

О. А. СТЕПАНОВ, А. Б. ТОРОПОВ

**МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ****Часть 1. ОБЗОР АЛГОРИТМОВ**

Рассматривается метод навигации подвижного объекта с использованием карт геофизических полей, анализируются его особенности и приводится обзор алгоритмов, применяемых для решения задачи навигации по геофизическим полям. Значительное внимание уделено алгоритмам, основанным на использовании методов нелинейной фильтрации, не только позволяющих сформулировать и решить задачу синтеза алгоритмов, но и создающих предпосылки для решения задачи анализа их точности.

Ключевые слова: навигация, подвижный объект, геофизические поля, нелинейная фильтрация, синтез алгоритмов, точность.

Введение

При решении задачи навигации подвижных объектов в последнее время значительно возрос интерес к методу уточнения координат, основанному на сопоставлении измеренных с помощью установленных на борту подвижного объекта датчиков и вычисленных по данным карты значений различных полей [1–19]. Этот метод в отечественной литературе с момента его появления получил наименование метода корреляционно-экстремальной навигации, а системы, основанные на его использовании, – корреляционно-экстремальные навигационные системы [6, 8, 12, 20–37]. Впоследствии стал использоваться также термин – «метод навигации по геофизическим полям» (ГФП) [3, 19, 118], который и будет использоваться в настоящей работе. В англоязычной литературе такие названия используют редко [38–42], чаще применяется термин, отражающий не только факт привлечения данных с карты, но и конкретный вид используемых полей. Так, в случае использования поля рельефа местности или поля глубин метод навигации называется *terrain aided (referenced) navigation method* – метод, основанный на коррекции (эталонировании) по рельефу местности [43–63]. Если используется информация о гравитационном [64–74] или магнитном полях [75–82] – соответственно *gravity* [64, 65, 71] или *geomagnetic navigation* [77, 79]. Первоначально применение метода навигации по геофизическим полям было ограничено военными приложениями, в частности для наведения крылатых ракет и аналогичных им подвижных объектов [7, 8, 12, 38, 41, 46–50, 83–86]. Стимулом к активному применению и дальнейшему его развитию в последнее вре-

Степанов Олег Андреевич. Доктор технических наук, профессор, начальник отдела АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», Университет ИТМО (С.-Петербург). Вице-президент международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Торопов Антон Борисович. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», Университет ИТМО.

мья послужило широкое использование методов навигации вообще и метода навигации с использованием карт в различного рода автономных робототехнических системах, наземных транспортных средствах [87–93], пешеходной навигации [11, 17, 94, 95]. Применительно к таким приложениям для этого метода также нередко используется термин – *map-matching method* (метод согласования с картой) [87–89, 92, 94]. Востребованность метода навигации по ГФП в автономных подводных аппаратах связана, кроме того, с активным их внедрением и невозможностью использования спутниковых и других радиотехнических средств навигации [96–98].

Следует заметить, что, несмотря на многообразие предложенных в свое время подходов и алгоритмов для решения обсуждаемой задачи, вопрос синтеза эффективных алгоритмов и анализа их точности до сих пор остается актуальным. В связи с этим при разработке систем навигации по ГФП типа немаловажным представляется правильно учитывать опыт, накопленный при их развитии. Это и объясняет появление в последнее время ряда работ обзорного характера или содержащих такой материал [9, 11–19, 79]. Однако в зарубежных работах отсутствует описание результатов в области теории и систем навигации по ГФП, полученных советскими и российскими учеными, вклад которых, как следует из представленной библиографии, весьма значителен. С другой стороны, в российских работах не в полной мере учитываются опыт и результаты, описанные в англоязычной литературе.

Цель предлагаемой работы – опираясь на аппарат теории нелинейной фильтрации, позволяющий с единых позиций решать как задачу синтеза алгоритмов, так и задачу исследования их точности, обсудить основные этапы становления и развития алгоритмов навигации по ГФП в свете эволюции алгоритмов нелинейной фильтрации, проанализировать специфику этих алгоритмов и обсудить перспективы дальнейшего их применения.

Настоящая работа состоит из двух частей. Часть, представленная в этом номере, посвящена обзору алгоритмов и содержит 5 разделов. В разделе 1 поясняются суть и основные особенности решаемой задачи. В разделе 2 рассматривается корреляционно-экстремальный метод ее решения. В разделе 3 приводятся общая постановка задачи и ее решение в рамках теории нелинейной фильтрации. В разделе 4 обсуждаются известные алгоритмы, вытекающие из такой постановки, и анализируются их особенности. В разделе 5 рассматриваются процедуры оценки точности решения задачи навигации по ГФП. По ходу изложения приводятся простейшие примеры, позволяющие пояснить суть обсуждаемых алгоритмов.

Во второй части работы предполагается обсудить современные тенденции и сформулировать некоторые направления развития алгоритмического обеспечения, привлекаемого для решения задачи навигации по ГФП [150].

1. Суть и особенности решаемой задачи

По объему используемой информации в России принято выделять три типа систем навигации по ГФП [12, 118]. Системы первого типа характеризуются тем, что измерительная информация в текущий момент времени снимается в точке, т.е. выходной сигнал датчика поля представляет собой в каждый момент времени скалярную величину, если используется одно поле. В системах второго типа измеритель за короткий цикл сканирования формирует информацию о поле вдоль произвольных, но заранее выбранных линий. В этом случае в каждый

момент времени имеется векторное измерение. К примеру, в морских системах в качестве такого измерителя может служить многолучевой эхолот [1, 99]. И наконец, к третьему типу относятся системы, в которых рабочая информация в каждый момент времени снимается с участка поля, т.е. представляется в виде кадра или изображения [97, 98, 100–105]. В наиболее полном объеме специфика задачи навигации по ГФП проявляется применительно к системам первого типа, в которых информация поступает точечная и накапливается в процессе движения, что предопределяет протяженный во времени характер решаемой задачи. В настоящей статье речь пойдет в основном именно о системах такого типа.

Проанализируем более подробно суть и основные особенности задачи навигации подвижного объекта по ГФП. Не нарушая общности, будем полагать, что уточнению подлежат координаты подвижного объекта на плоскости в некоторой прямоугольной системе координат для случая дискретного времени. Заметим, что это ограничение не принципиально, поскольку, как правило, при решении задачи навигации по ГФП подвижный объект движется в трехмерном пространстве вдоль траекторий на постоянной высоте или глубине, информация о которых доступна и может быть учтена при решении задачи.

