_1[t_\alpha] \approx K(f_1, f_0)^{-1} \cdot ((1-\gamma) \cdot h - \gamma \cdot \epsilon). \quad (26)$$

Принимая во внимание предыдущие соображения и учитывая неравенства Вальда, приходим ко второму неравенству в (24).

Подобное доказательство теоремы 2 можно найти в [21]. Результаты в (24) дают асимптотическое (т.е. когда  $h$  стремится к бесконечности) соотношение

среднего времени между ложными тревогами и задержки обнаружения с фиксированным порогом. Доказано, что эти результаты оптимальны для задачи скорейшего обнаружения. Как уже было отмечено, Лорден [18] показал, что методика CUSUM асимптотически минимизирует задержку обнаружения, достигая границ в (24). Метод Лордена основан на увязывании алгоритма CUSUM с SPRT, подобным же образом мы поступим в данном разделе. Мустакидес, вместо того чтобы исследовать проблему оптимального обнаружения методом SPRT [19], сформулировал ее как задачу об оптимальной остановке и доказал, что правило CUSUM является оптимальным решением.

В некотором смысле результаты в (24) играют такую же роль в теории обнаружения изменений, как нижняя граница Крамера-Рао в теории оценивания или рабочая характеристика приемника в классическом обнаружении. Следует отметить, что оптимальные результаты получаются при настройке алгоритма CUSUM по реальным значениям распределений до и после изменения. При использовании алгоритма в ситуациях, когда реальные распределения отличаются от предполагаемых, такая оптимальность не гарантируется.

### С. Неизвестный логарифм отношения правдоподобия

В этом разделе обсуждается случай, когда LLR не полностью известно, т.е. когда параметры при  $\mathcal{H}_1$  неизвестны. Без нарушения общности считается, что параметры при  $\mathcal{H}_0$  известны. В данном случае существует два возможных решения [20]:

- Взвешенное отношение правдоподобия (Weighted Likelihood Ratio – WLR), когда к отношению правдоподобия добавляется весовой коэффициент относительно всех возможных значений параметров при  $\mathcal{H}_1$  (т.е.  $\theta_1$ ) в виде функции  $dF(\theta_1)$ , зависящей от вероятности реализации  $\theta_1$ :

$$\tilde{\Lambda}(n) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x(n))}{f_0(x(n))} dF(\theta_1). \quad (27)$$

- Обобщенное отношение правдоподобия (Generalized Likelihood Ratio – GLR), когда неизвестные параметры  $\theta_1$  заменяются их оценками по методу максимального правдоподобия:

$$\hat{\Lambda}(n) \doteq \frac{\sup_{\theta_1} f(x(n); \theta_1)}{f_0(x(n))}. \quad (28)$$

Иными словами, для известных  $\theta_1$  алгоритмы обнаружения изменений основаны на отношении правдоподобия  $\Lambda(n) \doteq f_1(x(n))/f_0(x(n))$ . Для неизвестных  $\theta_1$   $\Lambda(n)$  заменяется функцией  $\tilde{\Lambda}(n)$  или  $\hat{\Lambda}(n)$ . Тем не менее для WLR требуются данные о неизвестных параметрах. С другой стороны, в общем алгоритм CUSUM для GLR не может быть записан в рекурсивной форме, так как он зависит от результатов максимизации по неизвестному временному изменению (т.е. нам нужны все собранные реализации). Это требует значительных вычислительных затрат. Чтобы их избежать, мы предлагаем альтернативный алгоритм на основе CUSUM (так называемый смещенный CUSUM).

Итак, когда LLR не полностью известно, его можно заменить любой другой функцией  $\rho(n) \doteq q(x(n))$  наблюдений  $x(n)$  с отрицательным средним перед изменением и положительным средним после изменения (т.е.  $E_0[\rho(n)] < 0$  и

$E_1[\rho(n)] > 0$ ) в соответствии с ключевой идеей алгоритма CUSUM (см. (3)). По аналогии с (14), (15) для тестовой статистики и времени останова будем иметь выражения:

$$g_{offset}(n) \doteq (g_{offset}(n-1) + \rho(n))^+, \quad (29)$$

$$\tilde{t}_a \doteq \min\{n : g_{offset}(n) \geq h\}. \quad (30)$$

В этом случае оптимальность правила обнаружения более не гарантируется. Однако это все же очень приемлемый вариант при условии выбора подходящей функции  $\rho(n)$ .

**Теорема 3.** Если  $\omega_0 > 0$  – ненулевой корень уравнения  $E_0[e^{\omega_0 \rho(n)}] = 1$ , среднее время между ложными тревогами и средняя задержка обнаружения при использовании смещенного CUSUM удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} \bar{T} &\geq e^{\omega_0 h}, \\ \bar{T} &\leq \frac{h}{E_1[\rho(n)]}. \end{aligned} \quad (31)$$

*Доказательство.* Приведено в Приложении.

Доказательство теоремы 3 основано на результатах, опубликованных в [20], однако, насколько известно авторам, само оно впервые приводится здесь.

Обычно перед изменением  $\rho(n)$  среднее не отрицательно, тогда предложенная выше идея неприменима. В этом случае мы предлагаем модифицированный показатель:

$$\rho(n) \doteq \rho_b(n) - b. \quad (32)$$

При выборе нужного смещения  $b$  среднее от  $\rho(n)$  до изменения будет отрицательным, но изменит знак после изменения. В частности, выбор смещения  $b$  должен быть достаточно велик, чтобы обеспечить отрицательное среднее до изменения и определенную частоту ложных тревог. Но в то же время  $b$  должно быть достаточно малым, чтобы обеспечить положительное среднее после изменения. Пользуясь (31) и выражением для  $\rho(n)$  в (32), настроим частоту ложных тревог с помощью ненулевого корня  $\omega_0$  следующего уравнения:

$$E_0[e^{\omega(\rho_b(n)-b)}] = E_0[e^{\omega \rho_b(n)}] e^{-\omega b} = 1, \quad (33)$$

где  $E_0[e^{\omega \rho_b(n)}]$  – характеристическая функция  $\rho_b(n)$  при  $\mathcal{H}_0$ .

