

Г. М. ДОВГОБРОД

## ФОРМИРОВАНИЕ ГЛАДКОЙ ИСПОЛНИТЕЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

*Рассмотрено использование аппарата сплайнов для формирования в реальном масштабе времени гладких исполнительных траекторий, что позволяет уменьшить величину сигнала управления при переходе с одного элементарного участка траектории на другой и создать запас по управлению.*

**Ключевые слова:** сплайны, гладкая исполнительная траектория, подвижные роботы.

### Введение

Постоянно расширяющееся использование подвижных роботов (ПР) для решения исследовательских и практических задач в окружающей среде повышает требования к методам и технике управления их движением. В частности, управление движением ПР может быть усовершенствовано за счет планирования гладкой заданной (исполнительной) траектории в целях достижения высокоскоростного и точного перемещения. Для обеспечения команд управления движением, требующих только непрерывное ускорение, исполнительная траектория должна иметь геометрическую непрерывность порядка 3 (обозначается символом:  $G^3$ ) [1], т.е. траектория должна иметь в каждой точке касательный вектор, непрерывные кривизну и производную кривизны по длине кривой. Точное движение ПР по траектории, имеющей разрыв кривизны в некоторой точке, требует разрыва центростремительного ускорения ПР в этой точке. Однако мгновенное изменение ускорения требует воздействия бесконечно большой силы, что не может быть обеспечено физически. Следовательно, наличие разрыва в ускорении на практике может приводить к возникновению толковых управляющих воздействий на подвижный аппарат (например, на колесный робот). Использование гладких исполнительных траекторий совместно с допустимым или оптимальным планированием скорости перемещения ведет к повышению эффективности решения прикладных задач подвижными роботами. Таким образом, исполнительные траектории с гладкостью  $G^3$  являются идеальными с точки зрения обеспечения точной стабилизации движения робота на них.

Для ПР, выполняющих автономные и управляемые событиями миссии, возникает необходимость обеспечить перепланирование исполнительной траектории для выполнения изменяющихся задач управления движением. Результирующая составная исполнительная траектория должна оставаться того же порядка геометрической гладкости, чтобы не нарушался режим движения, обеспечивающий выполнение миссии с той же точностью стабилизации.

Практичным способом задания исполнительной траектории является её представление в форме последовательности отрезков, называемых путевыми

примитивами. В качестве путевых примитивов в [2] предлагалось использовать отрезки прямых, дуги окружностей, отрезки клотоиды (кривой, у которой кривизна изменяется линейно, как функция длины дуги), сплайны, полиномиальные кривые и т. п. Очевидно, что использование только отрезков прямых и дуг окружностей не обеспечивает гладкости исполнительной траектории выше  $G^0$ . Использование отрезков клотоид для построения исполнительных траекторий обеспечивает непрерывность кривизны исполнительной траектории, однако отсутствует алгебраическое выражение для вычисления положения точки на клотоиде [3]. Для построения траекторий возможно использование трехмерных сплайнов третьей и четвертой степеней [4], но при этом не обеспечивается непрерывность кривизны исполнительной траектории.

В работе [1] описывается использование в качестве путевых примитивов полиномиальных сплайнов 7-й степени, которые обозначаются символом  $\eta^3$ -сплайн. Это полином 7-й степени с векторными коэффициентами, имеющими размерность путевого примитива.  $\eta^3$ -сплайны свободны от недостатков указанных выше путевых примитивов, и из них могут быть составлены исполнительные траектории с гладкостью  $G^3$ .  $\eta^3$ -сплайн позволяет к двум произвольным точкам в декартовой системе координат с заданными в этих точках единичными векторами провести кривую, проходящую через эти точки с касанием единичных векторов, при этом будут обеспечены непрерывности кривизны и ее производной. Кроме этого,  $\eta^3$ -сплайн зависит от вектора  $\eta$  из 6 параметров, которые могут быть использованы для настройки формы отрезка траектории, задаваемого  $\eta^3$ -сплайном. Полиномиальные  $\eta^n$ -сплайны определены для всех неотрицательных целых чисел  $n$ . Количество настраиваемых параметров равно  $2n$ .  $\eta^0$ -сплайн – это прямой отрезок. Примеры изображений  $\eta^3$ -сплайнов показывают, что их форма может быть достаточно сложной и влияние параметров  $\eta$  на их форму исследовано мало [1]. Поэтому использование  $\eta^3$ -сплайнов в качестве путевых примитивов может потребовать привлечения значительных вычислительных ресурсов и занять недопустимо большое время при корректировке исполнительной траектории в реальном масштабе времени, например, при решении задачи расхождения с подвижным опасным объектом.

