

Ю. В. БОЛОТИН, В. С. ВЯЗЬМИН

**МЕТОДЫ l_2 И МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ
В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
ПО ДАННЫМ АЭРОГРАВИМЕТРИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СФЕРИЧЕСКОГО ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ**

Рассматривается задача локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии. Для корректного решения задачи необходима нелокальная информация о поле силы тяжести Земли, задаваемая, как правило, данными одной из глобальных моделей поля. Исследована возможность применения вейвлет-разложения на сфере при комбинировании аэрогравиметрических и глобальных данных. Разработаны алгоритмы комбинирования, основанные на методах теории оптимального оценивания. Алгоритмы проверены с использованием данных аэрогравиметрической съемки в Арктике и глобальной модели EGM2008.

Ключевые слова: аномалии силы тяжести, аэрогравиметрия, вейвлет-разложение, методы теории оптимального оценивания.

Введение

Задача определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии в районе съемок часто включает трансформации поля силы тяжести (такие, как продолжение аномалии в нижнее полупространство, вычисление потенциала аномального поля, уклонения отвесной линии). Для корректности трансформаций требуется нелокальная информация о поле силы тяжести, в связи с чем данные аэрогравиметрии обычно комбинируют с данными глобальной модели поля (EGM2008, EIGEN-6C2 или др.), задаваемыми разложением в ряд по сферическим (шаровым) функциям [1]. Применение такого разложения в рассматриваемой задаче часто оказывается технически сложным и не всегда корректным вследствие бесконечности носителя сферических функций.

Сравнительно новые подходы к локальному определению аномалии опираются на разложения по той или иной системе (полной в некотором гильбертовом пространстве) радиальных функций на сфере, обладающих свойством пространственной локализации [2]. Одно из подобных разложений основано на использовании скейлинг- и вейвлет-функций на сфере и представлено в работе [3]. Важным, на наш взгляд, свойством этого подхода в рассматриваемой задаче помимо локализации в пространстве является многомасштабный анализ, обес-

Болотин Юрий Владимирович. Доктор физико-математических наук, профессор МГУ имени М.В. Ломоносова, Университет ИТМО (С.-Петербург). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Вязьмин Вадим Сергеевич. Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник МГУ имени М.В. Ломоносова, Университет ИТМО.

Статья по докладу на XXII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2015.

печивающий возможность комбинирования данных аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля за счет выделения в них общего частотного диапазона на сфере.

Настоящая работа является продолжением исследования [4], направленного на разработку методики определения аномалии в локальном районе аэрогравиметрической съемки по совместной обработке данных аэрогравиметрии и глобальной модели поля с использованием многомасштабного анализа на сфере. Особенность данной работы заключается в разработке и сравнении алгоритмов комбинирования аэрогравиметрических и глобальных данных в двух случаях: при наличии и при отсутствии достоверной статистической информации о погрешностях глобальных данных. Возможная недостоверность указанной информации обусловлена методическими погрешностями, которые могут возникнуть при использовании разработчиками глобальных моделей приближенных методов в оценке ковариационных матриц погрешностей глобальных данных. Так, для модели EGM2008 оценки среднеквадратических погрешностей (СКП) коэффициентов высших гармоник сильно завышены (например, оценка СКП аномалии, рассчитанной по коэффициентам 1800 гармоник, порядка 100 мГал).

Статья имеет следующую структуру. Сначала кратко излагаются этапы разработанной ранее методики локального определения аномалии, на одном из которых решается задача комбинирования вейвлет-коэффициентов, полученных из данных аэрогравиметрии и глобальной модели. Эта задача рассматривается в двух постановках. В одном случае предполагается, что погрешности вейвлет-коэффициентов являются случайными величинами с известными статистическими характеристиками, определенными из авиационных и глобальных данных. Задача комбинирования вейвлет-коэффициентов ставится как задача определения линейной несмещенной оценки, оптимальной по критерию минимума дисперсии ошибки оценки, и решается по алгоритму МНК в ковариационной форме. В другом случае вводится предположение об априорной неопределенности статистических характеристик погрешностей вейвлет-коэффициентов глобальных данных. Эта неопределенность описывается следующим образом. Считается, что дисперсии указанных погрешностей ограничены с помощью констант, а взаимные ковариации неизвестны. Задача комбинирования поставлена и решена как задача поиска линейного алгоритма оценивания, оптимального по критерию минимума гарантированного значения второго момента ошибки оценки в классе всех допустимых распределений погрешностей вейвлет-коэффициентов глобальных данных.

Завершающие разделы статьи посвящены анализу методических погрешностей вейвлет-разложения и вейвлет-восстановления аномалии и обсуждению результатов обработки экспериментальных данных алгоритмами разработанной методики локального определения аномалии.

Методика локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии

Предложенная ранее методика локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии включает следующие этапы [4]:

1) оценивание коэффициентов разложения аномалии по скейлинг-функциям (скейлинг-коэффициентов) на максимальном уровне детализации по результатам авиаизмерений с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов (МНК) в информационной форме с шагом рекурсии по номеру галса (участок

прямолинейного движения летательного аппарата) съемки и регуляризация информационной матрицы оценки вектора скейлинг-коэффициентов на последнем шаге рекурсии в силу плохой обусловленности задачи;

- 2) вычисление вейвлет-коэффициентов на разных уровнях детализации по оцененным на этапе 1 скейлинг-коэффициентам;
- 3) вычисление вейвлет-коэффициентов по данным глобальной модели гравитационного поля Земли на разных уровнях детализации;
- 4) комбинирование вейвлет-коэффициентов, полученных из данных аэрогравиметрии и глобальной модели, на общих уровнях детализации;
- 5) восстановление оценки аномалии (и других функционалов гравитационного поля) по результатам комбинирования вейвлет-коэффициентов.