#### IV. Применение скорейшего обнаружения для контроля целостности

В этом разделе описано применение алгоритма CUSUM для контроля целостности сигналов ГНСС. При этом CUSUM используется для обнаружения интерференции и многолучевости – самых актуальных и частых проблем в работе ГНСС. Рассмотрим разные ситуации применения алгоритма CUSUM, чтобы опираться на них в дальнейших работах по контролю целостности сигналов ГНСС. Ниже показаны некоторые результаты, полученные с использованием реальных данных приемника ГНСС. Более подробный анализ с описанием реальных сигналов, подтверждающих модели и теоретические результаты, представленные в данном разделе, см. в [24] и

[25]. Следует также отметить, что мы предполагаем временную статистическую независимость входных параметров алгоритма CUSUM. Это справедливое предположение, так как входные параметры рассчитываются с использованием различных наборов данных, длина которых обычно гораздо больше, чем время когерентности возмущающего действия.

*А. Случай 1 (интерференция):  
полностью известный логарифм отношения правдоподобия*

В этом разделе представлены случаи, когда полностью известны оба распределения до и после изменения. Такая ситуация часто бывает при обнаружении интерференции в сигналах ГНСС. Обнаружение интерференции осуществляется на выходе front-end приемника ГНСС, так как там интерференция видна. При отсутствии интерференции в полученном сигнале преобладает шум, поскольку сигнал ГНСС остается ниже уровня шума, в то время как при воздействии интерференции в полученном сигнале она будет преобладать в силу своей высокой мощности.

Задача обнаружения в данной ситуации описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 : r(n) &= \omega(n), & n < v \\ \mathcal{H}_1 : r(n) &= i(n) + \omega(n), & n \geq v\end{aligned}\quad (34)$$

где  $r(n)$  – дискретная реализация на основной частоте в момент  $n$ ,  $i(n)$  – модель интерференции сигнала, воздействующей на приемник ГНСС, и  $\omega(n)$  – тепловой шум, возмущающий полученные реализации, который можно смоделировать как белый шум с неизменяющимся центрированным гауссовским распределением. Далее мы предлагаем метод обнаружения интерференции на основе статистического анализа полученных данных, т.е. факта, что при отсутствии интерференции реализации на выходе приемника должны иметь гауссовское распределение.

Эксцесс – это мера гауссовости данных. Он равен 3 при гауссовском распределении данных ( $\mathcal{H}_0$ ), в противном случае принимает значение отличное от 3 ( $\mathcal{H}_1$ ). Определим оценку эксцесса как

$$\hat{R}(m) \doteq \frac{\hat{\zeta}_4^{(m)}}{\hat{\zeta}_2^{(m)^2}}, \quad (35)$$

где  $\hat{\zeta}_i^{(m)}$  – оценки  $i$ -го центрального момента  $r(n)$  по  $m$ -й реализации процесса, состоящей из  $N$  значений.

В [26] утверждается, что при больших  $N$  ( $N \gg 1000$ ) оценка эксцесса гауссовской переменной также подчиняется гауссовскому распределению со средним и дисперсией:

$$\begin{aligned}E_0[\hat{R}(m)] &= \mu_0^{(k)} = 3 \cdot \frac{N-1}{N+1}, \\ \text{var}_0[\hat{R}(m)] &= \sigma_0^{2(k)} = \frac{24}{N}.\end{aligned}\quad (36)$$

Более того, в присутствии интерференции оценки эксцесса все равно остаются гауссовскими, но их среднее и дисперсия меняются. Из [27] имеем следующее выражение для среднего при наличии интерференции:

$$E_1[\hat{R}(m)] = \mu_1^{(k)} = \mu_0^{(k)} \cdot \frac{1 + 2\text{INR} + \frac{\text{INR}^2}{2\kappa}}{(1 + \text{INR})^2}, \quad (37)$$

где INR – отношение интерференция/шум,  $0 \leq \kappa \leq 1$  – рабочий цикл интерференции. Это справедливо для любого типа интерференции, как импульсной, так и непрерывной ( $\kappa = 1$ ), кроме широкополосных, при которых сохраняется гауссовость данных и значение эксцесса не меняется.

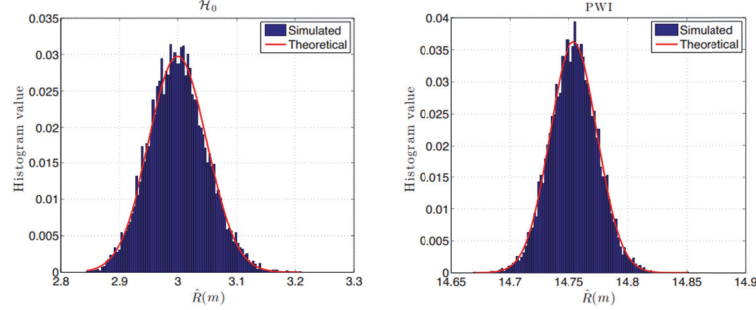


Рис. 2. Гистограммы значения эксцесса. Слева – при отсутствии интерференции (гипотеза  $\mathcal{H}_0$ ), справа – при ее наличии в виде импульсной волновой помехи (гипотеза  $\mathcal{H}_1$ )

Таким образом, можно сформулировать задачу обнаружения интерференции на основе использования эксцесса в рамках теории скорейшего обнаружения как задачу распознавания гипотез:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: \hat{R}(m) &\sim \mathcal{N}(\mu_0^{(k)}, \sigma_0^{2(k)}), m < v \\ \mathcal{H}_1: \hat{R}(m) &\sim \mathcal{N}(\mu_1^{(k)}, \sigma_1^{2(k)}), m \geq v. \end{aligned} \quad (38)$$

На рис. 2 представлены распределения эксцесса при номинальных условиях и в присутствии импульсной волновой помехи. Видно, что при  $\mathcal{H}_0$  (левый график) эксцесс имеет гауссовское распределение со средним, близким к 3. С другой стороны, при  $\mathcal{H}_1$  (правый график) распределение эксцесса остается гауссовским, хотя среднее отходит от базового значения, равного 3. Эти результаты были получены для  $10^5$  реализаций по  $N=10^4$  значений промоделированных методом Монте-Карло,  $\text{INR} = 20$  дБ,  $\kappa = 0,1$ . Значение отношения INR выбрано таким, чтобы показать значительное изменение среднего значения эксцесса.