Движение ПР обеспечивает система автоматического управления, для которой задающим сигналом является отклонение ПР от исполнительной траектории. Отметим, что наличие разрыва ускорения в некоторых точках исполнительной траектории при геометрической гладкости менее  $G^3$  приведет к увеличению погрешности движения объекта по заданной исполнительной траектории. Тем не менее на практике такое увеличение погрешности часто может быть допустимым. Например, для управления движением надводных судов по маршруту используются исполнительные траектории с геометрической гладкостью менее  $G^3$ . Использование полиномов пониженной степени повышает устойчивость вычислительного процесса. Поэтому использование  $\eta^2$ -сплайнов с гладкостью  $G^2$  может быть целесообразно с практической точки зрения. Такие сплайны, построенные в мономиальном базисе, предлагалось использовать в работе [5]. Далее будем рассматривать именно  $\eta^2$ -сплайны.

В работе [6] предлагалось в качестве криволинейных путевых примитивов использовать  $\eta^2$ -сплайны в базисе полиномов Бернштейна с гладкостью  $G^2$ , обеспечивающие непрерывность траектории, существование касательного вектора в каждой точке траектории и непрерывность кривизны в виде

$$P_5(u) = A_0 B_0^5(u) + A_1 B_1^5(u) + A_2 B_2^5(u) + A_3 B_3^5(u) + A_4 B_4^5(u) + A_5 B_5^5(u), \quad (1)$$

где  $A_i$  – двумерные коэффициенты,  $i = 0, 1, \dots, 5$ ,  $B_i^5(u) = \frac{5!}{i!(5-i)!} \cdot u^i \cdot (1-u)^{5-i}$ , –

базисные полиномы Бернштейна 5-й степени,  $u \in [0, 1]$  – скалярный параметр.

Если заданы значения полинома  $P_5(u)$ , его первой и второй производных в граничных точках  $u=0$  и  $u=1$ , то коэффициенты  $A_i$  являются единственным решением системы 6 линейных уравнений при условии, что не все элементы столбца свободных членов равны нулю. Матрица системы уравнений при этом является треугольной [6]. Пусть  $r = \{r_0, r_1, r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}\}$  – кортеж векторных величин, где  $r_0 = R_5(0)$ ,  $r_1 = R_5(1)$ ,  $r_{10} = R_5'(0)$ ,  $r_{11} = R_5'(1)$ ,  $r_{20} = R_5''(0)$ ,  $r_{21} = R_5''(1)$ , тогда для векторных коэффициентов  $\eta^2$ -сплайна легко получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_0 &= r_0, A_1 = r_{10}/5, A_2 = r_{20}/20 + 2 \cdot r_{10}/5 + r_0, \\ A_3 &= r_{21}/20 + 2 \cdot r_{11}/5 + r_1, A_4 = r_{11}/5, A_5 = r_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Для обеспечения гладкости  $G^2$  в точках соединения путевых примитивов, являющихся одновременно и граничными точками  $\eta^2$ -сплайна, необходимо задавать кортеж граничных условий  $b = \{r_0, r_1, \alpha_0, \alpha_1, c_0, c_1\}$ , где  $r_0, r_1$  – координаты соответственно начальной и конечной точек  $\eta^2$ -сплайна,  $\alpha_0, \alpha_1$  – направления касательных векторов в его начальной и конечной точках,  $c_0, c_1$  – кривизна в начальной и конечной точках.

Для вычисления кортежа двумерных векторов  $r$  необходимо дополнительно к заданному кортежу  $b$  задавать вектор из четырех скалярных параметров  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$ , влияющих на форму  $\eta^2$ -сплайна, где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – длины касательных векторов в начальной и конечной точках  $\eta^2$ -сплайна соответственно. Принимаем, что  $\eta_3$  и  $\eta_4$  – первые координаты векторов  $r_{20}, r_{21}$ , которые однозначно определяют вторые координаты этих векторов при условии, что заданы  $\eta_1, \eta_2$  и  $c_0, c_1$  соответственно.

Заметим, что  $r_{20}, r_{21}$  – значения второй производной полинома  $R_5(u)$  с двумерными коэффициентами при  $u=0$  и  $u=1$ ).