Опишем вкратце указанные этапы.

Исходными данными в задаче, решаемой на первом этапе методики, являются аэрогравиметрические измерения аномалии вдоль галсов, сглаженные с помощью гравиметрического фильтра [5, 6]. Фильтр характеризуется во времени весовой функцией $h_f(t)$ и частотой среза ω_{cut} . Разрешающая способность в пространстве определяется как половина длины волны $L = 2\pi V/\omega_{cut}$, V – скорость летательного аппарата. Модель сглаженных авиаизмерений на k -м галсе можно представить в виде

$$\Delta g'_k(t_{ik}) = \sum_{m=i-M}^{i+M} h_f(t_{ik} - t_{mk}) \Delta g(x_k(t_{mk})) + \delta g_k(t_{ik}), \quad i=1, \dots, M_k, \quad k=1, \dots, K, \quad (1)$$

где Δg – аномалия силы тяжести в свободном воздухе, $x_k(t_{mk}) \in \mathbf{R}^3$ – точка измерения на k -м галсе в геоцентрической системе координат, t_{ik} – дискретный момент времени измерения на галсе, M_k – количество измерений на галсе, $2M+1$ – длина носителя гравиметрического фильтра. Предполагается следующее:

- координаты точек измерений известны;
- погрешность измерения $\delta g_k(t)$ является случайным процессом с нулевым средним и известной корреляционной функцией, определяемой погрешностями «сырых» измерений и свойствами гравиметрического фильтра;
- погрешности измерений на разных галсах не коррелированы.

Аномалия предполагается гладкой функцией, представимой в виде интегральной свертки скейлинг-функции $\Phi_J(x, y_s)$ и скейлинг-коэффициентов (СК) $a_J(y_s)$ на уровне детализации J (в дискретном виде):

$$\Delta g(x) = \sum_s \omega_s \Phi_J(x, y_s) a_J(y_s), \quad (2)$$

где y_s – узлы эквивалентной сетки на сфере Ω_R , ω_s – веса интегрирования [3, 4]. В силу нормировки скейлинг-функции СК имеют размерность аномалии силы тяжести. Скейлинг-функция уровня детализации J (где $J=0, 1, 2, \dots$) определяется формулой [3]

$$\Phi_J(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n) \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{4\pi R^2} P_n(\xi^T \eta),$$

где $\varphi_j(n)$ – символ скейлинг-функции, $P_n(\xi^T \eta)$ – полином Лежандра степени n , $\xi = x/|x|$, $\eta = y/|y|$, $|x| = (x^T x)^{1/2} \geq R$, $x \in \mathbf{R}^3$. В данной работе выбрана скейлинг-функция Абеля – Пуассона с символом $\varphi_j(n) = \exp(-2^{-J} n)$, представимая в виде элементарной функции (рис. 1):

$$\Phi_J(x, y) = \frac{1}{4\pi R} \frac{|x|^2 - R^2 b_J^2}{(|x|^2 + R^2 b_J^2 - 2b_J x^T y)^{3/2}}, \quad b_J = \exp(-2^{-J}). \quad (3)$$

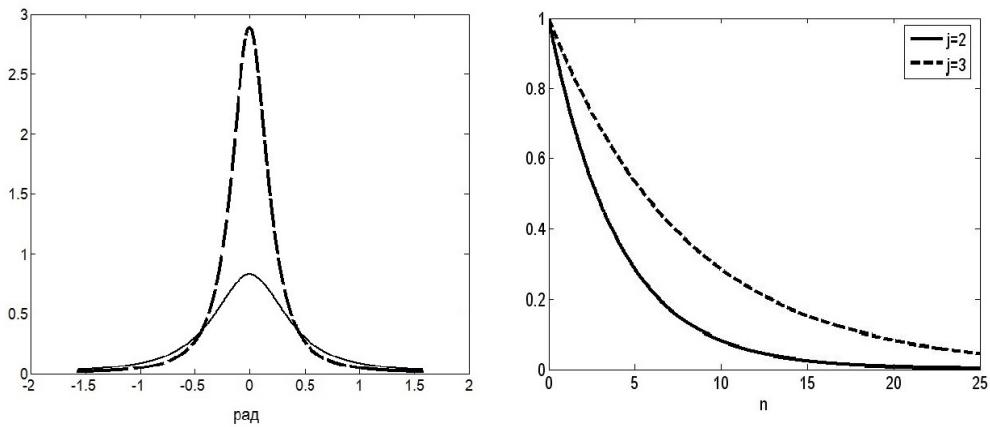


Рис. 1. Скейлинг-функция Абеля – Пуассона $\Phi_J(x, y)$ на сфере единичного радиуса в зависимости от угла между x, y (слева) и ее символ $\Phi_J(n)$ (справа), $j=2, 3$.

