

А. А. МАСЛОВ, Д. А. МАСЛОВ, И. В. МЕРКУРЬЕВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА С ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

Построена новая математическая модель гироскопа, описывающая электрические и механические колебания во взаимосвязанной форме при наличии напряжения на электродах. Волновая картина колебаний резонатора исследовалась с помощью асимптотического метода осреднения Крылова – Боголюбова. Показано, что нелинейность электрических процессов в контуре управления резонатора приводит к дополнительным погрешностям гироскопа. Приведен численный пример.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, осреднение Крылова – Боголюбова, цилиндрический резонатор.

Введение

Волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из наиболее перспективных датчиков инерциальной информации, применяемых в составе навигационных систем подвижных объектов [1,2]. Принцип действия ВТГ основан на инертных свойствах стоячих упругих волн, возбуждаемых в осесимметричных оболочках [3].

Наличие затухания колебаний приводит к необходимости их поддержания внешними силами. Рассматривается вынужденное позиционное возбуждение электрическими силами. На электроды управления кроме постоянного опорного напряжения подается еще и переменное. Такое возбуждение может использоваться для создания начальной стоячей волны в резонаторе и для работы гироскопа в режиме датчика угловой скорости. Позиционное возбуждение колебаний кольцевого резонатора ВТГ изучено в [3], а цилиндрического резонатора исследовано в [4]. При этом рассматривались линейные колебания. Математическая модель ВТГ, описывающая линейные электрические и механические колебания во взаимосвязанной форме при наличии напряжения на электродах, получена в [5].

В работах [6–8] показано, что явления срыва колебаний, «биение», нерегулярные и хаотические движения чувствительных элементов гироскопов, вызванные нелинейными эффектами различной природы, существенно уменьшают точность гироскопов. Для учета нелинейных свойств колебательной системы необходимо учитывать специфику конструкции гироскопа, системы управ-

Маслов Александр Анатольевич. Кандидат технических наук, доцент Московского энергетического института.

Маслов Дмитрий Александрович. Студент 6-го курса Московского энергетического института.

Меркурьев Игорь Владимирович. Доктор технических наук, заведующий кафедрой Московского энергетического института. Действительный член Международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

ления и измерения. Пренебрежение нелинейностью возможно лишь при малых амплитудах колебаний, при которых отношение сигнала к шуму не достаточно высокое. Для его повышения следует увеличивать амплитуду колебаний, однако при этом возрастают погрешности, вызванные нелинейностью.

Исследование режима вынужденных нелинейных колебаний, вызванных нелинейными упругими свойствами материала резонатора, проведено в [9].

В данной статье поставлена цель исследовать динамику цилиндрического резонатора с учетом нелинейности, обусловленной электрическими процессами в контуре управления гироскопа.

Уравнения вынужденных нелинейных колебаний резонатора

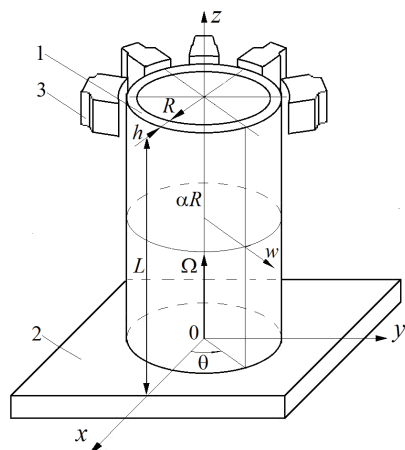


Рис. 1. Расчетная схема ВТГ

Рассмотрим тонкий упругий цилиндрический резонатор (рис. 1) радиуса R и длиной L , один край которого свободен, а другой жестко прикреплен к подвижному основанию. Колебания упругой цилиндрической оболочки 1 на основании 2 возбуждаются электродами управления 3 , которые с соответствующими участками проводящей поверхности резонатора образуют конденсаторы. Электроды съема информации расположены вблизи свободной кромки резонатора с внутренней стороны цилиндра.

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Oxyz$, ось z направим по оси симметрии резонатора. Предположим, что оболочка как це-

лое вращается вокруг своей оси симметрии z с угловой скоростью Ω , которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с характерной расчетной частотой колебаний резонатора ω .