Пусть  $r_{20} = \begin{pmatrix} \eta_3 \\ y_{20} \end{pmatrix}$ , тогда, используя известное выражение для кривизны плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями [7], и заданные параметры  $\{\alpha_0, c_0, \eta_i\}$ , получаем выражение

$$c_0 = \frac{\eta_1 \sin(\alpha_0) y_{20} - \eta_3 \eta_1 \cos(\alpha_0)}{\eta_1^3},$$

из которого находим  $y_{20}$  и выражение для вектора  $r_{20}$ . Выражение для вектора  $r_{21}$  находится аналогично. Окончательно получаем формулы для вычисления

$r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}$  с помощью элементов кортежа граничных условий и скалярных параметров  $\eta$ :

$$\begin{aligned} r_{10} &= \eta_1 \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0) \\ \cos(\alpha_0) \end{pmatrix}, & r_{11} &= \eta_2 \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_1) \end{pmatrix}, \\ r_{20} &= \begin{pmatrix} \eta_3 \\ (\eta_1^2 c_0 + \cos(\alpha_0) \eta_3) / \sin(\alpha_0) \end{pmatrix}, & r_{21} &= \begin{pmatrix} \eta_4 \\ (\eta_2^2 c_1 + \cos(\alpha_1) \eta_4) / \sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Примечание. В формулах (3) положительная величина угла  $\alpha$  отсчитывается от вертикальной оси по часовой стрелке. Используя (2) и (3), можно рассчитать коэффициенты  $\eta^2$ -сплайна.

Для настройки формы отрезка исполнительной траектории в [6] предлагалось решать задачу поиска четырех параметров  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$ , обеспечивающих минимум максимальной кривизны  $\eta^2$ -сплайна. Решение минимаксной задачи в реальном масштабе времени не представляется целесообразным. Поэтому в данной работе предлагается метод прямого построения путевых примитивов в форме симметричных относительно оси  $\eta^2$ -сплайнов без решения задачи поиска экстремума на этапе формирования исполнительной траектории. Дополнительно при построении путевых примитивов учитываются модель движения ПР и ограничение на величину сигнала управления. Поэтому в отличие от методики [8] исполнительную траекторию, построенную с помощью метода прямого построения путевых примитивов, не надо проверять на допустимость сигнала управления.

### $\eta^2 s$ -сплайны

Предлагается формировать исполнительную траекторию с гладкостью  $G^2$  как последовательность прямых отрезков и симметричных относительно оси  $\eta^2$ -сплайнов. Используемые в работе симметричные относительно оси  $\eta^2$ -сплайны будем обозначать символом  $\eta^2 s$ -сплайн. В исполнительной траектории прямые отрезки и  $\eta^2 s$ -сплайны могут присутствовать в любой последовательности.

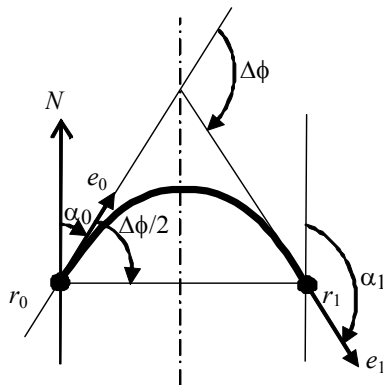


Рис. 1. Изображение  $\eta^2 s$ -сплайна

**Определение.**  $\eta^2 s$ -сплайны – это симметричные относительно оси двумерные  $\eta^2$ -сплайны (рис. 1), у которых кривизна в граничных точках  $r_0, r_1$  равна 0 ( $c_0 = 0, c_1 = 0$ );  $\alpha_0, \alpha_1$  – направления единичных касательных векторов  $e_0, e_1$  в граничных точках такие, что углы между единичными касательными векторами в граничных точках  $r_0, r_1$  и вектором  $r_1 - r_0$  равны по абсолютной величине, находятся в диапазоне  $[-90^\circ, 90^\circ]$  и имеют противоположные знаки.

Элементы вектора настраиваемых пара-

метров равны:  $\eta_1 = \eta_2 = d$ ,  $\eta_3 = \eta_4 = 0$ . Длина  $d$  касательных векторов в граничных точках должна быть такой, что обеспечивает минимум максимальной кривизны  $\eta^2$ -сплайна, при граничных условиях  $\{r_0, r_1, \alpha_0, \alpha_1, c_0=0, c_1=0\}$ .