Скейлинг-функция Абеля – Пуассона уровня J имеет следующие свойства [3]:

- 1) строго положительна в области определения;
- 2) осесимметрична, то есть зависит только от сферического расстояния между x, y при фиксированном значении $|x|$;
- 3) убывает с увеличением сферического расстояния между x, y ;
- 4) гармоническая во внешнем пространстве сферы;
- 5) соотношение степени локализации в пространстве и в частотной области близко к оптимальному;
- 6) стремится к дельта-функции Дирака на сфере при $J \rightarrow \infty$ по норме гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций на сфере $L^2(\Omega_R)$.

Отметим, что скейлинг-функции Абеля – Пуассона $\Phi_J(\cdot, y_i)$, где $\{y_i\}$ – счетный набор точек на сфере, не образует ортонормированной системы в $L^2(\Omega_R)$.

Узлы СК y_s в (2) определены на сфере Ω_R . Радиус сферы R выберем равным минимальному геоцентрическому расстоянию до точек участка измерения на поверхности референц-эллипсоида (Ω_R – сфера Бьерхаммера [3]). В силу свойства 3 при суммировании (2) достаточно учитывать только узлы y_s из некоторой окрестности x (выбор оптимального радиуса окрестности обсуждается ниже).

Заменим Δg в (1) выражением (2) и перепишем модель сглаженных авиаизмерений (1) в векторном виде:

$$\Delta g'_k = H_k a_{kJ} + \delta g_k, \quad k=1, \dots, K, \quad (4)$$

где $\Delta g'_k = (\Delta g'_k(t_{1k}), \dots, \Delta g'_k(t_{M_k k}))^T$ и $\delta g_k = (\delta g_k(t_{1k}), \dots, \delta g_k(t_{M_k k}))^T$ – $M_k \times 1$ -векторы измерений и их погрешностей, a_{kJ} – $N_k \times 1$ -вектор неизвестных СК $a_J(y_s)$ в узлах y_s , относящихся к k -му галсу. Через H_k обозначена $M_k \times N_k$ -матрица, состоящая из

сумм произведений значений весовой функции фильтра в (1), весов ω_s и значений скейлинг-функции в узлах y_s .

Введем матрицу ковариаций погрешностей измерений $R_k = E[\delta g_k \delta g_k^T]$, определяемую по корреляционной функции погрешностей авиаизмерений. Погрешности на разных галсах предполагаются некоррелированными: $E[\delta g_k \delta g_m^T] = 0$, $k \neq m$. Поставим задачу оценивания вектора СК в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \|\Delta g'_k - H_k a_{kJ}\|_{R_k^{-1}}^2 &= \\ = \sum_{k=1}^K (\Delta g'_k - H_k a_{kJ})^T R_k^{-1} (\Delta g'_k - H_k a_{kJ}) &\rightarrow \min_{a_{kJ} \in \mathbf{R}^{N_k}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача (5) является обратной некорректно поставленной в силу задания узлов СК y_s на сфере Бьерхаммера Ω_R , определенной выше (задача продолжения поля в нижнее полупространство). Решение (5) определяется с помощью рекуррентного МНК в информационной форме с шагом рекурсии по номеру галса [7]:

$$Q_k = Q_{k-1} + I_k^T H_k^T R_k^{-1} H_k I_k, \quad k=1, \dots, K, \quad (6)$$

$$b_k = b_{k-1} + I_k^T H_k^T R_k^{-1} \Delta g'_k, \quad (7)$$

с начальными условиями $Q_0 = 0$, $b_0 = 0$, где Q_k – информационная $N \times N$ -матрица вектора $a_J \in \mathbf{R}^N$, состоящего из СК, определенных всеми K галсами, b_k – информационная оценка вектора a_J , I_k – $N_k \times N$ -матрица, задающая проекцию вектора a_J на подмножество СК, коррелированных только с k -м галсом: $I_k a_J = a_{kJ}$. Оценка вектора a_J определяется после K -го шага рекурсии из решения уравнения $b_K = Q_K a_J$. Ковариационная матрица ошибки оценки вычисляется по информационной матрице Q_K . Матрица Q_K может быть плохо обусловленной. Оценку ковариационной матрицы ошибок оценки СК $\tilde{P}_{\delta a_J}$ определим как обратную к регуляризованной информационной матрице: $\tilde{P}_{\delta a_J} = (Q_K + \mu^2 I)^{-1}$, I – единичная $N \times N$ -матрица, μ – параметр регуляризации. Оценка вектора СК определяется как $\tilde{a}_J = \tilde{P}_{\delta a_J} b_K$. Выбор параметра регуляризации обсуждается ниже.

На втором этапе методики проводится вейвлет-разложение [3] данных аэрогравиметрии, состоящее в вычислении по найденным оценкам СК $\tilde{a}_J(y_s)$ вейвлет-коэффициентов (ВК) на разных уровнях детализации $j \leq J$. Необходимость этого этапа вызвана тем, что данные аэрогравиметрии и глобальной модели имеют разное пространственное разрешение (в терминах многомасштабного анализа – разный максимальный уровень детализации). После проведения вейвлет-разложения возникает возможность поставить задачу комбинирования ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели на общих уровнях детализации. Отметим, что вейвлет-коэффициенты могут быть интерпретированы как результаты полосовой фильтрации данных об аномалии.