Итак, предположим, что на борту объекта имеются навигационная система (НС), вырабатывающая измерения его координат на плоскости $y_i^{HC} = [y_i^{(1)} \ y_i^{(2)}]^T$ в i -е моменты времени, и внешний датчик, обеспечивающий измерения некоторого геофизического поля (параметра) y_i , которые могут быть представлены в виде:

$$y_i^{HC} = X_i + \Delta y_i^{HC}, \quad (1)$$

$$y_i = \phi(X_i) + \Delta y_i, \quad (2)$$

где $X_i = [X_i^{(1)} \ X_i^{(2)}]^T$ – истинные координаты подвижного объекта в некоторой прямоугольной системе координат; $\Delta y_i^{HC} = [\Delta y_i^{(1)} \ \Delta y_i^{(2)}]^T$ – погрешности выработки координат места НС; $\phi(X_i)$ – функция векторного аргумента, с помощью которой описывается зависимость используемых параметров от координат; Δy_i – погрешность измерений датчика. Обычно информация о $\phi(X_i)$ формируется в результате предварительной съемки поля и представляется с помощью функции $\phi^k(X_i)$, определяющей карту поля и позволяющей с некоторой погрешностью Δy_i^k вычислять значения поля в произвольной точке заданного района, т.е. $\phi^k(X_i) = \phi(X_i) + \Delta y_i^k$. С учетом сказанного вместо (2) можно записать

$$y_i = \phi(X_i) + \Delta y_i = \phi^k(X_i) + \Delta y_i^\Sigma, \quad (3)$$

где $\Delta y_i^\Sigma = \Delta y_i - \Delta y_i^k$ – суммарная погрешность измерений датчика и карты поля.

Задача заключается в том, чтобы, располагая набором измерений (1), (3) при $i = 1, 2, \dots$, получить оценки погрешностей НС Δy_i^{HC} и, по возможности, текущую характеристику их точности, с использованием которых можно было бы уточнить показания НС. Иными словами, необходимо решить задачу коррекции показаний НС с использованием внешних по отношению к этой системе измерений [106].

Общая блок-схема, поясняющая суть задачи, приведена на рис. 1.



Рис. 1. Блок-схема решения задачи навигации по ГФП

Отметим основные отличительные особенности рассматриваемой задачи, порождающие сложность синтеза алгоритмов и анализа их точности при ее решении.

1. Функция $\phi^k(X_i)$ является нелинейной, причем область априорной неопределенности в знании координат места может быть такова, что не всегда удастся с необходимой точностью использовать линеаризованное представление для $\phi^k(X_i)$, получаемое путем разложения в ряд Тэйлора с отбрасыванием членов высших порядков малости. Эта функция, как отмечалось выше, формируется по данным предварительной съемки, и для решения задачи необходимо, во-первых, построить эту функцию, задаваемую в виде карты, а во-вторых, учесть наличие погрешностей не только датчика, но и карты поля.

2. Для решения задачи необходимо наличие опорной (корректируемой) НС, относительно показаний которой и выбираются данные с карты. Таким образом, рассматриваемый метод позволяет лишь уточнить показания этой системы, а определить непосредственно координаты объекта без НС возможно лишь в случае использования дополнительных данных.

3. Для накопления информации, обеспечивающей уточнение координат места, нередко необходимо движение объекта в пространстве, что приводит к протяженному по времени характеру решения задачи, и, как следствие, к необходимости учета изменчивости во времени подлежащих уточнению погрешностей НС Δy_i^{HC} и Δy_i^{Σ} .

4. Точность навигации (точность определения координат) на выбранном участке поля существенным образом зависит от длины траектории движения, изменчивости поля в ее окрестности, уровня погрешностей карты, точности датчика поля и уровня априорной неопределенности в знании текущих координат места объекта, вырабатываемых НС. Таким образом, для повышения эффективности проведения коррекции показаний НС необходимо уметь выбирать траектории, обеспечивающие решение задачи навигации с необходимой точностью. Это в свою очередь предполагает умение рассчитывать ожидаемую точность с учетом всех вышеперечисленных факторов.

2. Корреляционно-экстремальный метод решения задачи навигации по ГФП

На начальных этапах развития систем навигации по ГФП при разработке алгоритмов применялись различного рода эвристические подходы [20–23, 38]. В их основе лежало стремление подобрать такую траекторию объекта X_i , $i = 1, 2, \dots$, вдоль которой обеспечивается близость измеренных $Y_i = [y_1, \dots, y_i]^T$ и вычисленных с помощью карты $\Phi_i^k = [\phi^k(X_1), \dots, \phi^k(X_i)]^T$ профилей значений поля. С этой целью необходимо было ввести критерий, характеризующий меру близости между сопоставляемыми профилями, и решить задачу нахождения его глобального экстремума. Важно подчеркнуть, что для конкретизации задачи в такой постановке первоначально, как правило, вводилось предположение о том, что объект движется с известной и постоянной скоростью, т.е.

$$X_i = X_0 + Vt_i, \quad (4)$$

где X_0 – вектор неизвестных начальных координат объекта, V – вектор известных составляющих скорости, t_i – время с начала проведения коррекции. При этом использовались критерии:

$$J_i^1(X_0) = \sum_{j=1}^i (y_j - \tilde{\phi}_j(X_0))^2, \quad (5)$$

$$J_i^2(X_0) = \sum_{j=1}^i |y_j - \tilde{\phi}_j(X_0)|, \quad (6)$$

а оценка отыскивалась как

$$\hat{X}_0^\mu = \arg \min_{X_0 \in \Omega} J_i^\mu(X_0), \quad \mu = 1, 2, \quad (7)$$

где $\phi^k(X_i) = \phi^k(X_0 + Vt_i) = \tilde{\phi}_i(X_0)$, Ω – область поиска экстремума. Иными словами, задача сводилась к нахождению оценки начального местоположения. Помимо (5), (6), широкое распространение получил также критерий вида

$$J_i^3(X_0) = \sum_{j=1}^i y_j \tilde{\phi}_j(X_0), \quad (8)$$

точка экстремума для которого при выполнении условий $\sum_{j=1}^i (\tilde{\phi}_j(X_0))^2 \approx \text{const}$,

т.е. при малой зависимости этой величины от X_0 , совпадает с точкой экстремума (5). Факт, что критерий (8) можно трактовать, как коэффициент корреляции между измеренной и вычисленной с помощью карты реализациями поля, и определил первоначально используемое для рассматриваемого метода навигации и основанных на нем систем названия – корреляционно-экстремальный метод и корреляционно-экстремальные навигационные системы [21, 22]. Искомая оценка координат в текущий момент времени вычислялась как

$$\hat{X}_i = \hat{X}_0 + Vt_i. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что, привлекая информацию от НС в каждый момент времени, отыскание оценки траектории X_i можно заменить на отыскание погрешностей НС Δy_i^{HC} , полагая

$$s_i(\Delta y_i^{HC}) \equiv \phi^k(y_i^{HC} - \Delta y_i^{HC}) \quad (10)$$

и представляя измерения (3) в виде

$$y_i = s_i(\Delta y_i^{HC}) + \Delta y_i^{\Sigma}. \quad (11)$$

В частности, если предположить, что погрешности НС во время накопления измеренной реализации неизменны, т.е.