Выражения (38) определяют статистическое поведение эксцесса с известными  $\mu_0^{(k)}$ ,  $\sigma_0^{2(k)}$  и  $\mu_1^{(k)}$ . Однако  $\sigma_1^{2(k)}$  обычно неизвестно, и невозможно полностью охарактеризовать распределение при  $\mathcal{H}_1$ . Тем не менее допустим, что дисперсии до и после изменения равны ( $\sigma_0^{2(k)} = \sigma_1^{2(k)}$ ), и используем алгоритм CUSUM для обнаружения изменения гауссовского среднего. При этом можно выразить LLR в виде:

$$\text{LLR}_k(m) = \frac{\mu_1^{(k)} - \mu_0^{(k)}}{\sigma_0^{2(k)}} \left( \hat{R}(m) - \frac{\mu_1^{(k)} + \mu_0^{(k)}}{2} \right), \quad (39)$$

где  $\mu_0^{(k)}$ ,  $\sigma_0^{2(k)}$  и  $\mu_1^{(k)}$  определены в (36), (37),  $\hat{R}(m)$  – оценка эксцесса по  $m$ -му набору данных из  $N$  значений.

Следует отметить, что  $\mu_1^{(k)}$  зависит от отношения INR и от рабочего цикла к интерференции. Поэтому следует установить определенное значение  $\mu_1^{(k)}$  в соответствии с минимальным ожидаемым отношением INR. Более того, значение  $\mu_1^{(k)}$  можно зафиксировать на таком уровне, чтобы изменение было минимальным. В таком случае предусматривается обнаружение минимального изменения, которое позволяет выявить любое более значительное изменение в эксцессе, обусловленное более мощной или длительной интерференцией. В алгоритме CUSUM можно использовать следующее правило принятия решения:

$$g^{(k)}(m) = \left( g^{(k)}(m-1) + LLR_k(m) \right)^+ \geq h_k, \quad (40)$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kurt} &\geq e^{h_k}, \\ \bar{T}_{kurt} &\leq \frac{h_k}{K_k(f_1, f_0)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $K_k(f_1, f_0) = (\mu_1^{(k)} - \mu_0^{(k)})^2 / (2\sigma_0^{2(k)})$ .

На рис. 3 представлены границы (41) в сравнении с результатами моделирования величин  $\bar{T}$ ,  $\bar{\tau}$ . Мы использовали  $10^5$  реализаций, промоделированных по методу Монте-Карло с  $N = 10^4$  значений в каждой. Дополнительно на случай задержки обнаружения мы зафиксировали отношение INR на уровне  $-10$  дБ. Данное низкое значение было выбрано для того, чтобы сделать результаты более наглядными, в противном случае задержка обнаружения будет составлять один отсчет. Левый график показывает, что количество отсчетов между ложными тревогами при моделировании выше нижней границы, это позволяет задать порог  $h_k$ , обеспечивающий желаемую частоту ложных тревог. Правый график показывает аналогичные значения для смоделированных и теоретических результатов по задержке в обнаружении интерференции.

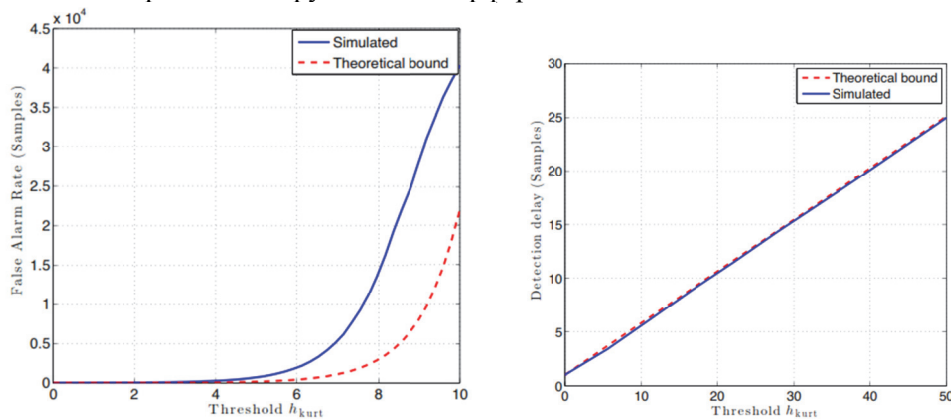


Рис. 3. Частота ложных тревог (слева) и задержка обнаружения импульсной волновой помехи с INR =  $-10$  дБ (справа) при использовании алгоритма CUSUM с оценкой эксцесса

*В. Случай 2 (интерференция):  
неизвестный логарифм отношения правдоподобия*

Рассмотрим теперь случай, когда распределение после изменения характеристик сигнала полностью неизвестно. С этой целью снова применим алгоритм CUSUM для обнаружения интерференции, но используем другой параметр в качестве меры гауссовости полученных реализаций сигнала.

Из (34) известно, что в случае отсутствия интерференции в принятом сигнале доминирует шум, следовательно, гистограмма полученных реализаций должна иметь гауссовскую форму. В то же время если интерференция присутствует, то именно она доминирует в полученном сигнале, и тогда гистограмма полученных реализаций не должна иметь гауссовскую форму. Такая задача обнаружения интерференции эквивалентна статистической проверке гипотез по критерию согласия. Мы же в первую очередь заинтересованы в том, чтобы определить, подчиняется ли полученный сигнал гауссовскому распределению. Для этого проведем проверку по критерию хи-квадрат, где используется тестовая статистика на основе гистограммы с известным распределением для  $\mathcal{H}_0$ .

При проверке по критерию хи-квадрат оценивается следующая тестовая статистика [26]:

$$x_{hist}(m) = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{\left(O_i^{(m)} - E_i\right)^2}{E_i}, \quad (42)$$

где  $O_i^{(m)}$  – значение  $i$ -го столбца гистограммы по данным эксперимента с  $N_b$  столбцами в  $m$ -й реализации, каждая из которых состоит из  $N$  значений;  $E_i$  – значение  $i$ -го столбца эталонной *теоретической* гистограммы, вычисленной для  $\mathcal{H}_0$  с  $N_b$  столбцами. Значения  $E_i$  определяются путем расчета теоретической функции плотности распределения для каждого столбца и преобразования ее в значение гистограммы (с учетом  $N$  значений в реализации).