Перемещение ПР по  $\eta^2$ -сплайну обеспечивает изменение направления вектора скорости на  $\Delta\phi$ .

Соотношение  $\eta_1 = \eta_2$  обеспечивает симметрию относительно оси  $\eta^2$ -сплайна. Соотношение  $\eta_3 = \eta_4 = 0$  обеспечивает простейший вариант вычисления векторов  $r_{20}$  и  $r_{21}$ .

Угловая скорость  $\omega$  касательного вектора, перемещающегося по кривой с продольной скоростью  $U$ , задается выражением

$$\omega = cU, \quad (4)$$

где  $c$  – кривизна траектории в текущей точке.

Из (4) следует, что при постоянной скорости  $U$  угловая скорость пропорциональна кривизне при точном движении ПР по  $\eta^2$ -сплайну. Форма графика кривизны  $\eta^2$ -сплайна (рис. 2) близка к форме трапеции, что характерно для изменения угловой скорости при выполнении элементарных маневров [4]. Поэтому применение  $\eta^2$ -сплайнов оправдано для выполнения маневров ПР.

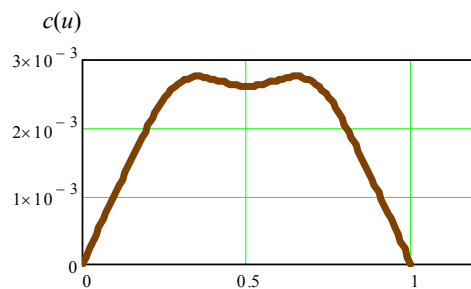


Рис. 2. График кривизны  $c(u)$   $\eta^2$ -сплайна

Из (3) и [5, 6] следует, что для граничных условий  $b_1 = \{r_0=0, Kr_1, \alpha_0, \alpha_1, c_0/K, c_1/K\}$  и настраиваемых параметров  $\eta' = K(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$  коэффициенты полинома  $\eta^2$ -сплайна увеличиваются в  $K$  раз по сравнению с коэффициентами, определяемыми граничными условиями  $b = \{r_0=0, r_1, \alpha_0, \alpha_1, c_0, c_1\}$  и настраиваемыми параметрами  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$ . Кривизна в каждой точке  $\eta^2$ -сплайна изменяется в  $1/K$  раз. Кривизна полиномиальной кривой инвариантна относительно поворота системы координат, т. е. для фиксированного  $\Delta\phi = \alpha_1 - \alpha_0$  все  $\eta^2$ -сплайны подобны. Коэффициент  $K$  можно называть коэффициентом подобия. Аналогичное свойство отмечено и для  $\eta^3$ -сплайнов в статье [1]. Для размещения  $\eta^2$ -сплайна в любом месте аффинного пространства  $R^2$  достаточно к координатам граничных точек  $\eta^2$ -сплайна с граничным условием  $r_0 = 0$  прибавить координаты желаемой граничной точки  $r_0$ .

Для  $\eta^2$ -сплайнов с граничными условиями  $\{(0, 0)^T, (l, 0)^T, 0, \Delta\phi, 0, 0\}$ , где  $l$  – расстояние между граничными точками, была решена численными методами серия задач поиска значений  $d$ , обеспечивающих минимум максимальной кривизны для последовательности значений  $\Delta\phi$  в диапазоне  $(0-180^\circ)$ . В результате была получена таблица зависимости  $l, d, c_m$  от  $\Delta\phi$ , где  $c_m$  – минимум макси-

мальной кривизны. Используя свойство подобия и интерполяцию, удалось получить функции  $l_{base}(\Delta\phi)$  и  $d_{base}(\Delta\phi)$ , вычисляющие соответственно оценки расстояния между граничными точками и оценку длины касательных векторов в этих точках для заданного  $\Delta\phi$  при условии, что  $c_m = 1$ .  $\eta^2s$ -сплайны с максимальной кривизной 1 будем называть базисными. Для базисных  $\eta^2s$ -сплайнов численными методами была получена функция  $f_{base}(\Delta\phi)$  для вычисления значения

выражения  $\sqrt{\left. \frac{dc_{base}}{du} \right|_{u=0} / d_{base}(\Delta\phi)}$ , где  $\left. \frac{dc_{base}}{du} \right|_{u=0}$  – производная кривизны базисного  $\eta^2s$ -сплайна в начальной точке. Функции  $l_{base}(\Delta\phi)$ ,  $d_{base}(\Delta\phi)$  и  $f_{base}(\Delta\phi)$  необходимы для формирования в реальном масштабе времени допустимого отрезка исполнительной траектории, обеспечивающего изменение направления вектора скорости ПР на угол  $\Delta\phi$ . На рис. 3, а, б, в приведены графики указанных функций.