$$\Delta y_i^{HC} = \Delta y^{HC} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

то оценку Δy^{HC} можно найти как

$$\hat{\Delta y}_i^{HC} = \arg_{\Delta y^{HC}} \left\{ \sum_{j=1}^i (y_j - s_j(\Delta y^{HC}))^2 \right\}. \quad (13)$$

После получения $\hat{\Delta y}_i^{HC}$ искомая оценка координат X_i формируется в виде

$$\hat{X}_i = y_i^{HC} - \hat{\Delta y}_i^{HC}. \quad (14)$$

Нетрудно убедиться в том, что при выполнении предположения (4) получаемая в результате оценка (14) будет совпадать с оценкой (7) для критерия (5). Таким образом, видим, что решение задачи оценивания начального положения объекта при сделанных предположениях о характере траектории движения эквивалентно нахождению постоянной погрешности НС. Важно подчеркнуть, что предположение о движении с постоянной и известной скоростью заменяется здесь на предположение о том, что во время проведения коррекции погрешности НС неизменны во времени.

Трудность решения задачи в рамках сформулированной постановки заключается в том, что критерии типа (5), (6), (8) в общем случае являются многоэкстремальными и ее решение сводится к непростой задаче поиска глобального экстремума. Вместе с тем при выполнении определенных условий, в частности, когда при сопоставлении привлекается достаточное количество измерений поля с «малыми» погрешностями, глобальный экстремум, во-первых, располагается «в окрестности» истинного места, а во-вторых, его значение существенно превосходит по уровню локальные «ложные» экстремумы. В этой ситуации поиск экстремума упрощается и удается обеспечить необходимую точность определения координат. Применение алгоритмов корреляционного типа оказалось эффективным при использовании систем второго и, особенно, третьего типов, для которых как раз характерно достаточное количество привлекаемых в каждый момент времени измерений и не требуется накопления информации за счет движения объекта.

Иная ситуация складывается для исследуемых в настоящей работе систем первого типа, поскольку для обеспечения условий, при которых глобальный экстремум заметно превосходит по величине локальные экстремумы, принципиально важно накопление группы измерений. В связи с этим потребовалась разработка алгоритмов, с одной стороны, более эффективно использующих имеющиеся в каждый момент времени измерения, а с другой – обеспечивающих возможность учета изменчивости оцениваемых параметров. Следует также подчеркнуть, что существенный недостаток корреляционных алгоритмов заключается в трудности выработки весьма важной для навигации адекватной характеристики точности оценки, например, в традиционном виде – матрицы ковариаций ошибок оценок или среднеквадратического эллипса неопределенности координат объекта. Более того, корреляционные алгоритмы не являются рекур-

рентными. Отмеченные обстоятельства вынудили разработчиков искать новые подходы к решению рассматриваемой задачи.

3. Постановка и общее решение задачи навигации по ГФП в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации

В результате эволюции развития алгоритмов, предлагаемых для решения задачи навигации по ГФП [107–124], сформировалась ее постановка в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации, в наиболее полной мере, по мнению авторов, учитывающая специфику задачи и создающая предпосылки использования мощного арсенала алгоритмов решения задач нелинейной фильтрации. Основой для этого послужили как значительный прогресс в области развития методов линейной и нелинейной фильтрации в целом [125–129], так и появление ряда конкретных работ, посвященных построению алгоритмов нелинейной фильтрации, ориентированных на решение прикладных задач [130–137]. Можно сказать, что задача навигации по ГФП нередко служила своего рода плацдармом для отработки новых алгоритмов нелинейной фильтрации.

Сформулируем постановку задачи навигации по ГФП в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации таким образом, чтобы с ее помощью можно было бы проанализировать особенности и перспективы эволюции алгоритмов, предложенных на различных этапах развития обсуждаемых систем навигации. Сделаем это, стараясь придерживаться хронологической последовательности их появления. Не нарушая общности, рассмотрение проведем для случая дискретного времени.

Будем полагать, что для описания погрешностей Δy_i^{HC} и Δy_i^{Σ} введены два формирующих фильтра для векторных последовательностей x_i^{HC} , x_i^{Σ} с размерностями n^{HC} и n^{Σ} [106]:

$$x_i^{HC} = \Phi_i^{HC} x_{i-1}^{HC} + \Gamma_i^{HC} w_i^{HC}, \quad (15)$$

$$x_i^{\Sigma} = \Phi_i^{\Sigma} x_{i-1}^{\Sigma} + \Gamma_i^{\Sigma} w_i^{\Sigma}, \quad (16)$$

так что $\Delta y_i^{HC} = H_i^{HC} x_i^{HC}$, $\Delta y_i^{\Sigma} = H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}$. В этих соотношениях Φ_i^l , Γ_i^l , H_i^l – известные матрицы динамики, порождающих шумов и наблюдения, w_i^l – центрированные белозумные последовательности порождающих шумов размерности p^l с матрицами ковариаций Q_i^l , $l = HC, \Sigma$; v_i^{Σ} – центрированная белозумная составляющая суммарных погрешностей карты и измерителя с матрицей ковариаций R_i^{Σ} ; эти последовательности для простоты предполагаются независимыми между собой и от начальных условий.

С учетом введенных обозначений измерения (3) запишем в виде

$$y_i = \phi^k \left(y_i^{HC} - H_i^{HC} x_i^{HC} \right) + H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma} = s_i \left(H_i^{HC} x_i^{HC} \right) + H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}, \quad (17)$$

где $s_i \left(H_i^{HC} x_i^{HC} \right) = \phi^k \left(y_i^{HC} - H_i^{HC} x_i^{HC} \right)$.