В работе Пирсона (Pearson) [26] утверждается, что при больших значениях  $N$  распределение переменной  $x_{hist}(m)$  для  $\mathcal{H}_0$  приближается к хи-квадрат распределению с  $N_b - 1$  степенями свободы, в то время как при  $\mathcal{H}_1$  оно отличается от центрального хи-квадрат распределения. Таким образом, можно записать следующие гипотезы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : x_{hist}(m) &\sim \chi^2(N_b - 1), m < v \\ \mathcal{H}_1 : x_{hist}(m) &\neq \chi^2(N_b - 1), m \geq v \end{aligned} \quad (43)$$

Это обстоятельство отражено на рис. 4, где для  $\mathcal{H}_0$  (см. левый график) гистограмма промоделированных данных почти соответствует теоретическому распределению  $\chi^2$  с  $N_b - 1$  степенями свободы. На правом графике показана гистограмма при наличии промоделированной интерференции. Видно, что она отличается от распределения  $\chi^2$ , которое ожидается при  $\mathcal{H}_0$ . Результаты снова были получены при моделировании  $10^5$  реализаций по  $N = 10^4$  значений в каждой, количества столбцов  $N_b = 50$  и непрерывной интерференции ( $\kappa = 1$ ) с INR = 20 дБ для  $\mathcal{H}_1$ . Такое значение отношения INR выбрано, чтобы наглядно продемонстрировать изменение распределения.

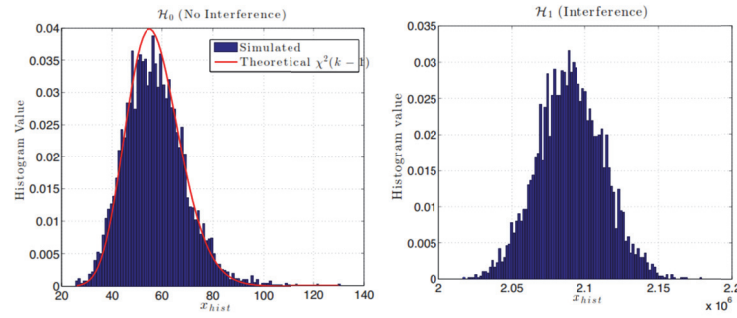


Рис. 4. Тестовая статистика при проверке гипотез по критерию хи-квадрат. Слева гистограмма и теоретическая плотность распределения для  $\mathcal{H}_0$ , справа – гистограмма для  $\mathcal{H}_1$ .

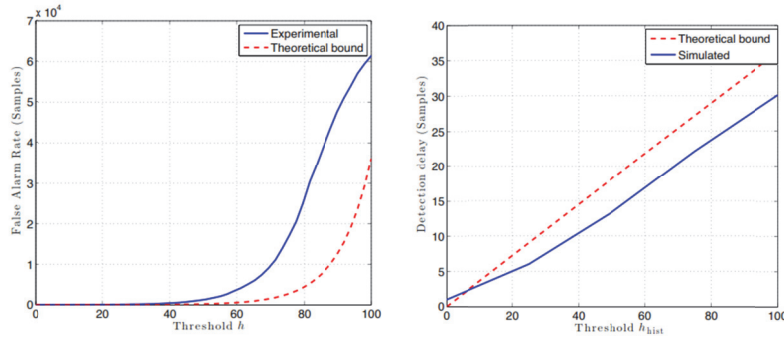


Рис. 5. Частота ложных тревог (слева) и задержка в обнаружении непрерывно действующей интерференции с INR=–20 дБ (справа) при использовании алгоритма смещенного CUSUM с критерием согласия при  $N_b = 50$  и  $b = 55$

До этого момента мы видели, что функция плотности распределения после появления интерференции отличается от той, что была до ее появления, но не располагаем знаниями о ней. Поэтому LLR нельзя полностью определить, а значит, невозможно напрямую применить алгоритм CUSUM к  $x_{hist}(m)$ . Однако, так как плотность распределения для  $\mathcal{H}_0$  известна, можно использовать смещенный алгоритм CUSUM (Раздел III-С). Для этого нужно ввести величину  $\rho$ , которая до изменения имеет отрицательное среднее значение, а после – положительное.

Известно, что среднее значение случайной переменной  $\chi^2$  равно количеству степеней свободы  $\chi^2$ . Значит,  $E_0 [x_{hist}(m)] = N_b - 1 > 0$ . Соответственно, мы не можем напрямую использовать  $x_{hist}(m)$  как функцию  $\rho$ , но можем определить следующую модифицированную функцию:

$$\rho_{hist}(m) \doteq x_{hist}(m) - b, \quad (44)$$

где  $b$  – смещение, для которого среднее  $\rho_{hist}(m)$  является отрицательным до изменения и положительным после изменения.

Более того, смещение  $b$  должно быть достаточно велико, чтобы обеспечить отрицательное среднее до изменения и определенную частоту ложных тревог и всегда гарантировать положительное среднее после появления интерференции. Из (33) с использованием  $\rho_{hist}(m)$  можно настроить частоту ложных тревог с помощью ненулевого корня  $\omega_0$  из теоремы 3, который оказывается ненулевым корнем уравнения:

$$e^{\omega b} = (1 - 2\omega)^{\frac{N_b - 1}{2}}, \quad (45)$$

решаемого численными методами. Выбор  $b$  будет определять значение  $\omega_0$  через (45). Пользуясь правилом принятия решений

$$g_{Offset}^{(hist)}(m) = \left( g_{Offset}^{(hist)}(m-1) + \rho_{hist}(m) \right)^+ \geq h_{hist}, \quad (46)$$

получим:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{hist} &\geq e^{\omega_0 h_{hist}}, \\ \bar{\tau}_{hist} &\leq \frac{h_{hist}}{E_1[\rho_{hist}(m)]}. \end{aligned} \quad (47)$$

Эти неравенства подтверждаются на рис. 5, где показаны результаты смещенного алгоритма CUSUM с применением  $\rho_{hist}(m)$ , а также их теоретические границы. Заданы следующие параметры: смещение  $b = 55$ , количество столбцов  $N_b = 50$ , – и для случая задержки обнаружения моделируется непрерывно действующая интерференция с INR = –20 дБ. Как и ранее, низкое значение выбрано, чтобы придать результатам большую наглядность. Левый график на рис. 5 показывает, насколько промоделированное количество отсчетов между ложными тревогами больше нижней границы, данной в (47), в зависимости от величины порога. На правом графике представлена полученная при моделировании задержка в обнаружении интерференции, единицами измерения которой также служат отсчеты, в паре с ее верхней границей из (47).