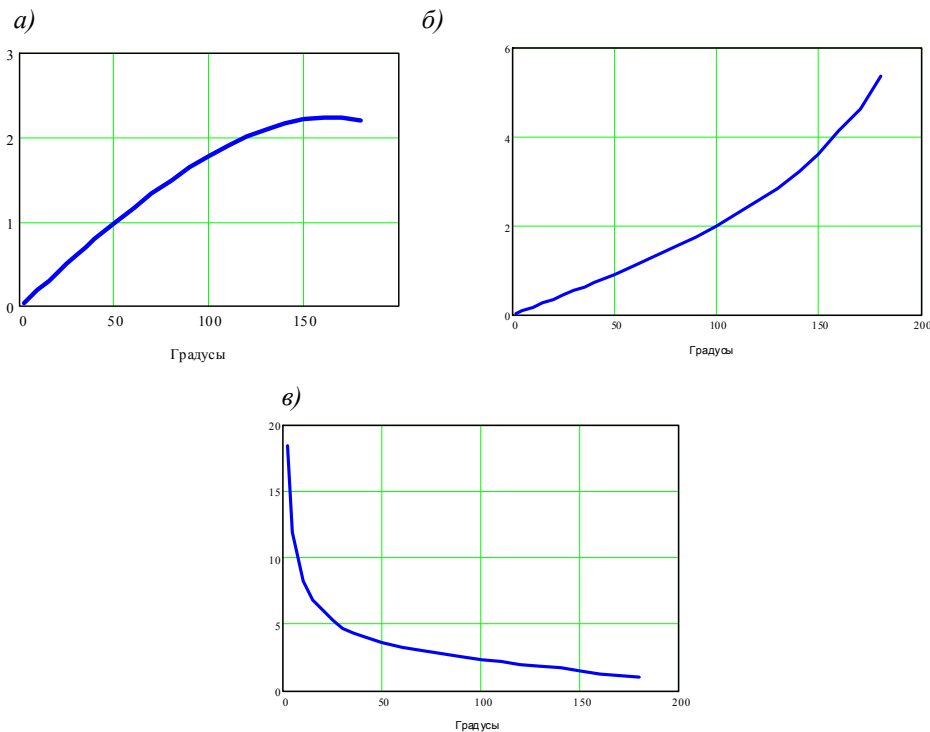


Рис. 3. Графики функций  $l_{base}(\Delta\phi)$ ,  $d_{base}(\Delta\phi)$  и  $f_{base}(\Delta\phi)$

### Формирование отрезка исполнительной траектории в форме $\eta^2s$ -сплайна

Пусть задано дифференциальное уравнение модели углового движения ПР

$$\dot{\omega} = F(\delta, \omega),$$

где  $\omega$  – угловая скорость поворота ПР в горизонтальной плоскости,  $\delta$  – сигнал управления. Предполагается, что функция  $F$  обладает следующим свойством:

при  $\omega = 0$  и максимальному значению сигнала управления  $\delta$  будет иметь место максимальное значение углового ускорения  $\frac{d\omega}{dt}$ .

Рассмотрим задачу на плоскости (см. рис. 1). Пусть ПР находится в точке  $r_0$ , направление вектора скорости равно  $\alpha_0$ , продольная скорость равна  $U$  и постоянна. Необходимо изменить направление вектора скорости ПР на угол  $\Delta\phi$ .

Допустимым будет  $\eta^2s$ -сплайн, для движения по которому абсолютное значение сигнала управления не превышает  $\delta_{\max}$ . Из графика  $c(u)$  (см. рис. 2), формулы (4) и свойства функции  $F$  следует, что максимальный сигнал управления может быть или в точках, в которых  $\frac{d\omega}{dt} = 0$  и  $\omega$  близко к  $\omega_{\max}$ , или в граничных точках с максимальным значением  $\frac{d\omega}{dt}$ .