Вводя составные векторы $x_i = \left[\left(x_i^{HC} \right)^T \quad \left(x_i^{\Sigma} \right)^T \right]^T$, $w_i = \left[\left(w_i^{HC} \right)^T \quad \left(w_i^{\Sigma} \right)^T \right]^T$, размерности $n = n^{HC} + n^{\Sigma}$ и $p = p^{HC} + p^{\Sigma}$ и функции $\tilde{s}_i \left(x_i^{HC} \right) = s_i \left(H_i^{HC} x_i^{HC} \right)$, $\tilde{s}_i \left(x_i \right) = \tilde{s}_i \left(x_i^{HC} \right) + H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma}$, можно записать следующие уравнения для вектора состояний и вектора измерений:

$$x_i = \Phi_i x_{i-1} + \Gamma_i w_i, \quad (18)$$

$$y_i = \tilde{s}_i(x_i) + v_i^\Sigma \quad (19)$$

где Φ_i , Γ_i и w_i , v_i формируются с учетом (15), (16). Более подробно (18), (19) запишутся следующим образом:

$$x_i^{HC} = \Phi_i^{HC} x_{i-1}^{HC} + \Gamma_i^{HC} w_i^{HC}, \quad (20)$$

$$x_i^\Sigma = \Phi_i^\Sigma x_{i-1}^\Sigma + \Gamma_i^\Sigma w_i^\Sigma, \quad (21)$$

$$y_i = \tilde{s}_i(x_i^{HC}) + H_i^\Sigma x_i^\Sigma + v_i^\Sigma. \quad (22)$$

Если, кроме того, задать плотности распределения вероятности $f(w_i^{HC})$, $f(w_i^\Sigma)$, $f(v_i^\Sigma)$, $f(x_0)$, можно сформулировать задачу нелинейной фильтрации. Ее суть заключается в получении с использованием накопленных к текущему моменту времени i измерений $Y_i = [y_1, \dots, y_i]^T$ оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки, минимизирующей традиционный для навигации критерий

$$G_i^{opt} = \iint \{ (x_i - \hat{x}_i^{opt}(Y_i))(x_i - \hat{x}_i^{opt}(Y_i))^T \} f(x_i, Y_i) dx_i dY_i, \quad (23)$$

где $f(x_i, Y_i)$ – совместная функция плотности распределения вероятности для векторов x_i и Y_i . Минимизация матрицы понимается в том смысле, что для любой произвольной оценки $\tilde{x}_i(Y_i)$ с матрицей ковариаций \tilde{G}_i выполнено неравенство $G_i^{opt} \leq \tilde{G}_i$, понимаемое как неравенство для квадратичных форм. Хорошо известно, что такая оценка представляет собой математическое ожидание для апостериорной плотности $f(x_i / Y_i)$ [122, 124, 137], т.е.

$$\hat{x}_i^{opt}(Y_i) = E_{x_i / Y_i} \{ x_i \} = \int x_i f(x_i / Y_i) dx_i. \quad (24)$$

Важно подчеркнуть, что в рамках такой постановки удастся найти не только оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку x_i , но и текущую характеристику точности в виде условной матрицы ковариаций

$$P_i^{opt}(Y_i) = E_{x_i / Y_i} \{ (x_i - \hat{x}_i^{opt}(Y_i))(x_i - \hat{x}_i^{opt}(Y_i))^T \}. \quad (25)$$

В выражениях (24) и (25) интегралы понимаются как многократные с бесконечными пределами, а E – знак математического ожидания с нижним индексом, характеризующим функцию плотности распределения вероятности, по которой оно берется. Таким образом, решение задачи сводится к вычислению многократных интегралов (24), (25). Располагая оценкой x_i , искомую оценку Δy_i^{HC} и соответствующие характеристики точности легко найти, используя соотношение $\Delta y_i^{HC} = H_i^{HC} x_i^{HC}$.

Важную роль при построении алгоритмов нелинейной фильтрации играет рекуррентное соотношение для апостериорной плотности, которое применительно к рассматриваемой задаче может быть записано в виде [122, 124, 137]

$$f(x_i / Y_i) = \frac{f(y_i / x_i) f(x_i / Y_{i-1})}{\int f(y_i / x_i) f(x_i / Y_{i-1}) dx_i}. \quad (26)$$

Здесь $f(y_i / x_i)$ – функция правдоподобия, получаемая с учетом (19) или (22), а $f(x_i / Y_{i-1})$ – плотность прогноза, для которой справедливо

$$f(x_i / Y_{i-1}) = \int f(x_i / x_{i-1}) f(x_{i-1} / Y_{i-1}) dx_{i-1}, \quad (27)$$

где $f(x_i / x_{i-1})$ – переходная плотность, вид которой определяется (18).

Как хорошо известно, решение сформулированной задачи в замкнутой форме возможно лишь в случае линейного гауссовского характера задачи, когда упомянутые выше плотности являются гауссовскими, а уравнение (22) – линейным. При таких предположениях ее решение сводится к рекуррентным соотношениям фильтра Калмана, обеспечивающим вычисление двух первых моментов апостериорной плотности, которая также является гауссовской. Во всех остальных случаях построение алгоритмов фильтрации в рамках байесовского подхода основано на использовании различного рода аппроксимаций для апостериорной плотности, позволяющих в полной мере учесть нелинейный характер задачи.

Важными представляются структура составного вектора $x_i = \begin{bmatrix} (x_i^{HC})^T & (x_i^\Sigma)^T \end{bmatrix}^T$ и тот факт, что при фиксации подвектора x_i^{HC} , $i=1, 2, \dots$, задача относительно подвектора x_i^Σ становится линейной. Принимая во внимание возможность представления плотности для составного вектора в виде

$$f(x_i / Y_i) = f(x_i^{HC} / Y_i) f(x_i^\Sigma / x_i^{HC}, Y_i), \quad (28)$$

в случае гауссовского характера плотностей $f(w_i^\Sigma)$, $f(v_i^\Sigma)$, $f(x_0^\Sigma)$ удастся построить экономичные алгоритмы нахождения оптимальных оценок и матриц ковариаций. Это объясняется тем, что плотность $f(x_i^\Sigma / x_i^{HC}, Y_i)$, как следует из (19), при фиксации подвектора x_i^{HC} , $i=1, 2, \dots$, будет гауссовской и ее параметры могут быть найдены с помощью фильтра Калмана.

Рассмотрим пример, поясняющий приведенные соотношения. Будем полагать, что погрешности НС описываются с помощью винеровских гауссовских последовательностей, измерения поля скалярные, а суммарные погрешности карты и измерителя представляют собой сумму винеровской (медленноменяющейся) составляющей и белозумной последовательности с дисперсиями r_i^2 , которые также являются гауссовскими. Иными словами, полагаем, что:

$$\begin{aligned} x_i^{HC} &= x_{i-1}^{HC} + \Gamma^{HC} w_i^{HC}, \\ x_i^\Sigma &= x_{i-1}^\Sigma + q^\Sigma w_i^\Sigma, \\ y_i &= s_i(x_i^{HC}) + x_i^\Sigma + v_i^\Sigma, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\Delta y_i^{HC} = x_i^{HC} = \begin{bmatrix} x_{i,1}^{HC} & x_{i,2}^{HC} \end{bmatrix}^T$, т.е. $H_i^{HC} = I_2$ (I_2 – единичная матрица размерности 2×2), $s_i(x_i^{HC}) \equiv \tilde{s}_i(H_i^{HC} x_i^{HC})$, $\Gamma_i^{HC} = q^{HC} I_2$, $\Delta y_i^\Sigma = x_i^\Sigma + v_i^\Sigma$, $\Phi_i^{HC} = I_2$, $\Phi_i^\Sigma = 1$, w_i^{HC} , w_i^Σ – двумерный и одномерный белые шумы с единичными дисперсиями, q^{HC} , q^Σ – положительные скалярные величины.