### С. Случай 3 (многолучевость):

*не полностью известный логарифм отношения правдоподобия*

Рассмотрим случай, когда известны распределения до и после изменения характеристик сигнала, но неизвестны некоторые их параметры. Так часто происходит при обнаружении многолучевости ГНСС. Задача обнаружения многолучевости ГНСС реализуется на этапах захвата и/или слежения за сигналом, так как именно тогда, после сужения полосы, виден эффект многолучевого распространения. Многолучевость влияет на параметры слежения, такие как расчетное отношение сигнал-шум  $C/N_0$ , выход кодового дискриминатора (контур слежения за задержкой – DLL) и форма корреляционной функции [28]. Таким образом, мы сможем обнаружить распространение сигнала вне прямой видимости и многолучевое распространение на основе флуктуаций этих параметров.

Далее мы применяем алгоритм CUSUM для расчета меры наклона асимметрии (slope asymmetry metric – SAM), которая описывает корреляционные функции, рассчитанные в контуре слежения любого ГНСС-приемника [28]. Известно, что при благоприятных условиях (для  $\mathcal{H}_0$ ) корреляционная функция симметрична, но в сложных условиях (для  $\mathcal{H}_1$ ) она перестает быть симметричной вследствие наличия многолучевых компонентов. Это можно определить с помощью SAM, которая для  $\mathcal{H}_0$  близка к нулю, указывая на симметричность, а для  $\mathcal{H}_1$  отходит от нуля, указывая на асимметричность. В частности, при наличии многолучевости мы имеем два разных эффекта:

- при распространении сигнала по линии прямой видимости среднее значение SAM отличается от 0;

- при распространении сигнала не по линии прямой видимости, дисперсия SAM флуктуирует.

Действительно, в обоих случаях среднее значение и дисперсия меняются, причем в первом случае доминирует изменение среднего (превалирует детерминированная составляющая прямолинейного распространения сигнала), а во втором – изменение дисперсии (превалируют случайные компоненты вследствие многолучевого распространения). Следовательно, это эквивалентно изменению и дисперсии и среднего SAM. Поскольку SAM рассчитывается путем оценки по методу наименьших квадратов крутизны с обеих сторон корреляционной функции, можно допустить, что SAM имеет гауссовское распределение. Это позволяет сформулировать задачу обнаружения многолучевости в рамках теории скорейшего обнаружения как задачу распознавания гипотез:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: x_S(k) &\sim \mathcal{N}\left(\mu_0^{(S)}, \sigma_0^{2(S)}\right), \quad k < \nu \\ \mathcal{H}_1: x_S(k) &\sim \mathcal{N}\left(\mu_1^{(S)}, \sigma_1^{2(S)}\right), \quad k \geq \nu. \end{aligned} \quad (48)$$

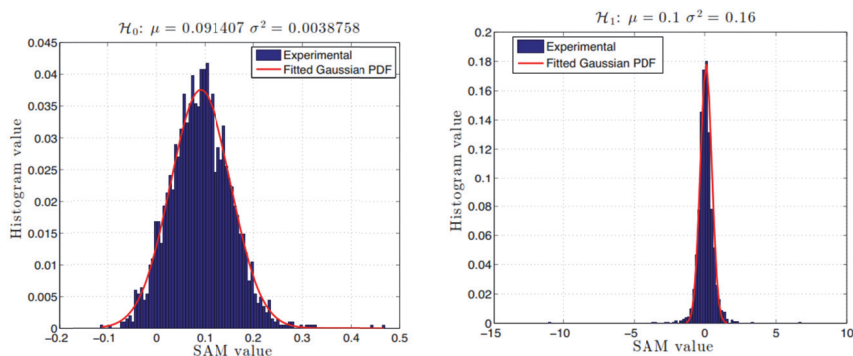


Рис. 6. Гистограммы значений SAM, построенные по реальным данным в центральной части Лондона при благоприятных (слева) и неблагоприятных (справа) условиях

На рис. 6 представлена гистограмма значений SAM для данных, собранных реальным приемником ГНСС в городских условиях в рамках проекта Integrity GNSS Receiver (iGNSSrx), реализованного при поддержке Еврокомиссии. Данные собирались в течение 80 с. в центре Лондона: первые 40 с. условия были благоприятные, затем становились сложными до конца рассматриваемого интервала. Чтобы различить благоприятные и сложные условия, производится анализ погрешности позиционирования (используя эталонные данные). В первом случае средняя погрешность позиционирования составляет 2 м, во втором – 50 м.

На левом графике рис. 6 представлена гистограмма при благоприятных условиях, где мы видим гауссовость SAM со средним значением около 0,1. Данное значение связано с асимметрией, вызванной front-end фильтром, и может быть откалибровано. На правом графике (сложные условия) видно, что гистограмма имеет практически гауссовское распределение. Это распределение имеет среднее значение, которое тоже близко к 0, но гораздо большую дисперсию, чем при  $\mathcal{H}_0$ . Указанное обстоятельство может быть вызвано распространением сигнала не по линии прямой видимости и преобладанием эффекта изменения дисперсии.

Понятно, что SAM соответствует гауссовскому распределению с известным средним значением до изменения характеристик сигнала (т.е. должен быть от-

калиброван), но априори неизвестной дисперсией до и после измерения. Чтобы использовать алгоритм CUSUM, мы предлагаем следующие рекомендации по заданию параметров гауссовского распределения:

- $\mu_0^{(s)}$  должно быть равно нулю, но в действительности оно немного выше за счет формы front-end фильтра, т.е.

$$\mu_0^{(s)} = \zeta \sim 0, \quad (49)$$

где  $\zeta = 0,1$ ;

- $\sigma_0^{2(s)}$  априори неизвестно, так как сложно узнать точное значение реальной дисперсии, даже зная выражение для дисперсии SAM. Это вызвано тем, что в конечном итоге значение будет зависеть от параметров многолучевости, которые будут случайными и неизвестными. Таким образом, мы предлагаем зафиксировать дисперсию при благоприятных условиях с учетом *максимальных* допустимых вариаций значений SAM для  $\mathcal{H}_0$ :

$$\sigma_0^{2(s)} \doteq \left( \frac{(\Delta_0)_{max}}{3} \right)^2, \quad (50)$$