Найдем коэффициент подобия  $K_1$  для  $\eta^2s$ -сплайна, движение ПР по которому происходит с  $\omega_{\max}$  при сигнале управления, равном  $\delta_{\max}$ . Из уравнения  $0 = F(\delta_{\max}, \omega)$  можно найти  $\omega_{\max}$ , соответствующую  $\delta_{\max}$ . С использованием максимальной кривизны базисного  $\eta^2s$ -сплайна получаем выражение (5) для  $\omega_{\max}$

$$\omega_{\max} = \frac{c_{\max}^{\max}}{K_1} U, \quad (5)$$

где  $c_{\max}^{\max}$  – максимальная кривизна базисного  $\eta^2s$ -сплайна, равная 1.

Из выражения (5) легко находится значение коэффициента подобия  $K_1$ .

Найдем коэффициент подобия  $K_2$  для  $\eta^2s$ -сплайна, движение ПР по которому происходит в точках с  $\dot{\omega}_{\max}$  с сигналом управления, равным  $\delta_{\max}$ . Из уравнения  $\dot{\omega}_{\max} = F(\delta_{\max}, 0)$  можно найти  $\dot{\omega}_{\max}$ , соответствующую  $\delta_{\max}$ . Принимаем, что  $t = 0$  при  $u = 0$ . Продифференцировав (4) по времени, получаем выражение для  $\dot{\omega}_{\max}$  в начальной точке  $\eta^2s$ -сплайна

$$\dot{\omega}_{\max} = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} U. \quad (6)$$

Производная кривизны траектории движения ПР по времени может быть представлена выражением

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\frac{dc}{du} \cdot \frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\rho}{du}},$$

где  $\rho$  – длина кривой от начала до текущей точки,  $\frac{d\rho}{dt} = U$ ,  $u \in [0, 1]$  – скаляр-

ный параметр векторного полинома  $\eta^2s$ -сплайна,  $\frac{d\rho}{du}$  – длина касательной в текущей точке векторного полинома. Для производной кривизны в начальной точке  $\eta^2s$ -сплайна получаем выражение

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\left. \frac{dc}{du} \right|_{u=0}}{d} U, \quad (7)$$

где  $d$  – длина касательной в начальной точке.

Подставив (7) в (6), используя свойство подобия  $\eta^2$ -сплайнов и функцию  $d_{base}(\Delta\phi)$ , получаем

$$\dot{\omega}_{\max} = \frac{1}{K_2} \left. \frac{dc_{base}}{du} \right|_0 U \frac{1}{K_2 d_{base}(\Delta\phi)} U. \quad (8)$$

Из выражения (8), используя определение функции  $f_{base}(\Delta\phi)$ , получаем выражение для вычисления  $K_2$

$$K_2 = \frac{U}{\sqrt{\dot{\omega}_{\max}}} f_{base}(\Delta\phi).$$

Очевидно, что допустимым является  $\eta^2 s$ -сплайн с максимальным коэффициентом подобия

$$K = \max(K_1, K_2).$$

Допустимым отрезком исполнительной траектории будет  $\eta^2 s$ -сплайн с граничными условиями

$$\{r_0, r_0 + K l_{base}(\Delta\phi) e_{0,5}, \alpha_0, \alpha_0 + \Delta\phi, 0, 0\},$$

где  $e_{0,5}$  – единичный вектор в направлении  $(\alpha_0 + 0,5\Delta\phi)$  (см. рис. 1),  $K l_{base}(\Delta\phi)$  – расстояние между граничными точками,

$$\eta = (d, d, 0, 0)^T,$$

где  $d = K d_{base}(\Delta\phi)$  – длина касательных в граничных точках.

Преобразование граничных условий и настраиваемых параметров в двумерные коэффициенты полинома  $P_5(u)$  выполняется по формулам (2) [5].

### Принципы формирования исполнительной траектории

Благодаря нулевой кривизне в граничных точках  $\eta^2 s$ -сплайна путевые примитивы (отрезки прямых и  $\eta^2 s$ -сплайны) могут соединяться в любой последовательности с геометрической гладкостью  $G^2$ . По аналогии с [3] путевые примитивы могут располагаться в разных плоскостях, что обеспечивает построение исполнительной траектории в 3D пространстве.

Последовательное соединение двух одинаковых  $\eta^2 s$ -сплайнов может обеспечить переход ПР на параллельную траекторию. Последовательное соединение трех специально подобранных  $\eta^2 s$ -сплайнов и одного прямого отрезка может обеспечить переход ПР на заданную прямую траекторию.