В качестве криволинейных координат примем нормализованную (отнесенную к радиусу резонатора) длину образующей α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = L/R$) и угол в окружном направлении θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

При работе гироскопа используется вторая основная форма колебаний тонкой цилиндрической оболочки резонатора, консольно закрепленной на основании, радиальная составляющая которой согласно [9] может быть записана следующим образом:

$$w = -4\psi(\alpha)f_* \cos 2\theta + 4\psi(\alpha)g_* \sin 2\theta, \quad (1)$$

где $-4\psi(\alpha)f_*$ и $4\psi(\alpha)g_*$ — координаты основной формы, равные радиальному смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом в 45° ;

$$\psi(\alpha) = 1.067 \cos(1.312\alpha) - 1.067ch(2.355\alpha) - 1.795 \sin(1.312\alpha) + sh(2.356\alpha) -$$

функция второй основной формы колебаний; f_*, g_* — обобщенные координаты.

Электромеханическая модель управляемых колебаний резонатора ВТГ имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} m\ddot{f}_* + kf_* - F_1 &= 0, \\ m\ddot{g}_* + kg_* - F_2 &= 0, \\ q_i &= U_i C_i \quad (i = 1, \dots, 16), \end{aligned} \quad (2)$$

где m – приведенная масса цилиндрического резонатора, соответствующая основной форме колебаний; k – приведенная жесткость, соответствующая основной форме колебаний, $k = m\omega^2$, где ω – частота колебаний; F_1 и F_2 – силы, зависящие от напряжений U_i , приложенных к i -м электродам, расположенным под углом $\theta_i = \pi(i-1)/8$ к отсчетной оси; q_i – заряд на конденсаторе, образованном силовым электродом и резонатором; C_i – мгновенная емкость этого конденсатора, зависящая от нормального прогиба резонатора w_i :

$$C_i = \epsilon_0 S / (d - w_i) = C_0 / (1 - w_i / d), \quad (3)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь электрода; d – зазор между недеформированным резонатором и электродами.

Энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} \frac{q_i^2}{C_i}. \quad (4)$$

Подставляя (1) в (3) а затем (3) в (4) и дифференцируя энергию электрического поля (4) по переменным f_* и g_* , находим силы, действующие на резонатор:

$$F_1 = \frac{-4\psi(\alpha_1)}{2dC_0} \sum_{i=1}^{16} q_i^2 \cos 2\theta_i, \quad F_2 = \frac{4\psi(\alpha_1)}{2dC_0} \sum_{i=1}^{16} q_i^2 \sin 2\theta_i. \quad (5)$$

В режиме вынужденных колебаний с помощью электродов управления создается переменное во времени силовое поле, неизменно ориентированное относительно основания гироскопа.

Пусть центр i -го электрода расположен под углом $\theta_i = \pi(i-1)/8$ ($i = 1, 2, \dots, 16$). Для создания второй основной формы колебаний резонатора используем четыре управляющих электрода ($i = 1, 5, 9, 13$). Разность потенциалов U_i между резонатором и управляющими электродами зададим следующим образом:

$$U_1 = U_9 = U_0(1 + u \cos \omega_0 t), \quad U_5 = U_{13} = U_0(1 - u \cos \omega_0 t), \quad (6)$$

где U_0 – постоянное опорное напряжение; u – безразмерная амплитуда переменного напряжения; ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора. На остальных электродах разность потенциалов задается равной опорному напряжению U_0 .

Для определения сил F_1 и F_2 подставим в (5) значения зарядов q_i , полученных из формул (2), (3) и (6). В результате преобразований имеем:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\tilde{\epsilon} \left[2f + 3(f^2 + g^2)f + (3f^2 + 1)u \cos \omega_0 t + (f + 2f^3)u^2 \cos^2 \omega_0 t \right], \\ F_2 &= \tilde{\epsilon} \left[2g + 3(f^2 + g^2)g \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{\epsilon} = 16\psi(\alpha_1)U_0^2C_0/d$; $f = -4\psi(\alpha_1)f_*/d$ и $g = 4\psi(\alpha_1)g_*/d$ – безразмерные обобщенные координаты основной формы колебаний; в (7) слагаемые, содержащие степени f и g выше третьей, опущены. Будем считать достаточно малым значение амплитуды переменного напряжения $u \leq 0.1$, поэтому в дальнейшем будем пренебрегать в выражениях (7) слагаемым, содержащим u^2 .