При конкретизации рекуррентных соотношений (26) функция правдоподобия и переходная плотность при сделанных предположениях будут иметь вид

$f(y_i / x_i) = N(y_i; s_i(x_i), r_i^2)$, $f(x_i / x_{i-1}) = N(x_i; x_{i-1}, \text{diag}\{q^{HC}, q^{HC}, q^{\Sigma}\})$, где $\text{diag}\{q^{HC}, q^{HC}, q^{\Sigma}\}$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы, указанные в скобках.

Выражение для апостериорной плотности существенно упрощается, если предположить, что погрешности НС не меняются в процессе решения задачи, а медленноменяющаяся составляющая отсутствует, т. е. $x_i^{HC} = x_{i-1}^{HC} = x^{HC}$, $x_i^{\Sigma} = 0$, $w_i^{HC} = 0$. Поскольку $x_i^{\Sigma} = 0$, то вектор состояния включает только погрешности НС, т.е. $x = x^{HC}$. Зададимся априорной функцией плотности распределения вероятности для начального значения вектора состояния. Например, будем полагать, что эта плотность гауссовская с независимыми компонентами и дисперсиями σ^2 , т. е. $f(x) = N\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}\right)$. В этом случае можно записать следующее представление для апостериорной плотности:

$$f(x / Y_i) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2}{\sigma^2} + \sum_{j=1}^i \frac{(y_j - s_j(x_1, x_2))^2}{r_j^2} \right) \right\},$$

где c – нормирующая константа. Если дополнительно предположить, что $r_i^2 = r^2$, то нетрудно установить связь оценки вида (13) с оценкой, соответствующей максимуму апостериорной плотности.

Далее проанализируем различные этапы развития алгоритмов решения задачи навигации по ГФП, их особенности и связь с алгоритмами, вытекающими из приведенной постановки.

4. Обзор алгоритмов решения задачи навигации по ГФП с позиций байесовского подхода

Первые предложения, направленные на рассмотрение задачи навигации по ГФП в рамках байесовского подхода как задачи нелинейной фильтрации, появились в 60-х – 70-х годах прошлого столетия и были связаны с алгоритмами калмановского типа [107–112]. Это вполне объяснимо, поскольку в тот период методы калмановской фильтрации получили бурное развитие вообще и применительно к задачам обработки навигационной информации в частности (см., например [138, 139]). Их достоинство заключалось в том, что на основе таких алгоритмов удавалось в рекуррентной форме не только уточнить координаты объекта, но и получить оценку всего вектора состояния, а также соответствующую ему характеристику точности в виде матрицы ковариаций ошибок его оценивания, что весьма важно в навигационных приложениях. Иными словами, создавались предпосылки для преодоления основных ограничений корреляционных методов. В связи с этим в ряде работ [107–112] было предложено использовать алгоритмы фильтрации калмановского типа, основанные на линеаризации функции $s_i(\Delta y_i^{HC})$, задаваемой выражением (10), т.е.

$$s_i(\Delta y_i^{HC}) \approx s_i(0) + \left. \frac{\partial s_i(\Delta y_i^{HC})}{\partial (\Delta y_i^{HC})^T} \right|_{\Delta y_i^{HC}=0} \Delta y_i^{HC}, \quad (30)$$

$$\text{где } s_i(0) = \phi^k(y_i^{HC}); \left. \frac{\partial s_i(\Delta y_i^{HC})}{\partial (\Delta y_i^{HC})^T} \right|_{\Delta y_i^{HC}=0} = \left. \frac{\partial \phi^k(y_i^{HC} - \Delta y_i^{HC})}{\partial (\Delta y_i^{HC})^T} \right|_{\Delta y_i^{HC}=0},$$

и

$$\tilde{y}_i = y_i - s_i(0) \approx \left. \frac{\partial s_i(\Delta y_i^{HC})}{\partial (\Delta y_i^{HC})^T} \right|_{\Delta y_i^{HC}=0} \Delta y_i^{HC} + \Delta y_i^{\Sigma}. \quad (31)$$

Такое представление наряду с предположением о гауссовском характере плотностей $f(w_i^{HC})$, $f(w_i^{\Sigma})$, $f(v_i^{\Sigma})$, $f(x_0)$ обеспечило возможность применения алгоритмов линейной калмановской фильтрации и, как следствие, учета в необходимом объеме изменчивости погрешностей НС путем выбора соответствующего формирующего фильтра (15).

Насколько известно авторам, одной из первых публикаций, касающихся алгоритмов калмановского типа в задаче навигации по ГФП, является работа [107]. В России такие алгоритмы предложены в работах [100, 108] и первоначально были названы беспойсковыми алгоритмами, что и определило название одного из этапов развития алгоритмов для систем навигации по ГФП [118]. Наряду с отмеченными выше достоинствами, связанными с учетом изменчивости погрешностей НС и рекуррентным характером вычисления оценок и их матриц ковариаций, сразу же проявился основной недостаток, порожденный расходимостью при использовании полей с существенной изменчивостью.

Для преодоления указанного недостатка были предложены две группы алгоритмов. Одна из них основана на различных модификациях фильтров калмановского типа, в частности на итерационных алгоритмах, в которых одни и те же измерения обрабатывались несколько раз при изменении точки линеаризации; фильтров второго порядка, учитывающих члены разложения второго порядка малости в (30), а также на различного рода алгоритмах, основанных на методах «статистической» линеаризации. В этих алгоритмах линейное представление формировалось путем аппроксимации нелинейной поверхности с использованием взвешивания параметров, соответствующих нескольким точкам линеаризации с помощью метода наименьших квадратов [111, 116, 120, 122, 128, 129, 139].

Применительно к рассмотренному выше примеру алгоритмы калмановского типа легко получаются, если измерения в (29) представить в виде

$$y_i \approx y_i^{KT} = H_i x_i + \bar{y}_i + v_i^{\text{don}} + v_i^{\Sigma},$$

где H_i – трехмерная матрица-строка, \bar{y}_i – известная величина, а v_i^{don} – случайная величина, характеризующая методическую ошибку, вызванную заменой нелинейных измерений (38) линейными. Применение стандартных процедур фильтра Калмана, настроенных на модель (29) и измерения $\tilde{y}_i = y_i - \bar{y}_i = H_i x_i + v_i^{\text{don}} + v_i^{\Sigma}$, позволяет найти соответствующую оценку и матрицу ковариаций.