Оценки ВК $c_j(y_s)$ определяются на разных уровнях детализации $j = j_0, \dots, J$ по оценкам СК $\tilde{a}_J(y_s)$ с помощью формул вейвлет-разложения [3]:

$$\tilde{c}_J(y_s) = \tilde{a}_J(y_s) - \sum_m \omega_m \Phi_J(y_s, y_m) \tilde{a}_J(y_m), \quad (8)$$

$$\tilde{c}_j(y_{sj}) = \sum_m \omega_m \Psi_j(y_{sj}, y_m) \tilde{a}_J(y_m), \quad j = j_0, \dots, J-1, \quad (9)$$

где $\Psi_j(y_{sj}, y_m)$ – вейвлет-функция Абеля – Пуассона (рис. 2), $\Psi_j(y_{sj}, y_m) = \Phi_{j+1}(y_{sj}, y_m) - \Phi_j(y_{sj}, y_m)$. Здесь y_{sj} – узлы сетки на уровне детализации j . Запишем (8)–(9) в векторном виде: $\tilde{c}_j = K_j \tilde{a}_J$, $K_j = N_j \times N_j$ -матрица. Матрицы ковариаций погрешностей ВК определяются выражением

$$\tilde{P}_{\delta c_j} = K_j \tilde{P}_{\delta a_J} K_j^T. \quad (10)$$

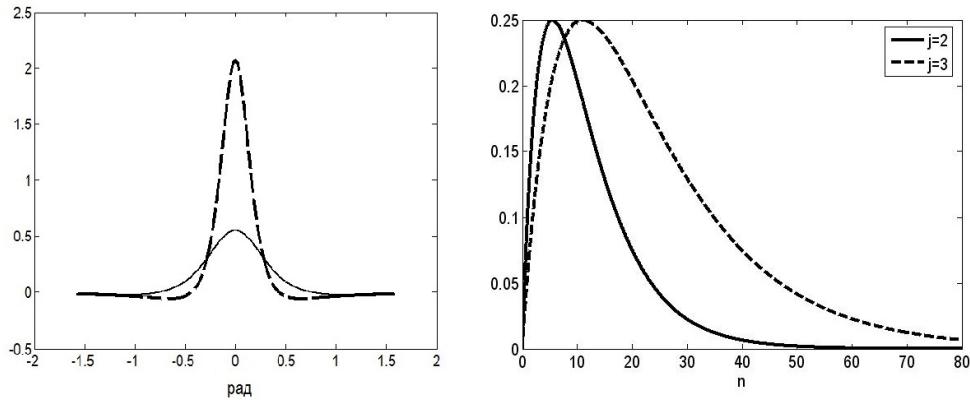


Рис. 2. Вейвлет Абеля – Пуассона $\Psi_j(x, y)$ в зависимости от угла между x, y при $R=1$ м (слева) и его символ (*справа*), $j=2, 3$

На третьем этапе методики вычисляются векторы ВК аномалии и матрицы ковариаций их погрешностей на разных уровнях детализации по данным глобальной модели гравитационного поля по формулам (8)–(9).

Четвертый этап посвящен комбинированию ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели на общих уровнях детализации и рассмотрен подробно ниже.

Опишем заключительный, пятый этап методики, на котором проводится восстановление оценки аномалии (и других функционалов гравитационного поля) по результатам комбинирования вейвлет-коэффициентов.

Восстановление оценки аномалии $\Delta\tilde{g}(x)$ в произвольной точке x района съемки на референц-эллипсоиде (или в точке во внешнем полупространстве) по оценкам ВК \tilde{c}_j выполняется с помощью процедуры вейвлет-восстановления [3]

$$\Delta\tilde{g}(x) = \sum_{j=j_0}^J \Delta\tilde{g}_j(x), \quad (11)$$

где $\Delta\tilde{g}_j(x)$ вычисляется по формуле свертки (в дискретном виде):

$$\Delta\tilde{g}_j(x) = \sum_s \omega_{sj} \Psi_j^d(x, y_{sj}) \tilde{c}_j(y_{sj}), \quad j = j_0, \dots, J-1, \quad (12)$$

$$\Delta\tilde{g}_J(x) = \sum_s \omega_s \Phi_J(x, y_s) \tilde{c}_J(y_s). \quad (13)$$

Здесь $\Psi_j^d(x, y_s)$ – двойственная вейвлет-функция, $\Psi_j^d(x, y_s) = \Phi_{J+1}(x, y_s) + \Phi_j(x, y_s)$.

В силу свойств вейвлет-восстановления результат (11) совпадает с представлением аномалии в виде (2) (с точностью до погрешности дискретизации интегральных сверток):

$$\Delta \tilde{g}(x) = \sum_{j=j_0}^J \Delta \tilde{g}_j(x) \approx \sum_s \omega_s \Phi_J(x, y_s) \tilde{a}_J(y_s). \quad (14)$$