Дополнительным преимуществом рассмотренных исполнительных траекторий является возможность с помощью задания ограничения на сигнал управления при их формировании обеспечивать запас по управлению для парирования внешних возмущений.



## Результаты моделирования

На рис. 4 показаны две траектории: ABCD и  $AB_1C_1D_1$  – перевода ПР на обратный курс. Каждая траектория составлена из трех  $\eta^2s$ -сплайнов. Граничные точки сплайнов помечены жирными точками. Эти траектории использовались как исполнительные при моделировании перехода ПР на обратный курс при условии, что абсолютная величина скорости  $U = 100$  км/ч. Использовалась модель движения ПР

$$d\omega/dt = b\delta + \theta_1\omega + \theta_2|\omega|\omega,$$

где  $\omega$  – угловая скорость, град/с;  $t$  – время, с;  $\delta$  – сигнал управления, град;  $b = 0,025$  с<sup>-2</sup>;  $\theta_1 = 7,36 \times 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>;  $\theta_2 = -0,055$  град<sup>-1</sup>. Слагаемое  $\theta_2|\omega|\omega$  введено для обеспечения большей адекватности модели движения динамике реальных подвижных объектов [9]. Для управления движением ПР по исполнительной траектории использовался закон управления, описанный в [10].

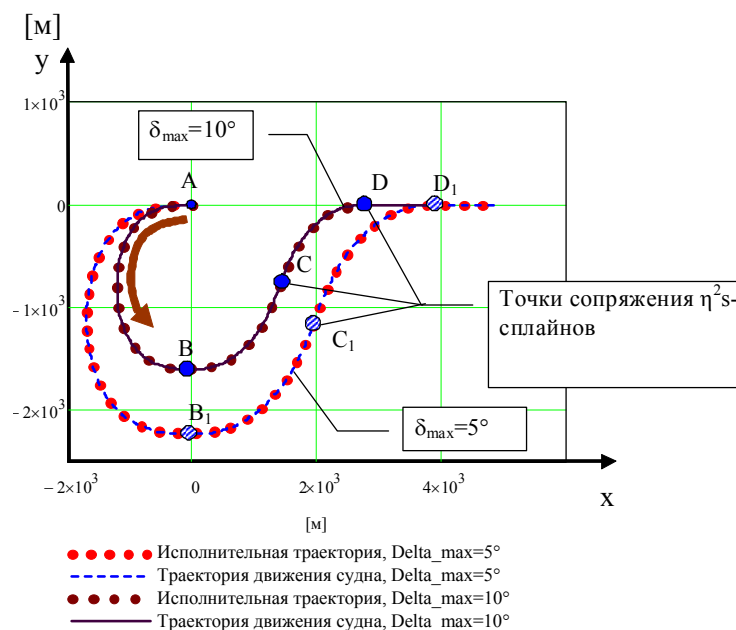


Рис. 4. Траектории перевода судна на обратный курс

Моделирование процесса автоматического управления движением ПР по исполнительной траектории ABCD показало, что при постоянной времени привода исполнительного механизма, равной 1,2 с, абсолютная величина сигнала управления не превышает заданное максимальное значение 10° (рис. 5), а боковое отклонение не превышает 1 м (рис. 6).

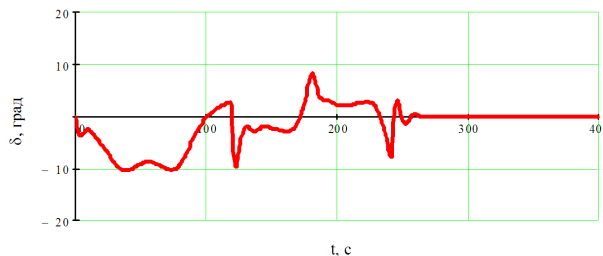


Рис. 5. График угла перекладки руля при автоматическом управлении движением судна по траектории ABCD

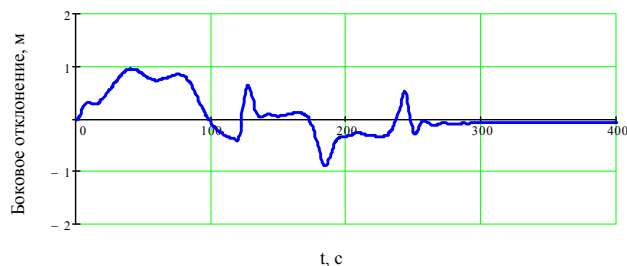


Рис. 6. График бокового отклонения при автоматическом управлении движением судна по траектории ABCD