Вид матрицы H_i , значение \bar{y}_i и статистические характеристики v_i^{don} зависят от типа используемого алгоритма калмановского типа. К примеру, при использовании обобщенного ФК будем иметь

$$H_i = \begin{bmatrix} \left. \frac{ds_i(x_i^{HC})}{dx_{i,1}^{HC}} \right|_{x_i^{HC}=\hat{x}_{i-1}^{HC}} & \left. \frac{ds_i(x_i^{HC})}{dx_{i,2}^{HC}} \right|_{x_i^{HC}=\hat{x}_{i-1}^{HC}} & 1 \end{bmatrix}, \quad v_i^{ad} = 0, \quad \bar{y}_i = s_i(\hat{x}_{i-1}^{HC}).$$

Основной недостаток алгоритмов калмановского типа заключается в том, что все они в том или ином варианте опирались на гауссовскую аппроксимацию апостериорной плотности, не позволяющую учитывать ее возможный многоэкстремальный характер. Это определило необходимость поиска алгоритмов, свободных от этого недостатка, которые и сформировали другую группу. Здесь следует указать на две весьма важные работы, посвященные методам нелинейной фильтрации [132, 133]. В одной из них предлагалось при построении алгоритмов использовать полигауссовскую аппроксимацию апостериорной плотности (аппроксимацию с помощью гауссовских сумм – Gaussian sum approximation), основанную на представлении вида [133]

$$f(x_i / Y_i) \approx \sum_{j=1}^L \mu_i^j N(x_i; \hat{x}_i^j, P_i^j), \quad (32)$$

где μ_i^j – веса, такие что $\sum_{j=1}^L \mu_i^j = 1$, а $N(x_i; \hat{x}_i^j, P_i^j)$ – частные гауссовские плотности, параметры которых могут быть сформированы с использованием набора фильтров Калмана размерности $n = n^{HC} + n^{\Sigma}$ с соответствующими точками линеаризации. Из (32) вытекают достаточно простые соотношения для искомых оценок и матриц ковариаций (24), (25):

$$\hat{x}_i^{opt}(Y_i) \approx \hat{x}_i(Y_i) = \sum_{j=1}^L \mu_i^j \hat{x}_i^j, \quad P_i(Y_i) \approx \sum_{j=1}^L \mu_i^j (\hat{x}_i^j (\hat{x}_i^j)^T + P_i^j) - \hat{x}_i(Y_i) \hat{x}_i^T(Y_i). \quad (33)$$

Аппроксимация (32) оказалась весьма подходящей для построения алгоритмов решения задачи навигации по ГФП в представленной постановке, особенность которой заключалась в том, что ее нелинейность обусловлена лишь нелинейным характером измерений. Выбирая в области априорной неопределенности несколько точек линеаризации, нетрудно получить представление (32). Различные варианты алгоритмов, основанных на аппроксимации (32), были предложены для решения задачи навигации по ГФП [43, 45, 110, 115–117, 120, 122]. В частности, алгоритм такого типа в работе [115] получил наименование фильтра Калмана с многократной линеаризацией, в полной мере отражающее основную его идею.

Трудность реализации алгоритмов, вытекающих из (32), заключается в том, что при обработке очередного измерения и представлении функции правдоподобия в виде, аналогичном (32), число слагаемых, как вытекает из (26), на каждом шаге может возрастать [122]. Поэтому для их ограничения предлагались различные приемы, основанные, например, на периодической замене суммы (32) гауссовской плотностью. В частности, на этой идее основан так называемый пульсирующий фильтр [120, 122].

Развитие также получили различного рода комбинированные алгоритмы, сочетающие в себе возможности, основанные на аппроксимациях (32), например алгоритм, в котором используются два режима: захвата и сопровождения. На этапе захвата при большом уровне неопределенности используется несколько фильтров, при этом имеется возможность более грубого описания поведения вектора оцениваемых параметров с помощью квазидетерминированных моделей, что в свою очередь позволяет снизить размерность каждого из фильтров

Калмана. При существенном снижении неопределенности алгоритм переходит в режим сопровождения. При этом возможно использование уже одного фильтра более высокой размерности для адекватного учета изменчивости оцениваемых погрешностей, основанного на линеаризованном представлении измерений. В ряде случаев на этапе захвата использовался корреляционный алгоритм [1, 124]. Еще одна модификация комбинированного алгоритма основана на использовании идеи группирования измерений [140]. В этом случае с помощью нелинейного алгоритма по ограниченному набору измерений вырабатываются оценки погрешностей НС в предположении их неизменности, которые поступают затем в линейный фильтр Калмана, в полном объеме учитывающий изменчивость погрешностей НС [122].

Другая основополагающая работа в области построения алгоритмов нелинейной фильтрации, востребованная при синтезе алгоритмов для задачи навигации по ГФП, опиралась на аппроксимацию плотности в виде [132]

$$f(x_i / Y_i) \approx \sum_{j=1}^L \mu_i^j \delta(x_i - x_i^j), \quad \sum_{j=1}^L \mu_i^j = 1 \quad (34)$$

и вытекающие из нее соотношения для оценки и матрицы ковариаций:

$$\hat{x}_i^{opt}(Y_i) \approx \hat{x}_i(Y_i) = \sum_{j=1}^L \mu_i^j x_i^j, \quad P_i^{opt}(Y_i) \approx P_i(Y_i) = \sum_{j=1}^L \mu_i^j (x_i^j (x_i^j)^T) - \hat{x}_i(Y_i) \hat{x}_i^T(Y_i), \quad (35)$$

где $\delta(x_i - x_i^j)$ – дельта-функции в узлах сетки x_i^j . Алгоритм (35), основанный на представлении (34), получил наименование метода (фильтра) точечных масс (point mass filter) [132] или метода сеток [122] и, в сущности, сводится к методу прямоугольников при вычислении многократных интегралов (24), (25). К примеру, в простейшем случае, когда вектор $x_i = \left((x_i^{HC})^T, (x_i^{\Sigma})^T \right)^T = x$ в (18) неизменен, веса при использовании метода точечных масс могут быть найдены согласно выражениям:

$$\mu_i^j = \frac{\tilde{\mu}_i^j}{\sum_{j=1}^L \tilde{\mu}_i^j}, \quad \tilde{\mu}_i^j = f(y_i / x_i^j) \tilde{\mu}_{i-1}^j, \quad \tilde{\mu}_{i-1}^j = f(Y_{i-1} / x_i^j), \quad \tilde{\mu}_0^j = f(x_i^j), \quad (36)$$

где $f(y_i / x_i^j) = N(y_i; s_i(x_i^{HCj}) + H_i^{\Sigma}(x_i^{\Sigma})^j, R^{\Sigma})$. При изменчивости подвектора x_i при вычислении весов вместо (36) требуется использовать соотношения:

$$\tilde{\mu}_i^j = f(y_i / x_i^j) \tilde{\mu}_{i,i-1}^j, \quad \tilde{\mu}_{i,i-1}^j = \sum_{k=1}^L \mu_{i-1}^k g_i^{jk}, \quad g_i^{jk} = \frac{f(x_i^j / x_{i-1}^k)}{\sum_{j=1}^L f(x_i^j / x_{i-1}^k)},$$

из которых следует, что для вычисления весов необходимо выполнять двойное суммирование, а это существенно увеличивает объем вычислений. Вопросы применения метода точечных масс в задаче навигации по ГФП обсуждаются, в частности, в работах [122, 124].