Уравнения колебаний резонатора с учетом демпфирования, углового движения основания и выражения для нелинейных электрических сил (7) примут вид:

$$\begin{aligned}\ddot{f} + f &= -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \epsilon \left[2f + 3(f^2 + g^2)f + 3f^2u \cos \mu\tau + u \cos \mu\tau \right], \\ \ddot{g} + g &= -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \epsilon \left[2g + 3(f^2 + g^2)g \right],\end{aligned}\quad (8)$$

где $\epsilon = 64\psi^2(\alpha_1)U_0^2C_0/(m_2d^2\omega^2)$ – безразмерный коэффициент, характеризующий малость электрических сил, действующих на резонатор; v – безразмерная угловая скорость; γ – безразмерный коэффициент демпфирования колебаний. В уравнениях (8) и далее точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega t$. В случае мягкого резонансного возбуждения колебаний имеем $\mu = \omega_0/\omega = 1 + \Delta$, Δ – частотная настройка.

Динамика системы без учета демпфирования при наличии постоянного опорного напряжения на управляющих электродах

Уравнения свободных колебаний на подвижном основании без учета демпфирования ($\gamma = 0$) при подаче на управляющие электроды только опорного напряжения ($U_0 \neq 0, u = 0$) принимают вид

$$\ddot{f} + f = v\dot{g} + \epsilon \left[2f + 3(f^2 + g^2)f \right], \quad \ddot{g} + g = -v\dot{f} + \epsilon \left[2g + 3(f^2 + g^2)g \right]. \quad (9)$$

Из уравнений (9) следует, что опорное напряжение вызывает снижение частоты собственных колебаний. Эти выводы согласуются с результатом, полученным в [5].

Систему (9) будем исследовать методом осреднения Крылова – Боголюбова. Для этого приведем ее к стандартному виду посредством перехода от переменных $f, g, \dot{f}, \dot{g}$ к медленно изменяющимся переменным r, k, θ, χ , называемым в механике элементами орбиты [11]

$$\begin{aligned}f &= r \cos(\tau + \chi) \cos \theta - k \sin(\tau + \chi) \sin \theta, \\ g &= r \cos(\tau + \chi) \sin \theta + k \sin(\tau + \chi) \cos \theta, \\ \dot{f} &= -r \sin(\tau + \chi) \cos \theta - k \cos(\tau + \chi) \sin \theta, \\ \dot{g} &= -r \sin(\tau + \chi) \sin \theta + k \cos(\tau + \chi) \cos \theta.\end{aligned}$$

Отметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения Крылова – Боголюбова. Измеряемые с помощью емкостной

системы электродов высокочастотные функции времени f , g представляются в виде двух нормальных форм колебаний с амплитудами r и k . Ориентация волновой картины колебаний на плоскости f , g определяется углом прецессии θ , изменение фаз колебаний двух нормальных форм зависит от медленной переменной χ .

При равенстве амплитуд основной и квадратурной волны колебаний ($r = k$) угол прецессии не определен, поэтому этот режим в дальнейшем не рассматривается.

Уравнения движения в медленных переменных r, k, θ, χ в первом приближении метода осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0, \\ \dot{k} &= 0, \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{2}v + \frac{3\varepsilon}{4}kr, \\ \dot{\chi} &= -\frac{9\varepsilon}{8}(k^2 + r^2) - \varepsilon.\end{aligned}\tag{10}$$

Первые два уравнения системы (10) указывают на то, что амплитуда колебаний не изменяется. Угол прецессии θ при неподвижном ВТГ ($v = 0$) меняется, как это следует из третьей формулы (10), со скоростью, прямо пропорциональной емкости конденсатора C_0 , амплитудам колебаний r и k , квадрату величины опорного напряжения U_0^2 . Четвертое уравнение системы (10) указывает на незначительное изменение частоты колебаний.

Численный пример. Вычислим скорость прецессии волны $\dot{\theta}$, обусловленной нелинейностью колебаний в электрическом контуре гироскопа [9, 11], цилиндрический резонатор которого имеет следующие размеры: радиус $R = 2$ см, толщина $h = 1$ мм, высота $L = R$. Плотность материала резонатора $\rho = 2210$ кг/м³. Пусть опорное напряжение $U_0 = 100$ В, а емкость $C_0 = 5,31 \cdot 10^{-13}$ Ф (площадь пластины 12 мм², расстояние между пластинами $d = 0,2$ мм). Примем относительные амплитуды основной и квадратурной волны колебаний r и k равными 0,1 и 0,001 (20 мкм и 0,2 мкм) соответственно. Частоту колебаний будем считать равной $\omega = 20470$ с⁻¹ (3260 Гц).