Комбинирование вейвлет-коэффициентов аэрогравиметрии и глобальной модели

Поставим задачу уточнения оценок векторов ВК $\tilde{c}_j \in \mathbf{R}^{N_j}$ и матриц ковариаций их погрешностей, полученных из аэрогравиметрических измерений на уровнях детализации $j=j_0, \dots, J$, по данным глобальной модели. Представим оценку вектора ВК в виде $\tilde{c}_j = c_j + \delta c_j$, где c_j – вектор истинных ВК, δc_j – случайный вектор погрешностей ВК с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариаций $\tilde{P}_{\delta c_j} = E[\delta c_j \delta c_j^T]$. Обозначим через $c_j^{glob} \in \mathbf{R}^{N_j}$ и P_j^{glob} , $j=j_0, \dots, J_{glob}$, векторы ВК аномалии и матрицы ковариаций их погрешностей, вычисляемые по данным глобальной модели. Поскольку данные аэрогравиметрии более высокого пространственного разрешения, имеет место неравенство $J_{glob} \leq J$. Представим вектор ВК в виде $c_j^{glob} = c_j + \delta c_j^{glob}$, считая, что вектор погрешностей ВК глобальной модели δc_j^{glob} – случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, $P_j^{glob} = E[\delta c_j^{glob} (\delta c_j^{glob})^T]$. Предположим положительную определенность матриц ковариаций $\tilde{P}_{\delta c_j}$, P_j^{glob} и некоррелированность погрешностей ВК (как данных аэрогравиметрии, так и глобальных данных) на разных уровнях детализации j . Поставим задачу уточнения вектора \tilde{c}_j по c_j^{glob} на общих уровнях детализации как задачу оптимального оценивания вектора истинных ВК c_j в классе линейных оценок вида $F_{1j}\tilde{c}_j + F_{2j}c_j^{glob}$, где F_{1j} , F_{2j} – произвольные $N_j \times N_j$ -матрицы. В качестве критерия используем минимум по всем F_{1j} , F_{2j} гарантированного значения для второго момента ошибки оценки:

$$\sup_{c_j \in \mathbf{R}^{N_j}} E[\|c_j - F_{1j}\tilde{c}_j - F_{2j}c_j^{glob}\|^2] \rightarrow \min_{F_{1j}, F_{2j}}, \quad j=j_0, \dots, J_{glob}. \quad (15)$$

Неизвестный вектор c_j предполагается детерминированным. Преобразовав выражение для второго момента ошибки оценки, нетрудно показать, что задача (15) сводится к следующей задаче вида

$$\text{tr}(F_{1j}\tilde{P}_j F_{1j}^T + F_{2j}P_j^{glob} F_{2j}^T) \rightarrow \min_{F_{1j} + F_{2j} = I_j}, \quad (16)$$

где tr – след матрицы, I_j – единичная $N_j \times N_j$ -матрица. Решение (16) и оптимальная оценка вектора c_j определяются алгоритмом МНК (в ковариационной форме):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j^+ &= (I - \tilde{F}_{2j})\tilde{c}_j + F_{2j}c_j^{glob}, \\ \tilde{P}_{\delta c_j}^+ &= (I - \tilde{F}_{2j})\tilde{P}_{\delta c_j}, \\ \tilde{F}_{2j} &= \tilde{P}_{\delta c_j} \left(\tilde{P}_{\delta c_j} + P_{\delta c_j}^{glob} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

где через \tilde{c}_j^+ , $\tilde{P}_{\delta c_j}^+$ обозначены результат оценки вектора c_j и матрица ковариаций ошибки оценки.

Рассмотрим задачу комбинирования в предположении о недостоверности статистической информации о погрешностях ВК δc_j^{glob} глобальной модели, считая, что дисперсии и ковариации погрешностей ВК глобальных данных неизвестны, но заданы константы, ограничивающие дисперсии. А именно, предположим, что $E[\delta c_j^{glob}] = 0$ и имеют место ограничения:

$$D[\delta c_j^{glob}(y_{sj})] \leq \rho_{sj}^2, \quad |E[\delta c_j^{glob}(y_{sj})\delta c_j^{glob}(y_{mj})]| \leq \rho_{sj}\rho_{mj} \quad \text{при } s \neq m, \quad (18)$$

где $\rho_{sj}, \rho_{mj} > 0$ заданы. Пусть Θ_j – множество всех случайных $N_j \times 1$ -векторов ξ_j , удовлетворяющих указанным свойствам. Будем снова искать оценку вектора истинных ВК c_j в классе всех линейных оценок вида $F_{1j}\tilde{c}_j + F_{2j}c_j^{glob}$, где F_{1j}, F_{2j} – произвольные $N_j \times N_j$ -матрицы. В качестве критерия используем минимум по всем F_{1j}, F_{2j} гарантированного значения для второго момента ошибки оценки:

$$\sup_{c_j \in R^{N_j}, \xi_j \in \Theta_j} E[\|c_j - F_{1j}\tilde{c}_j - F_{2j}c_j^{glob}\|^2] \rightarrow \min_{F_{1j}, F_{2j}}, \quad j = j_0, \dots, J_{glob}. \quad (19)$$

Неизвестный вектор c_j , как и в (15), предполагается детерминированным. Преобразовав выражение для второго момента ошибки оценки, можно свести задачу (19) к задаче вида:

$$\text{tr}(F_{1j}\tilde{P}_j F_{1j}^T) + E[\|F_{2j}\xi_j\|^2] \rightarrow \min_{F_{1j} + F_{2j} = I_j} \max_{\xi_j \in \Theta_j}, \quad (20)$$