Несмотря на различные ухищрения, алгоритмы, основанные на аппроксимации (32), не всегда обеспечивали эффективную работу при значительных уровнях априорной неопределенности. В ряде случаев фильтры сходились к одному фильтру, причем нередко в точку, которая не соответствует истинному значению вектора состояния. Использование же напрямую аппроксимации (34) при-

водило к значительному объему вычислений. Таким образом, необходимость совершенствования алгоритмов сохранялась. И здесь весьма продуктивной оказалась возможность упрощения алгоритмов за счет учета представления плотности в виде (28). Теоретической основой появления такого рода алгоритмов в системах навигации по ГФП также послужили работы в области нелинейной фильтрации [130, 131, 134]. Из выражения (28), как уже отмечалось, следует, что при фиксации подвектора x_i^{HC} задача сводится к линейной. Если теперь предположить, что погрешности НС носят квазидетерминированный характер, т.е. когда в (20) отсутствуют порождающие шумы, то тогда можно воспользоваться идеями, предложенными в этих работах. Поясним это на примере, когда погрешности НС постоянны во времени, т.е. $\Delta y_i^{HC} = x_i^{HC} = x_{i-1}^{HC} = x^{HC}$. В этом случае, используя аппроксимацию (34) для подвектора x^{HC}

$$f(x^{HC} / Y_i) \approx \sum_{j=1}^L \mu_i^j \delta(x^{HC} - x^{HCj}), \quad (37)$$

с учетом (28) можем записать [122]

$$f(x_i / Y_i) \approx \sum_{j=1}^L \mu_i^j f(x_i^\Sigma / x^{HCj}, Y_i) \delta(x^{HC} - x^{HCj}). \quad (38)$$

Заметим, что при гауссовском характере плотностей $f(w_i^\Sigma)$, $f(v_i^\Sigma)$, $f(x_0^\Sigma)$ плотности

$$f(x_i^\Sigma / x^{HCj}, Y_i) = N(x_i^\Sigma, \hat{x}_i^\Sigma(x^{HCj}, Y_i), P_i^\Sigma(x^{HCj})), \quad (39)$$

при разных $j = 1, \dots, L$ также будут гауссовскими с параметрами $\hat{x}_i^\Sigma(x^{HCj}, Y_i)$ и $P_i^\Sigma(x^{HCj})$. Таким образом, эти параметры легко могут быть найдены с помощью набора (банка) рекуррентных соотношений для фильтров Калмана по измерениям $\tilde{y}_i^j = y_i - s_i(x^{HCj}) = H_i^\Sigma x_i^\Sigma + v_i$, размерность которых равна n^Σ . Располагая $\hat{x}_i^\Sigma(x^{HCj}, Y_i)$ и $P_i^\Sigma(x^{HCj})$, можно получить рекуррентные выражения и для весов. В работах [131, 134] метод, основанный на представлении (38), (39), был назван методом разделения.

Проиллюстрируем сказанное на примере модели (29). В этом случае при отсутствии порождающих шумов для подвектора x_i^{HC} для реализации обсуждаемого алгоритма потребуется банк одномерных фильтров Калмана вида

$$\hat{x}_i^\Sigma(x^{HCj}, Y_i) = \hat{x}_{i-1}^\Sigma(x^{HCj}, Y_{i-1}) + K_i(\tilde{y}_i^j - \hat{x}_{i-1}^\Sigma(x^{HCj}, Y_{i-1})),$$

$$K_i = \frac{P_i^\Sigma(x^{HCj})}{r_i^2}, P_i^\Sigma(x^{HCj}) = \frac{r_i^2 P_{i|i-1}^\Sigma(x^{HCj})}{P_{i|i-1}^\Sigma(x^{HCj}) + r_i^2}, P_{i|i-1}^\Sigma(x^{HCj}) = P_{i-1}^\Sigma(x^{HCj}) + (q^\Sigma)^2.$$

При этом для весов будет справедливо рекуррентное соотношение

$$\tilde{\mu}_i^j = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y_i - s_i(x^{HCj}) - \hat{x}_{i-1}^\Sigma(x^{HCj}, Y_{i-1}))^2}{r_i^2 + P_{i|i-1}^\Sigma(x^{HCj})} \right\} \tilde{\mu}_{i-1}^j. \quad (40)$$

Применительно к задачам навигации по ГФП алгоритмы такого рода первоначально были предложены и обоснованы с позиций теории статистических

решений в работах И. Н. Белоглазова и получили наименование рекуррентно-поисковых алгоритмов [135]. Хотя они и были сразу же ориентированы именно на использование в задаче навигации по ГФП, но носили достаточно общий характер.

В англоязычной литературе одна из первых работ, в которой применительно к задаче навигации по ГФП был описан алгоритм подобного рода, как раз касается частного случая постоянных погрешностей НС, суммарной погрешности карты и измерителя в виде суммы винеровской последовательности (random walk) и дискретного белого шума [46].

Следует заметить, что при построении алгоритмов на основе аппроксимации (34) наряду с методом точечных масс стали получать применение и алгоритмы, основанные на методе Монте-Карло [141]. Первые предложения, касающиеся применения метода Монте-Карло в задаче навигации по ГФП появились практически сразу с предложениями по использованию метода точечных масс [122, 124, 148]. Эти методы основаны на аппроксимации плотности с помощью соотношения (34), в котором x_i^j , $j = \overline{1, L}$, – набор реализаций некоторых независимых случайных векторов. В частности, при использовании простейшего метода Монте-Карло при неизменном векторе состояния $x_i = \left((x_i^{HC})^T, (x_i^{\Sigma})^T \right)^T = x$ веса

определяются в виде (36), однако узлы x^j формируются путем моделирования в соответствии с априорной плотностью $f(x)$, а выражение для весов в начальный момент времени определяется как $\tilde{\mu}_0^j = 1/L$ [122, 124]. При использовании простейшего метода Монте-Карло при изменчивом векторе x_i соотношения для весов не изменяются, а отличие будет заключаться в том, что выборка x_i^j , $j = \overline{1, L}$, будет формироваться на каждом шаге в соответствии с плотностью $f(x_i / x_{i-1} = x_{i-1}^j)$.