где  $(\Delta_0)_{max}$  – максимальные допустимые изменения для  $\mathcal{H}_0$ . Это верно, поскольку мы знаем, что при гауссовском распределении 99,86% значений содержатся в интервале  $\mu \pm 3\sigma$ . Например, в нашем случае мы видим, что SAM для  $\mathcal{H}_0$  претерпевает изменения между  $-0,1-0,45$ . В итоге значение для

$(\Delta_0)_{max}$  может быть  $\pm 0,4$ , что дает  $\sigma_0^{2(s)} = 1,78 \cdot 10^{-2}$ ;

- $\mu_1^{\pm(s)}$  неизвестно, но может быть записано следующим образом:

$$\mu_1^{\pm(s)} = \mu_0^{(s)} \pm \delta, \quad (51)$$

где  $\delta$  – значение, выбранное экспериментальным путем;

- $\sigma_1^{2(s)}$  аналогично  $\sigma_0^{2(s)}$  зададим как *минимальную* детектируемую изменчивость SAM вследствие многолучевости:

$$\sigma_1^{2(s)} \doteq \left( \frac{(\Delta_1)_{min}}{3} \right)^2, \quad (52)$$

где  $(\Delta_1)_{min}$  – минимальная детектируемая изменчивость SAM для  $\mathcal{H}_1$ . Например, в нашем случае подойдет значение изменения  $\pm 0,6$ , что дает  $\sigma_1^{2(s)} = 4 \cdot 10^{-2}$ .

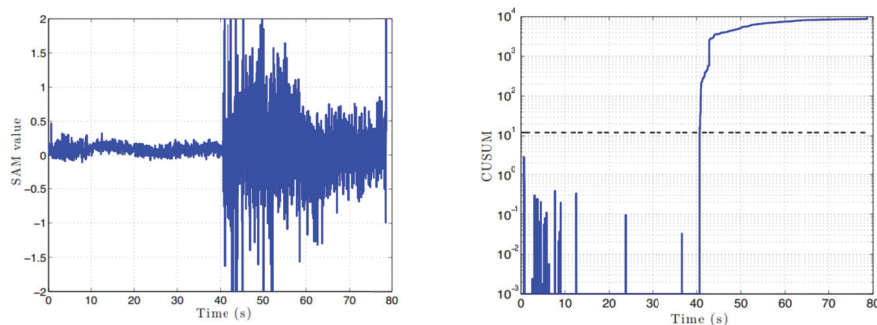


Рис. 7. Результаты обнаружения многолучевости на основе SAM в реальных данных. Показана динамика SAM (слева) и тестовая статистика алгоритма CUSUM (справа)

Поскольку SAM может отражать изменения как в среднем, так и в дисперсии, мы предлагаем использовать два различных алгоритма CUSUM: один – для выявления изменений в дисперсии (распространение сигнала не по линии прямой видимости), второй – для выявления изменений в среднем значении (распространение сигнала по линии прямой видимости). В первом алгоритме CUSUM выражение для LLR аналогично (39), но применительно к SAM. Во втором алгоритме LLR имеет вид:

$$LLR_S(k) = \ln \left( \frac{\sigma_0^{(S)}}{\sigma_1^{(S)}} \right) + \frac{\left( x_S(k) - \mu_0^{(S)} \right)^2}{2\sigma_0^{2(S)}} - \frac{\left( x_S(k) - \mu_1^{(S)} \right)^2}{2\sigma_1^{2(S)}}, \quad (53)$$

где  $\mu_0^{(S)}$ ,  $\sigma_0^{(S)}$ ,  $\sigma_1^{(S)}$  определены как в (49)–(52), а  $x_S(k)$  – расчетное значение SAM в  $k$ -й момент.

Таким образом, можно использовать следующее правило принятия решения и границы для задания порогов:

$$g^{(S)}(k) = \left( g^{(S)}(k-1) + LLR_S(k) \right)^+ \geq h_S, \quad (54)$$

$$\bar{T}_S \geq e^{h_S},$$

$$\bar{T}_S \leq \frac{h_S}{K_S(f_1, f_0)}, \quad (55)$$

$$\text{где } K_S(f_1, f_0) = \ln \left( \sigma_0^{(S)} / \sigma_1^{(S)} + \left( \sigma_1^{2(S)} / \sigma_0^{2(S)} \right) \right) - 0.5.$$

На рис. 7 представлены полученные значения SAM и тестовая статистика (49) алгоритма CUSUM для реальных данных, о которых говорилось выше. Видно, что SAM реагирует на изменение дисперсии именно тогда, когда появляется многолучевое распространение (на 40-й секунде). Изменение дисперсии достаточно сильное, и при появлении оно быстро обнаруживается, как показано на правом графике: значение  $g^{(S)}$  остается близким к 0, потом оно начинает увеличиваться с 40-й секунды и пересекает порог. Порог задан так, чтобы обеспечивать частоту ложных тревог соответствующей 1 часу. При частоте дискретизации 10 МГц и длительности реализации 20 мс. значение порога  $h_S = 12$  (черная пунктирная линия на рис. 7).

## V. Выводы

Представлен обзор методов скорейшего обнаружения изменений характеристик сигнала. Приведены практические примеры использования этих методов для обнаружения интерференции и многолучевости сигналов ГНСС для обеспечения их целостности. Рассмотрены два случая: когда логарифм отношения правдоподобия LLR полностью известен и когда он неизвестен. В первом случае применение алгоритма CUSUM оптимально, а во втором – не оптимальные, но приемлемые результаты могут быть получены с помощью алгоритма смещенного CUSUM. Применяя алгоритм CUSUM для обнаружения интерференции, мы можем работать как с полностью известным, так и с неизвестным LLR, используя стандартный и смещенный варианты алгоритма соответственно. Эти алгоритмы применяются к двум различным параметрам: эксцессу и критерию согласия хи-квадрат. Первый подходит для импульсной и непрерывной интерференции

(т.е. ограничен типом помехи), но использует оптимальный алгоритм. Алгоритм обнаружения по критерию согласия не ограничен типом интерференции, но не является оптимальным и может выступать в качестве дополнения в случаях, когда эксцесс малоинформативен. С другой стороны, алгоритм CUSUM позволяет решить проблему обнаружения многлучевости при полностью неизвестном LLR. В этом случае рассматриваются варианты прохождения сигнала по линии прямой видимости и вне ее. Предлагается использовать два разных алгоритма CUSUM для обнаружения изменений в среднем значении и дисперсии SAM. Результаты применения предложенных алгоритмов демонстрируют их пригодность для выявления интерференции и многлучевости. Кроме того, существует возможность их использования в практических приложениях, связанных с контролем целостности сигналов ГНСС в реальном времени. Эта возможность обусловлена применением в алгоритмах несложных расчетов и простыми выражениями для определения порога обнаружения изменений характеристик сигнала на основе среднего времени между ложными тревогами и среднего времени задержки в обнаружении.