Абсолютная величина скорости прецессии волны $\dot{\theta}$, рассчитанная по третьей формуле системы (10), при неподвижном основании ($v = 0$) равна 0,36 град/ч. Эта погрешность присуща всем без исключения гироскопам, реализующим идею маятника Фуко [10]. Для устранения погрешности, вызываемой нелинейностью, одну из амплитуд колебаний, например r , поддерживают постоянной, а другую – k стремятся уменьшить до нуля [10].

Отметим, что опорное напряжение без учета нелинейности колебаний зарядов электродов в электрическом контуре уменьшает частоту изгибных колебаний резонатора на ε или на $3,73 \cdot 10^{-3}$ Гц. Учет нелинейности колебаний приво-

дит к уточнению частоты свободных колебаний резонатора на $\frac{9\varepsilon}{8}(k^2 + r^2)$ или на $4,22 \cdot 10^{-5}$ Гц.

Режим вынужденных нелинейных колебаний резонатора

Для того чтобы в дальнейшем не учитывать слагаемые $2\varepsilon f$ и $2\varepsilon g$ в системе уравнений (8), указывающие на незначительное изменение частоты колебаний резонатора, изменим безразмерное время в $\sqrt{1-2\varepsilon}$ раз. В первом приближении по ε получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую колебания резонатора по основной моде

$$\begin{aligned}\ddot{f} + f &= -\gamma \dot{f} + \nu \dot{g} + \varepsilon[3(f^2 + g^2)f + 3f^2 u \cos \mu t + u \cos \mu t], \\ \ddot{g} + g &= -\gamma \dot{g} - \nu \dot{f} + \varepsilon[3(f^2 + g^2)g].\end{aligned}\quad (11)$$

Значение малых параметров ε , ν , γ и Δ составляет $10^{-7} - 10^{-4}$. Это обеспечивает высокую точность приближенных результатов, полученных в результате применения метода усреднения Крылова – Боголюбова.

Приведем систему уравнений (11) к стандартному виду посредством перехода от переменных $f, g, \dot{f}, \dot{g}$ к медленным переменным A, B, φ, ψ по формулам:

$$\begin{aligned}f &= A \sin(\mu t + \varphi), & \dot{f} &= \mu A \cos(\mu t + \varphi), \\ g &= B \sin(\mu t + \psi), & \dot{g} &= \mu B \cos(\mu t + \psi).\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения движения в медленных переменных A, B, φ, ψ в первом приближении метода осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \left[-4A\gamma + \left(3A^2 + 4 \right) \varepsilon u \cos \varphi + 2B \cos(\varphi - \psi) (2\nu - 3\varepsilon AB \sin(\varphi - \psi)) \right] / 8, \\ \dot{B} &= \left[-4B\gamma - 4A\nu \cos(\varphi - \psi) + 3\varepsilon A^2 B \sin 2(\varphi - \psi) \right] / 8, \\ \dot{\varphi} &= -(9\varepsilon A^3 + 6\varepsilon AB^2 + 8A\Delta + 3\varepsilon AB^2 \cos 2(\varphi - \psi) + \\ &+ (9A^2 + 4)\varepsilon u \sin \varphi + 4B\nu \sin(\varphi - \psi)) / (8A), \\ \dot{\psi} &= -(\varepsilon B(6A^2 + 9B^2 + 3A^2 \cos 2(\varphi - \psi)) - 8\Delta - 4A\nu \sin(\varphi - \psi)) / (8B).\end{aligned}\quad (13)$$