где I_j – единичная $N_j \times N_j$ -матрица. С помощью минимаксного подхода [8] получим, что решение (20) и оптимальная оценка вектора c_j определяются алгоритмом МНК в форме (17), в котором используется матрица ковариаций погрешностей ВК глобальной модели в случае наихудшего (в смысле (19)) из допустимых распределений погрешностей:

$$\tilde{F}_{2j} = \tilde{P}_{\delta c_j} \left(\tilde{P}_{\delta c_j} + \tilde{P}_{\delta c_j}^{glob} \right)^{-1}, \quad \tilde{P}_{\delta c_j}^{glob} = \text{diag}(\rho_{1j}^2, \dots, \rho_{Nj}^2). \quad (21)$$

Методическая погрешность вейвлет-восстановления аномалии

По найденным оценкам ВК $\tilde{c}_j^+, j = j_0, \dots, J_{glob}$, и $\tilde{c}_j, j = J_{glob} + 1, \dots, J$, может быть восстановлена оценка аномалии силы тяжести по формулам (11)–(13). Проанализируем методическую погрешность вейвлет-восстановления, вызванную обрезанием интегральных сумм в (8)–(9) и (12)–(13). Обозначим через $D_j(x)$, $j = j_0, \dots, J$, окрестности точки x на сфере, по узлам y_{sj} из которых вычисляются указанные суммы. А именно, пусть $D_j(x)$ есть множество всех узлов y_{sj} на сфере таких, что расстояние между y_{sj} и x не превосходит некоторого значения δ_j , где $0 < \delta_j \leq \pi R$. Тогда, подставив выражения (8)–(9), (12)–(13) в формулу вейвлет-восстановления (11) и учтя равенство (14), получим выражения для методической погрешности вейвлет-восстановления $\Delta(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \sum_{j=j_0+1}^J (\Delta_j^I(x) + \Delta_j^{II}(x)), \\ \Delta_j^I(x) &= \Phi_j * \Phi_j * \tilde{a}_J - \Phi_j * \Phi_{j-1} * \tilde{a}_J, \\ \Delta_j^{II}(x) &= \Phi_j * \Phi_{j-1} * \tilde{a}_J - \Phi_{j-1} * \Phi_j * \tilde{a}_J,\end{aligned}$$

где «*» обозначает интегральную свертку в дискретном виде. Полагая $\delta_j = \dots = \delta_J = \delta$, имеем $D_j(x) = \dots = D_J(x)$, и, следовательно, вклад погрешности $\Delta_j^I(x)$ в суммарную методическую погрешность восстановления аномалии исключен. Оценим модуль погрешности $\Delta_j^{II}(x)$:

$$\begin{aligned}|\Delta_j^{II}(x)| &= |\Phi_j * \Phi_{j-1} * \tilde{a}_J + \Phi_j * \Phi_{j-1} * \tilde{a}_J - \Phi_{j-1} * \Phi_j * \tilde{a}_J - \Phi_{j-1} * \Phi_j * \tilde{a}_J| \leq \\ &\leq 2 \|a_J\|_\infty \left(\int_{\Omega_R \setminus D_{j-1}} \Phi_{j-1}(\cdot, y) d\omega(y) + \int_{\Omega_R \setminus D_{j-1}} \Phi_j(\cdot, y) d\omega(y) \right),\end{aligned}\tag{22}$$

где использовано равенство единице интеграла по сфере от скейлинг-функции Абеля – Пуассона [3]. Здесь $d\omega(y)$ – элемент поверхности сферы. С ростом δ правая часть (22) стремится к 0. При уменьшении за счет выбора δ значения погрешности (22) на грубом уровне детализации j_0 уменьшаются также значения погрешности (22) на высших уровнях j (примерно со степенью 2 с ростом j за счет улучшения локализации скейлинг-функции на сфере), что позволяет выбрать оптимальное значение параметра δ .

Результаты обработки реальных данных

Методика локального определения аномалии, использующая разработанные алгоритмы комбинирования (17) и (21), была применена к данным аэрогравиметрической съемки в Арктике. Авиационные измерения выполнены с гравиметром GT-1A [9] ИФЗ РАН. Отметим, что на борту съемка проводилась также и с использованием гравиметра «Чекан-АМ» [10, 11]. Длина волны гравиметрического фильтра $L=10$ км. Частота его выходных данных 1 Гц. Погрешности измерений до фильтрации примерно соответствуют модели белого шума на частоте 1 Гц со среднеквадратическим отклонением (СКО) 50 мГал. Географическая широта региона съемки 73-77°. Средняя высота полетов 3700 м. По авиазаимствованиям алгоритмом (6)–(7) проведено оценивание СК a_J аномалии на максимальном уровне детализации $J = 11$ (первый этап методики). При обработке использовано 40 галсов север–юг, расстояние между галсами 1 км. Узлы СК задают сетку с шагом 1,0 км по долготе и 1,4 км по широте на сфере радиуса $R = 6358$ км. Параметр регуляризации μ информационной матрицы Q_K подобран по критерию близости оценки аномалии, восстановленной на галсах по оценкам СК \tilde{a}_J по формуле (2), к аномалии из исходных аэрогравиметрических данных при величине СКП не хуже 0,5 мГал. На втором этапе методики по оценке \tilde{a}_J рассчитаны оценки ВК \tilde{c}_j по формулам (8)–(9), а также матрицы ковариаций их погрешностей, $j=9,..,11$. Радиус окрестностей суммирования D_j выбран равным

20 км для каждого j (отметим, что значение радиуса, определяемое минимизацией (22), оказывается несколько завышенным). Величина СКП вейвлет-восстановления (11) аномалии по ВК \tilde{c}_j на галсах составляет 0,65 мГал.