### Приложение. Доказательство теоремы 3

Чтобы доказать неравенства (31), предположим, что  $J$  – время остановки одностороннего (по типу проверяемого неравенства) теста

$$J = \inf \{j : Z_j > h\} \quad (56)$$

для некоторых тестовых статистик  $\{Z_j\}$ , которые являются функцией наблюдений  $x(j)$  ( $Z_j = q(x(j))$ ), независимых друг от друга и имеющих одинаковое распределение. Для  $k = 1, 2, \dots$ , пусть  $J_k$  – время остановки того же теста, примененного к  $\{Z_j\}$  при  $j \geq k$ . Также введем в рассмотрение время остановки испытания:

$$N = \min_{k \geq 1} \{J_k + k - 1\} \quad (57)$$

Это время, когда останавливается первый из тестов, примененных к  $\{Z_j\} \forall j \geq k$  при  $k = 1, 2$ . Далее приведем следующую полезную лемму, доказательство которой можно найти в [18].

**ЛЕММА.** Пусть  $J$  таково, что  $\Pr\{J < \infty | \mathcal{H}_0\} \leq \alpha$ . Тогда

$$E[N | \mathcal{H}_0] \geq 1/\alpha \quad (58)$$

и для любого альтернативного распределения

$$E[N | \mathcal{H}_1] \leq E[J | \mathcal{H}_1]. \quad (59)$$

Чтобы использовать лемму, исследуем односторонний тест Вальда с переменной  $J$ :

$$J = \inf \{m : \tilde{S}_0^m > h\}, \quad (60)$$

где

$$\tilde{S}_0^m = \sum_{i=0}^m \rho(x(i)) \quad (61)$$

Вероятность остановки теста (т.е.  $\Pr\{J < \infty\}$ ) означает, что, возможно, превышена граница  $h$ . Для случая  $\rho(n) = \text{LLR}(n)$  такую вероятность можно рассчитать

методами теории последовательного обнаружения [23]. Однако эту вероятность невозможно точно рассчитать при произвольных скачках  $\rho(n)$ . В этом случае оценку можно выработать с помощью аппроксимаций Вальда и границ [20], [21], [23].

Итак, чтобы рассчитать вероятность и математические ожидания, требуемые в лемме для  $J$ , рассмотрим двусторонний тест Вальда с границами  $-\epsilon < 0 < h$  со временем остановки  $M$ :

$$M = \inf \left\{ m : \tilde{S}_0^m < -\epsilon \text{ или } \tilde{S}_0^m > h \right\}, \quad (62)$$

где  $\tilde{S}_0^m$  описано в (61). Обращаем внимание, что односторонний тест в (56) является предельным случаем двустороннего теста в (62), т.е.  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} M = J$ . Формально определим ОС двустороннего теста как

$$P_{\theta}(M) = Pr \left\{ \tilde{S}_0^m < -\epsilon \right\}. \quad (63)$$

Следующая граница ОС будет использована для  $\mathcal{H}_0$  [20], [23]:

$$P_{\theta_0}(M) \geq \frac{e^{\omega_0 h} - 1}{e^{\omega_0 h} - \eta e^{-\omega_0 \epsilon}}, \quad (64)$$

где  $\eta \leq 1$ ,  $\omega_0 > 0$  – корень уравнения  $E_0 \left[ e^{\omega \rho(n)} \right] = 1$ . Также используем следующую границу ASN для  $\mathcal{H}_1$  [20], [23]:

$$E_1[M] \leq \frac{-\epsilon P_{\theta_1}(M) + h \left[ 1 - P_{\theta_1}(M) \right]}{E_1[\rho(n)]}. \quad (65)$$

Отсюда вероятность того, что  $J$  не остановится при  $\mathcal{H}_0$ , равна пределу при  $\epsilon \rightarrow \infty$  вероятности остановки двустороннего теста (62) на нижнем пороге  $-\epsilon$ :

$$Pr \{ J = \infty | \mathcal{H}_0 \} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} P_{\theta_0}(M) \geq \frac{e^{\omega_0 h} - 1}{e^{\omega_0 h}} = 1 - e^{-\omega_0 h}. \quad (66)$$

Вследствие этого вероятность остановки  $J$  ограничена сверху:

$$Pr \{ J < \infty | \mathcal{H}_0 \} \leq e^{-\omega_0 h}. \quad (67)$$

Аналогичным образом для ASN одностороннего теста имеем:

$$E_1[J] = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} E_1[M] \leq \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{-\epsilon P_{\theta_1}(M) + h \left[ 1 - P_{\theta_1}(M) \right]}{E_1[\rho(n)]}. \quad (68)$$

Правая сторона неравенства – это убывающая функция  $P_{\theta_1}(M)$ , поэтому неравенство сохранится, если заменить ее нулем:

$$E_1[J] \leq \frac{h}{E_1[\rho(n)]}. \quad (69)$$

Теперь лемму можно применить для получения результатов алгоритма смещенного CUSUM с порогом  $h$  и с использованием  $\rho(n)$  вместо LLR(n). Следует отметить, что  $N$  эквивалентно времени остановки  $T^*$ , определенному в (18), тогда мы можем показать, что  $\tilde{t}_a = N$  при  $Z_j = \tilde{S}_0^j = \sum_{i=1}^j \rho(x(i))$ , так что среднее время между ложными тревогами и средняя задержка алгоритма смещенного CUSUM в (29) оказываются ограниченными следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= E_0[N] \geq e^{\omega_0 h}, \\ \bar{T} &= E_1[N] \leq \frac{h}{E_1[\rho(n)]}.\end{aligned}\quad (70)$$