Исследуем стационарные колебания резонатора ВТГ на подвижном основании. Значения их амплитуд и фаз определяются как особые точки системы (13). Сначала рассмотрим случай, получаемый при отбрасывании членов, содержащих третью степень по A и B :

$$\begin{aligned}-A\gamma + \left(1 + 3A^2 / 4 \right) \varepsilon u \cos \varphi + \nu B \cos(\varphi - \psi) &= 0, & -B\gamma - A\nu \cos(\varphi - \psi) &= 0, \\ 2A\Delta + \left(1 + 9A^2 / 4 \right) \varepsilon u \sin \varphi + B\nu \sin(\varphi - \psi) &= 0, & 2B\Delta + A\nu \sin(\varphi - \psi) &= 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Учитывая, что тригонометрические функции входят в уравнения (14) линейно, представим уравнения (14) в виде:

$$\cos \varphi = \frac{(A^2 + B^2)\gamma}{A(1 + 3A^2/4)\epsilon u}, \quad \sin \varphi = \frac{2\Delta(B^2 - A^2)}{A(1 + 9A^2/4)\epsilon u},$$

$$\cos(\varphi - \psi) = -B\gamma/(A\nu), \quad \sin(\varphi - \psi) = -2B\Delta/(A\nu). \quad (15)$$

Пренебрегая в знаменателях дробей (15) слагаемыми, содержащими A^3 , и исключив из (15) тригонометрические функции, получим выражения для амплитуд колебания резонатора:

$$A = \epsilon u \sqrt{(\gamma^2 + 4\Delta^2)} / W, \quad B = \epsilon u \nu / W,$$

$$W = \sqrt{\gamma^4 + (-4\Delta^2 + \nu^2)^2 + 2\gamma^2(4\Delta^2 + \nu^2)}. \quad (16)$$

Фазы стационарных колебаний определяются из уравнений (15) по известным значениям амплитуд колебаний (16).

В случае неподвижного основания ($\nu = 0$) и нулевой частоты настройки ($\Delta = 0$) выражение для амплитуд колебаний резонатора имеет вид

$$A_0 = \epsilon u / \gamma, \quad B_0 = 0.$$

Амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде электрического напряжения (при $u \ll 1$ и $U_0 = \text{const}$) и обратно пропорциональна коэффициенту демпфирования.

На подвижном основании отношение амплитуд колебаний пропорционально угловой скорости основания, т. е. гироскоп является датчиком угловой скорости

$$\nu = B \sqrt{\gamma^2 + 4\Delta^2} / A. \quad (17)$$

Выражение (17) совпадает с формулой, полученной в работе [9]. Одним из стационарных режимов колебаний является режим с нулевой амплитудой $B = 0$ (при этом значение фазы ψ не определено), а значения амплитуды A и фазы колебаний φ определяются из уравнений

$$-4A\gamma^* + (3A^2 + 4)u \cos \varphi = 0, \quad A(8\Delta^* + 9A^2) + (9A^2 + 4)u \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

Избавившись от тригонометрических функций в уравнениях (15), получим неявное выражение для резонансной кривой

$$\left(4A\gamma^* (9A^2 + 4)\right)^2 + \left(A(8\Delta^* + 9A^2)(3A^2 + 4)\right)^2 = \left(u(9A^2 + 4)(3A^2 + 4)\right)^2, \quad (19)$$

где $\Delta^* = \Delta / \epsilon$, $\gamma^* = \gamma / \epsilon$.

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) $A(\Delta^*)$, полученные в результате решения уравнения (19), представлены на рис. 2. По вертикальной оси откладывается относительная амплитуда колебаний A , равная отношению амплитуды колебаний к зазору d . По горизонтальной оси – безразмерная частотная настройка $\Delta^* = \Delta / \epsilon = (\omega_0 - \omega) / (\epsilon \omega)$, где $\epsilon = 1.12 \cdot 10^{-6}$ – расчетный пара-

метр. При изменении частотной настройки Δ^* на 1,0 круговая частота вынужденных колебаний ω_0 изменяется на $2,29 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. При амплитуде переменного напряжения $u = 0.02$ (2 В) на резонансной частоте равной $\omega = 20470 \text{ с}^{-1}$, т.е. при $\Delta^* = 0$ нормализованная амплитуда колебаний A составляет 0,08 (16 мкм). АЧХ в малой окрестности резонанса при линейных колебаниях симметрична относительно $\Delta^* = 0$. При амплитуде напряжения $u = 0,06$ (6 В) нарушается симметрия амплитудно-частотной характеристики.

На оси частотной настройки при $u = 0,1$ появляется зона между бифуркационными значениями Δ_1^* и Δ_2^* , внутри которой возможно существование трех значений амплитуд. Устойчивым колебаниям соответствуют наибольшие и наименьшие значения. Это означает, что при изменении частотной настройки в точках Δ_1^* и Δ_2^* происходит скачкообразное изменение амплитуды колебаний.