### Заключение

В статье рассматривается ориентированный на практическое использование симметричный относительно оси путевой примитив  $\eta^2$ -сплайн, который является подвидом  $\eta^2$ -сплайнов. Использование  $\eta^2$ -сплайнов и отрезков прямых позволяет формировать в реальном масштабе времени исполнительные траектории с геометрической гладкостью  $G^2$ . Траектории с гладкостью  $G^2$  являются наиболее близкими к физически реализуемым траекториям с геометрической гладкостью  $G^3$ , но требуют меньших вычислительных ресурсов и имеют большую вычислительную устойчивость. Исполнительные траектории формируются с учетом ограничения на величину сигнала управления. Это позволяет задавать запас по управлению. Предлагаемые исполнительные траектории могут использоваться при управлении неголономными объектами, такими как суда и самолеты. Моделирование демонстрирует высокую точность движения объекта по таким исполнительным траекториям в режиме автоматического управления.

Предложено использование полиномов Бернштейна в качестве базисных, что обеспечивает дополнительное повышение вычислительной устойчивости расчетов с  $\eta^2$ -сплайнами и позволяет значительно упростить выражения для вычисления коэффициентов  $\eta^2$ -сплайнов по сравнению с работой [5].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Piazz, Aurelio, Bianco, Guarino Corrado Lo and Massimo, Romano** (2010). Smooth Path Generation for Wheeled Mobile Robots Using  $\eta^3$ -Splines, Motion Control, Federico Casolo (Ed.), ISBN: 978-953-7619-55-8, InTech, Available from: <http://www.intechopen.com/books/motion-control/smooth-path-generation-for-wheeledmobile-robots-using-eta3-splines/>
2. **Abichandani, P.** Mathematical Programming for Multi-Vehicle Motion Planning Under Communication Constraints. A Thesis Submitted to the Faculty of Drexel University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. September 2011.
3. **Tao, RuanWan, Wen, Tang, Heng, Chen.** A real-time 3D motion planning and simulation scheme for nonholonomic systems. Simulation Modelling Practice and Theory 19 (2011) 423–439.
4. **Barrientos, Antonio, Gutierrez, Pedro and Colorado, Julian** (2009). Advanced UAV Trajectory Generation: Planning and Guidance, Aerial Vehicles, ThanhMung Lam (Ed.), ISBN: 978-953-7619-41-1, InTech, Available from: [http://www.intechopen.com/books/aerial\\_vehicles/](http://www.intechopen.com/books/aerial_vehicles/)
5. **Piazz, Aurelio, Bianco, Corrado Guarino Lo, Bertozzi, Massimo, Fascioli, Alessandra, Broggi Alberto.** Quintic  $G^2$ -Splines for the Iterative Steering of Vision-Based Autonomous Vehicles. // IEEE transactions on intelligent transportation systems, Vol. 3, N. 2, March 2002.

6. Довгоброд, Г.М., Клячко, Л.М., Рогожников, А.В. Использование параметрической аппроксимации при планировании траекторий движения аппаратов //Изв. вузов. Приборостроение. -2009. - Т. 52, №9. - С. 11-17.
7. Фокс, А., Пратт, М. Вычислительная геометрия. – М.: Мир, 1982.
8. Yakimenko, Oleg A. and Kragelund, Sean P. (2011). Real-Time Optimal Guidance and Obstacle Avoidance for UMVs, Autonomous Underwater Vehicles, Mr. Nuno Cruz (Ed.), ISBN: 978-953-307-432-0, InTech, Available from: <http://www.intechopen.com/books/autonomous-underwater-vehicles/real-time-optimal-guidance-andobstacle-avoidance-for-umvs/>
9. Пелевин, А.Е. Стабилизация движения судна на криволинейной траектории//Гирокоспия и навигация.- 2002. - № 2. - С.3-11.
10. Довгоброд, Г.М. Разработка адаптивного алгоритма управления движением судна по криволинейной траектории с помощью метода поэтапного синтеза управления //Гирокоспия и навигация. - 2011. - № 4. - С.22-31.

**Abstract.** The article studies the use of splines for real-time generation of smooth executive paths that makes it possible to decrease a value of control signal, when changing from one elementary path section to another, and to create the control margin.

**Key words:** splines, smooth executive path, mobile robots

Материал поступил 29.05.14