*Работа выполнена при поддержке Правительства Испании по гранту  
TEC2014-53656-R и Еврокомиссии в рамках проекта iGNSSrx.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Seco-Granados G., López-Salcedo J.A., Jiménez-Baños D., and López-Risueño G.** Challenges in indoor global navigation satellite systems // *IEEE Signal Processing Magazine*. 2012. Vol. 29. No. 2, P. 108–131.
2. **Parkinson B.W., Spilker J.J.** Global Positioning System: Theory and Applications. Vol. 2. AIAA, 1996.
3. **Balaei A.T., Dempster A.G.** A statistical inference technique for GPS interference detection // *IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst.* 2009. Vol. 45. No. 4. P. 1499.
4. **Lee H.K. et al.** GPS multipath detection based on sequence of successive-time double-differences // *IEEE Signal Processing Letters*. 2004. Vol. 11. No. 3. P. 316–319.
5. **Broumandan A., Jafarnia-Jahromi A., Dehghanian V., Nielsen J., and Lachapelle G.** GNSS spoofing detection in handheld receivers based on signal spatial correlation // *IEEE PLANS*. 2012. P. 479–487.
6. **Magill D.** Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1965. Vol. 10. No. 4. P. 434–439.
7. **Blom H.** An efficient filter for abruptly changing systems // *The 23rd IEEE Conference on Decision and Control*. 1984. No. 23. P. 656–658.
8. **Кошаев Д.А.** Многоальтернативный метод обнаружения и оценки нарушений на основе расширенного фильтра Калмана // *Автоматика и Телемеханика*. 2010. №5. С. 70–83. (**Ko-shaev D.** Kalman filter-based multialternative method for fault detection and estimation // *Automation and Remote Control*. 2010. Vol. 71. No. 5. P. 790–802.)
9. **Broumandan A., Jafarnia-Jahromi A., Daneshmand S., and Lachapelle G.** Overview of spatial processing approaches for GNSS structural interference detection and mitigation // *Proceedings of the IEEE*. 2016. Vol. 104. No. 6. P. 1246–1257.
10. **Calmettes V., Pradeilles F., and Bousquet M.** Study and comparison of interference mitigation techniques for GPS receiver // *Proceedings of the 14th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2001)*. 2001. P. 957–968.
11. **Bhuiyan M.Z.H., Lohan E.S., and Renfors M.** Code tracking algorithms for mitigating multipath effects in fading channels for satellite-based positioning // *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. 2007. Vol. 2008. No. 1. P. 1–17.
12. **Braasch M.S.** Performance comparison of multipath mitigating receiver architectures // *IEEE Aerospace Conference*. 2001. Vol. 3. P. 1309–1315.
13. **Mubarak O.M., Dempster A.G.** Exclusion of multipathaffected satellites using early late phase // *Journal of Global Positioning Systems*. 2010. Vol. 9. No. 2. P. 145–155.
14. **Mertikas S.P.** Automatic and online detection of small but persistent shifts in GPS station coordinates by statistical process control // *GPS Solutions*. 2001. Vol. 5. No. 1. P. 39–50.
15. **Oskiper T., Poor H.V.** Quickest detection of a random signal in background noise using a sensor array // *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*. 2005. No. 1.
16. **Lifeng L., Yijia F., and Poor H.V.** Quickest detection in cognitive radio: A sequential change detection framework // *IEEE GLOBECOM*. 2008. P. 1–5.
17. **Page E.S.** Continuous inspection schemes // *Biometrika*. 1954. Vol. 41. P. 100–115.
18. **Lorden G.** Procedures for reacting to a change in distribution // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1971. Vol. 42. No. 6. P. 1897–1908.
19. **Moustakides G.V.** The Annals of Statistics // *The Annals of Statistics*. 1986. Vol. 14. No. 4. P. 1379–1387.
20. **Basseville M., Nikiforov I.V.** Detection of Abrupt Changes: Theory and Application. Prentice Hall, 1993.
21. **Poor H.V., Hadjiladis O.** Quickest Detection. Cambridge, 2009.
22. **Egea-Roca D., Seco-Granados G., and López-Salcedo J.A.** On the use of quickest detection theory for signal integrity monitoring in single-antenna GNSS receivers // *ICL-GNSS*. 2015. P. 1–6.
23. **Wald A.** Sequential tests of statistical hypotheses // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1945. Vol. 16. No. 2. P. 117–186.

24. **Egea-Roca D. et al.** Signal-level integrity and metrics based on the application of quickest detection theory to interference detection // Proc. 28th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+). 2015. P. 3136–3147.
25. **Egea-Roca D. et al.** Signal-level integrity and metrics based on the application of quickest detection theory to multipath detection // Proc. 28th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+). 2015. P. 2926–2938.
26. **D'Agostino R.B. and Stephens M.A.** Goodness-of-Fit Techniques. CRC Press, 1986.
27. **De Roo R.D., Misra S., and Ruf C.S.** Sensitivity of the kurtosis statistic as a detector of pulsed sinusoidal radiofrequency interference in a microwave radiometer receiver // IGARSS. 2007. Vol. 45. No. 7. P. 2706–2709.
28. **Lopez-Salcedo J.A., Parro-Jimenez J. M., and Seco-Granados G.** Multipath detection metrics and attenuation analysis using a GPS snapshot receiver in harsh environments // IEEE EuCAP. 2009. P. 3692–3696.

---

**Egea-Roca D., Seco-Granados G., López-Salcedo J.A.** (Universitat Autònoma de Barcelona, Spain). Comprehensive Overview of Quickest Detection Theory and its Application to GNSS Threat Detection // *Giroskopiya i Navigatsiya*. 2016. Vol. 24. No. 4 (95). P. 76–97.

**Abstract.** Local threats such as radio frequency interference, multipath and spoofing have attracted the attention of many researchers in the past years thus leading to a myriad of contributions in the field of threat detection. Nevertheless, the current state of the art relies on classical detection techniques, which are not well suited for threat detection. In this paper, we take a leap forward by adopting the so-called quickest detection framework. This approach fits perfectly in critical applications where the aim is to detect the presence of local threats as soon as possible in order to improve the integrity of GNSS receivers.

**Key words:** Quickest detection, sequential detection, likelihood ratio, GNSS, integrity

Материал поступил 05.05.2016