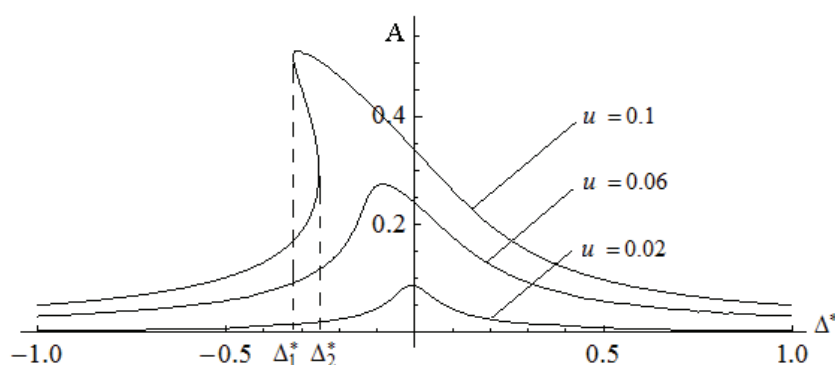


Рис. 2. Расчетная амплитудно-частотная характеристика $A(\Delta^*)$ на неподвижном основании при $\gamma/\varepsilon = 0.23$, $\nu = 0$ и различных напряжениях u

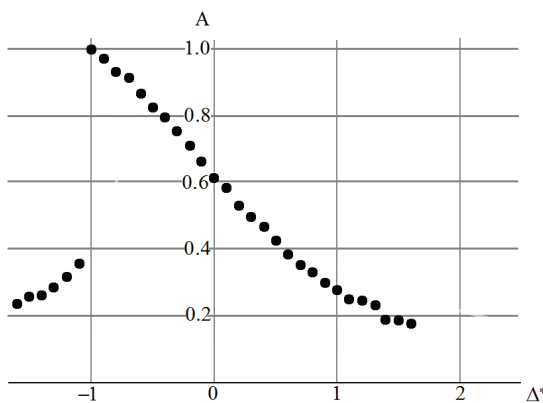


Рис. 3. Экспериментальная амплитудно-частотная характеристика колебаний кольцевого резонатора ВТГ

При расчетах АЧХ (рис. 2) использовалось высокое значение добротности $Q = 1/\gamma = 3.9 \cdot 10^6$, которое достигается способами, указанными в [12]. Срыв колебаний наблюдается при достаточно больших (по отношению к номинальному зазору между резонатором и электродами измерения и управления) колебаниях резонатора.

Следует отметить, что срыв колебаний имеет место и в кольцевом резонаторе. На рис. 3 пред-

ставлена экспериментальная АЧХ прототипа ВТГ с кольцевым резонатором, описание которого приведено в [9].

В режиме мягкого резонансного возбуждения колебаний резонатора были обнаружены явления срыва колебаний, присущие нелинейным системам. В ходе эксперимента задавались различные частоты внешнего воздействия и регистрировались первичные измерительные сигналы. По сигналам с датчиков съема информации определялась амплитуда колебаний резонатора.

По вертикальной оси откладывалась нормализованная амплитуда колебаний резонатора, равная отношению амплитуды колебаний резонатора к ее максимальному значению. По горизонтальной оси – безразмерная частотная настройка Δ^* . При уменьшении частотной настройки от 1,0 до -1,0 круговая частота вынужденных колебаний ω_0 изменяется от 73036 до 72974 с⁻¹. Точками отмечена амплитудно-частотная характеристика, полученная экспериментально. При снятии АЧХ с помощью генератора устанавливалась частота возбуждения ω_0 и вычислялась соответствующая ей настройка $\Delta^* = (\omega_0 - \omega) / (\epsilon_1 \omega)$, где $\omega = 73005$ с⁻¹. По сигналам с датчиков съема информации определялась амплитуда колебаний резонатора. Затем уменьшали незначительно частоту ω_0 . При новом значении частоты определяли значение соответствующей ей амплитуды.

При частотной настройке $\Delta^* = -1$ амплитуда достигает максимального значения. Затем при незначительном уменьшении частоты она скачкообразно снижалась почти в три раза. Следует отметить, что добротность прототипа гироскопа достаточно низкая из-за торсионов, поддерживающих кольцевой резонатор.