Для комбинирования использовалась глобальная модель EGM2008 в разложении до 1800 гармоник (максимальное число гармоник модели 2159, номинальное разрешение в пространстве $9,3 \times 9,3$ км). По данным EGM2008 были рассчитаны ВК c_j^{glob} и матрицы ковариаций их погрешностей, $j=9, 10$ (третий этап методики). Значения среднеквадратических погрешностей ВК глобальной модели c_j^{glob} и ВК аэрогравиметрических данных \tilde{c}_j приведены в таблице.

Среднеквадратические погрешности ВК глобальных и авиационных данных

Уровень масштаба j	Среднеквадратическая погрешность ВК, мГал		
	глобальных данных	авиационных данных (внутри района съемки)	авиационных данных (во всем районе съемки)
9	6,3	3,0	30,0
10	13,0	11,0	70,0

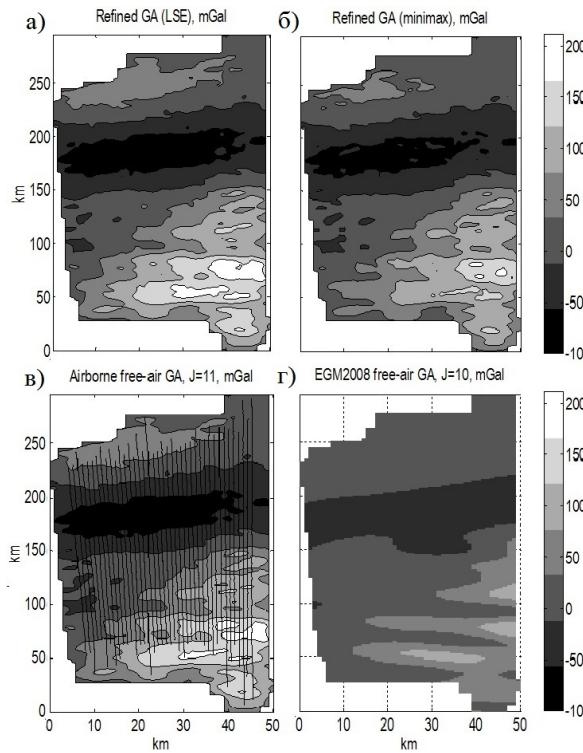


Рис. 3. Карты аномалии силы тяжести в свободном воздухе в узлах сетки $1,5 \times 1,5$ км на поверхности референц-эллипсоида в районе съемки [мГал]: а) аномалия, построенная по ВК, комбинированном с помощью алгоритма МНК; б) аномалия, построенная по ВК, комбинированном с помощью минимаксного подхода; в) аномалия, построенная по оценкам СК, полученным из данных аэрогравиметрии, на максимальном уровне $J=11$, и линии галсов; г) аномалия, построенная по данным глобальной модели EGM2008

Комбинирование ВК \tilde{c}_j и c_j^{glob} выполнено по алгоритму МНК (17) и с помощью минимаксного подхода (21) (четвертый этап). При минимаксном подходе в качестве ограничений на дисперсии в (18) были взяты значения квадрата среднеквадратических погрешностей ВК c_j^{glob} , определенные из EGM2008 (см. таблицу).

На заключительном (пятом) этапе методики по оценкам ВК с помощью формулы (11) рассчитаны оценки аномалии силы тяжести в свободном воздухе в узлах сетки $1,5 \times 1,5$ км на поверхности референц-эллипсоида в районе съемки.

Построены карты аномалии (рис. 3) и графики аномалии на галсе (рис. 4). Среднеквадратическая величина разности аномалии, полученной по СК \tilde{a}_J , оцененным только по аэрогравиметрическим данным, и аномалии, полученной при комбинировании с глобальными данными по алгоритму МНК, составляет 5,4 мГал. Отметим, что аномалия, полученная в результате комбинирования по МНК, сглажена в направлении восток–запад вследствие того, что расстояние между галсами (равное 1 км) больше, чем разрешающая способность гравиметрического фильтра в пространстве ($L/2=5$ км).

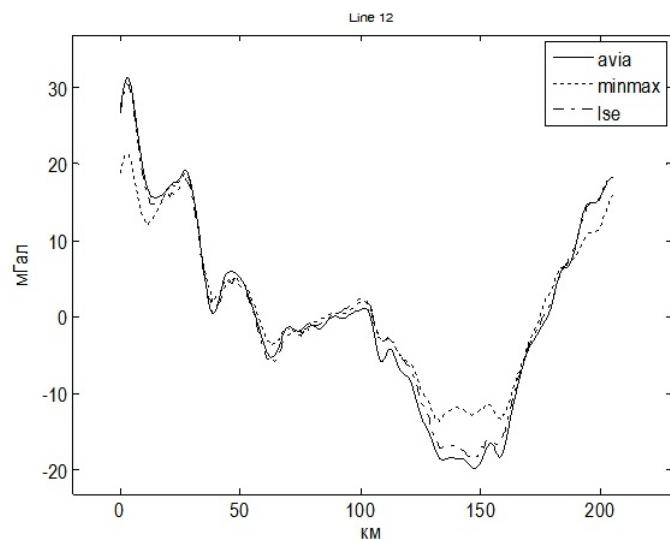


Рис. 4. Графики аномалии силы тяжести в свободном воздухе на галсе [мГал]: сплошная линия: аномалия из исходных аэрогравиметрических данных; штрихпунктирная линия: аномалия, построенная по ВК, комбинированным с помощью алгоритма МНК; пунктирная линия: аномалия, построенная по ВК, комбинированным с помощью минимаксного подхода

Среднеквадратическая величина разности аномалии, полученной по СК \tilde{a}_J , оцененным только по аэрогравиметрическим данным, и аномалии, полученной при комбинировании по минимаксному алгоритму, составляет 14,3 мГал. Аномалия, полученная в результате комбинирования по минимаксному алгоритму, сильно сглажена. Предположительно это вызвано тем, что при задании ограничений на дисперсии погрешностей ВК глобальной модели в (18) не были учтены погрешности обрезания гармонического ряда.

Заключение

Исследована возможность использования метода вейвлет-разложения на сфере в задаче локального определения аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли. Разработана методика решения указанной задачи с использованием метода вейвлет-разложения на сфере и представлены результаты ее применения к данным аэрогравиметрической съемки в Арктике и глобальной модели EGM2008, показавшие корректность применения данного метода в решаемой задаче. Опробованы два алгоритма комбинирования аэрогравиметрических и глобальных данных: на основе МНК и минимаксного подхода. Алгоритм МНК определяет сглаженную оценку аномалии в направлении восток-запад в сравнении с аномалией из исходных аэрогравиметрических данных. Это вызвано тем, что разрешающая способность гравиметрического фильтра в пространстве хуже, чем пространственное разрешение аэрогравиметрических данных в направлении восток-запад, определяемое плотностью расположения галсов съемки. При использовании минимаксного алгоритма предполагался случай наихудших (в смысле (19)) корреляций погрешностей вейвлет-коэффициентов глобальной модели. Обработка алгоритмом привела к сильному сглаживанию аномалии. Увеличение веса глобальной модели в комбинированном решении объясняется, на наш взгляд, тем, что при задании ограничений на дисперсии погрешностей вейвлет-коэффициентов глобальной модели не учтены погрешности обрезания гармонического ряда. Следует отметить, что оба алгоритма позволяют решить обратную некорректную задачу локального определения аномалии на поверхности референц-эллипсоида по авиаизмерениям на высоте полета.

Исследована методическая погрешность восстановления аномалии по вейвлет-коэффициентам. Показано, что погрешность может быть сведена к минимуму за счет выбора одинакового радиуса носителя вейвлета Абеля-Пуассона на каждом уровне детализации. Среднеквадратическая погрешность восстановления аномалии на галсах по вейвлет-коэффициентам, определенным из данных аэрогравиметрии, не превысила 0.7 мГал.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда
(проект 14-29-00160).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Kern M., Schwarz K.P., Sneeuw N. A study on the combination of satellite, airborne, and terrestrial gravity data // J. Geodesy. - 2003. - V.77 - P.217-225.
2. Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gurr T., Eicker A., Kusche J., Sanchez L., Han S.-C. Regional gravity modeling in terms of spherical base functions // J. Geod. - 2007. - № 81. - P.17-38.
3. Freedman W., Michel V. Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience). Birkhäuser Verlag. 2004.
4. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. Локальное многомасштабное оценивание силы тяжести по данным аэрогравиметрии // Геофизические исследования. - 2014. - № 3. - С.38-49.
5. Степанов О.А., Блажнов Б.А., Кошаев Д.А. Исследование эффективности использования спутниковых измерений при определении ускорения силы тяжести на летательном аппарате // Гирокопия и навигация. - 2002. - № 3 (38). - С.33-47.
6. Bolotin Y.V., Yurist S.S. Suboptimal smoothing filter for the marine gravimeter GT-2M // Gyroscopy and Navigation. - 2011. - № 2. - P.152-155.
7. Kailath T. Linear estimation. Prentice-Hall. 2000. 855 p.

8. **Матасов А.И.** Метод гарантирующего оценивания // М.: Изд-во Московского университета. - 2009. - 100 с.
9. **Конешов В.Н., Болотин Ю.В., Голован А.А., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш. и др.** Использование аэрогравиметра GT2A в полярных областях // Симпозиум Международной ассоциации по геодезии (IAG): Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях. - СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2013. - С.21-23.
10. **Краснов А.А., Соколов А.В., Элинсон Л.С.** Новый аэроморской гравиметр серии «Чекан» // Гирокопия и навигация. - 2014. - № 1 (84). - С. 26-34.
11. **Пешехонов В.Г., Соколов А.В., Элинсон Л.С., Краснов А.А.** Результаты разработки и испытаний нового аэроморского гравиметра/В.Г. Пешехонов и др./// XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. - СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015. - С. 173-179.

Abstract. The paper focuses on the problem of gravity anomaly determination by airborne gravimetry data. To solve the problem, nonlocal information on the Earth gravity field is needed, usually provided by one of the Earth's global gravity field models. The possibility of using spherical wavelet expansion for combining airborne gravimetry and global data is studied. Combination algorithms based on optimal estimation methods are developed and tested using Arctic airborne gravity survey data and EGM 2008 global model.

Key words: Earth's global gravity field models, airborne gravimetry, wavelet expansion, EGM 2008 global model