Сигналы, снимаемые с ВТГ при построении АЧХ, могут быть использованы для вычисления коэффициентов неравножесткости, разнотортности, демпфирования, ориентации главных осей упругой и вязкоупругой анизотропии, величины начального систематического ухода одновременно с коэффициентом нелинейности по методике, предложенной в [13, 14].

Данная методика позволяет проводить испытания при больших амплитудах колебаний, при которых отношение сигнала к шуму достаточно высокое. Учет коэффициента нелинейности при больших амплитудах колебаний существенно повышает точность определения параметров прибора. Отметим, что в режиме вынужденных колебаний измерение угловой скорости основания проводится по формуле (17), поэтому срыв колебаний приведет к существенной погрешности в измерениях гироскопа.

Заключение

Составлены уравнения динамики цилиндрического резонатора с учетом влияния нелинейных электрических процессов в цепях управления. С помощью асимптотического метода осреднения Крылова – Боголюбова получена амплитудно-частотная характеристика гироскопа.

Показано, что нелинейные эффекты приводят к срыву колебаний и дополнительным погрешностям гироскопа.

Показано также, что наличие опорного напряжения на электродах вызывает не только уменьшение частоты резонатора, но и уход гироскопа, который необходимо учитывать. Дрейф гироскопа зависит от опорного напряжения, емкости электродов и амплитуд колебаний.

Получена формула для определения ухода гироскопа и приведен численный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пешехонов, В.Г.** Гироскопы начала XXI века // Гироскопия и навигация. - 2003. - № 4, - С.5–18.
2. **Матвеев, В.А., Лунин, Б.С., Басараб, М.А.** Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. - М.: Физматлит, 2008. - 240 с.
3. **Журавлев, В.Ф., Климов, Д.М.** Волновой твердотельный гироскоп. - М.: Наука, 1985. - 125 с.
4. **Maslov, A. A., Maslov, D. A., Merkuryev, I. V.** Studying Stationary Oscillation Modes of the Gyro Resonator in the Presence of Positional and Parametric Excitations // Gyroscopy and Navigation. - 2014. - Vol. 5, №. 4. - PP. 224-228.
5. **Журавлев, В.Ф., Линч, Д.Д.** Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. - 1995. - №5. - С. 12–24.
6. **Sudipto, K. De., Aluru, N.R.** Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures / J. Microelectromech. Syst. - 2006. - Vol. 15. № 2. - PP. 355-369.
7. **Rhoads, J., Shaw, S., Tunner, K., Moehlis, J., DeMartini, B., Zhang, W.** Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators. // J. sound and Vib. - 2006. - Vol. 296. - P. 797-829.
8. **Chavarett, F.R., Balthaza, I.M., Guilherm, I.R., Nascimento, O.S.** A reducing of chaotic behavior to a periodic orbit, of a combdriver drive system (MEMS) using particle swarm optimization // Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications. Serra Negra. - 2010. - PP. 378-383.
9. **Меркурьев, И.В., Подалков В.В.** Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. - М.: Физматлит, 2009. - 228 с.
10. **Журавлев В.Ф.** Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. - 1997. - № 6. - С.27-35.
11. **Маслов, А.А., Маслов, Д.А., Меркурьев, И.В., Михайлов, Д.В.** Об уходе волнового твердотельного гироскопа при наличии опорного напряжения на управляющих электродах // Вестник МЭИ. – 2013. - № 2. - С. 11-14.
12. **Патент 2056038 (РФ).** Полусферический резонатор из кварцевого стекла волнового твердотельного гироскопа / Лунин Б.С., Павлов И.В., 1996.
13. **Патент 2544308 (РФ).** Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа / Маслов А.А., Меркурьев И.В., Маслов Д.А., 2015.
14. **Маслов, А.А., Маслов, Д.А., Меркурьев, И.В.** Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. - 2014. - № 5. - С. 18-23.

Abstract. A new mathematical model of a gyro is constructed. The model describes interrelated electrical and mechanical oscillations with the existence of electrode voltage. Wave pattern of the resonator oscillations was investigated using the asymptotic method of Krylov – Bogolyubov averaging. It is shown that nonlinearity of electric processes in the resonator control loop results in additional gyro errors. A numerical example is given.

Key words: hemispherical resonator gyro, Krylov–Bogolyubov averaging, cylindrical resonator

Материал поступил 10.11.14