В 90-х годах сформировался устойчивый взгляд на обсуждаемую задачу, как задачу нелинейной фильтрации [120–124]. Новые предложения, посвященные различным вариантам построения алгоритмов, в полной мере отражали тенденции, проявляющиеся в области построения алгоритмов нелинейной фильтрации. Эти тенденции и обсуждаются во второй части статьи [150].

5. Анализ точности в задаче навигации по ГФП

Рассмотрение задачи в рамках байесовского подхода, как отмечалось выше, создает предпосылки получения потенциальной точности, которая количественно определяется элементами безусловной матрицы ковариаций для оптимальной оценки (23). Эта матрица может быть вычислена с использованием метода статистических испытаний с помощью соотношения

$$\tilde{G}_i^a \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (x_i^j - \tilde{x}_i^j(Y_i^j))(x_i^j - \tilde{x}_i^j(Y_i^j))^T, \quad (41)$$

в котором x_i^j , Y_i^j – полученные путем моделирования с использованием (18), (19) j -е реализации ($j = \overline{1, L}$) оцениваемой последовательности и соответствующих ей измерений; $\tilde{x}_i^j(Y_i^j)$ – оценка, вычисленная с помощью исследуемого алгоритма. Под оптимальным алгоритмом понимается вычислительная проце-

дура, для которой, во-первых, может быть оценена вычислительная погрешность нахождения интегралов (24) и (25), а во-вторых, существует принципиальная возможность сделать эту погрешность сколь угодно малой [142]. В тех случаях, когда не удастся реализовать процедуру вычисления оптимальной оценки, анализ эффективности разрабатываемых алгоритмов осуществляют путем сопоставления соответствующих им характеристик точности.

Заметим, что для безусловной матрицы ковариаций (23) справедливо также выражение $G_i^{opt} = \int P_i^{opt}(Y_i) f(Y_i) dY_i$. Отсюда следует, что при реализации метода статистических испытаний эта матрица может быть также вычислена с помощью соотношения

$$\tilde{G}_i^b \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \tilde{P}_i^j(Y_i^j), \quad (42)$$

где $\tilde{P}_i^j(Y_i^j)$ – формируемая в исследуемом алгоритме расчетная матрица ковариаций ошибок оценивания x_i^j . Совпадение \tilde{G}_i^a и \tilde{G}_i^b подтверждает непротиворечивость получаемых результатов.

Принимая во внимание тот факт, что описанные процедуры требуют значительного объема вычислений, при анализе точности в задаче навигации по ГФП часто привлекают неравенство Рао – Крамера [2, 119, 122–124]. Как известно, с помощью этого неравенства удастся, опираясь лишь на используемую модель для решаемой задачи фильтрации, установить теоретическую нижнюю границу точности оценивания искомых параметров. При этом не требуется реализация процедур вычисления самой оценки. Заметим, что специалистам хорошо известно неравенство Рао – Крамера применительно к задаче оценивания случайных параметров, формулируемой в рамках небайесовского подхода [143–148]. Здесь же необходимо использовать модифицированную версию этого неравенства для случайных параметров, предложенную в работе [143]. Для модели (18), (19) один из вариантов этого неравенства можно записать в виде

$$E_{x_i, Y_i} \left[(x_i - \tilde{x}_i(Y_i))(x_i - \tilde{x}_i(Y_i))^T \right] \geq J_i^{-1}, \quad (43)$$

где J_i определяется как

$$J_i = E_{x_i, Y_i} \left[\frac{d \ln f(x_i, Y_i)}{dx_i} \left(\frac{d \ln f(x_i, Y_i)}{dx_i} \right)^T \right]. \quad (44)$$

При рассмотрении задач нелинейной фильтрации вопросам вычисления границ точности всегда уделялось значительное внимание и в этой области получен ряд важных результатов, которые и были востребованы разработчиками алгоритмов решения задач навигации по ГФП. Следует особо обратить внимание, что в 2007 году вышла оригинальная книга, в которой представлены основные результаты, касающиеся процедур нахождения нижней границы по Рао – Крамеру в задачах нелинейной фильтрации [147]. При получении этих процедур применительно к сформулированной выше задаче нелинейной фильтрации обычно вводят расширенный вектор $\mathbf{X}_i = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_i^T]^T$, находят матрицу, аналогичную (44) для этого вектора, т.е.

$$\mathbf{J}_i = E_{\tilde{x}_i, Y_i} \left[\frac{d \ln f(\mathbf{X}_i, Y_i)}{d\mathbf{X}_i} \left(\frac{d \ln f(\mathbf{X}_i, Y_i)}{d\mathbf{X}_i} \right)^T \right], \quad (45)$$

и затем получают рекуррентную процедуру вычисления нижнего диагонального блока для матрицы, обратной матрице (45) [143–146].

Вопросы использования неравенства Рао – Крамера в задаче навигации по ГФП обсуждаются, в частности, в работах [1, 2, 4, 13, 18, 119, 121–124, 148].

Поясним процедуру вычисления нижней границы точности для задачи оценивания (29) в предположении, что подвектор x_i^{HC} не меняется, т.е. $x_i^{HC} = x_{i-1}^{HC} = x = [x_1 \ x_2]^T$, $x_i^\Sigma = 0$, дисперсии погрешностей измерений постоянны $r_i = r_{i-1} = r$, а априорные функции плотности вектора состояния и шумов являются гауссовскими. В этом случае матрица (44) определяется в виде

$$J_i = P_x^{-1} + \frac{1}{r^2} \int \left[\frac{dS_i^T(x)}{dx} \frac{dS_i(x)}{dx^T} \right] f(x) dx, \quad (46)$$

где $S_i(x) = [s_1(x) \ \dots \ s_i(x)]^T$, P_x – априорная матрица ковариаций для вектора состояния; $\frac{dS_i^T(x)}{dx}$ – производная от векторной функции векторного аргумента

[106]. Входящие в (46) интегралы $\int \frac{\partial s_j(x)}{\partial x_l} \frac{\partial s_j(x)}{\partial x_m} f(x) dx$, $j = 1, 2, \dots$; $l, m = \overline{1, 2}$,

могут быть найдены с использованием методов Монте-Карло по формуле $\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \left. \frac{\partial s_j(x)}{\partial x_l} \right|_{x=x^k} \left. \frac{\partial s_j(x)}{\partial x_m} \right|_{x=x^k}$, где L – число реализаций, $x^k \sim f(x)$, $k = \overline{1..L}$. Располагая этими данными, нижнюю границу точности можно найти путем обращения матрицы J_i .

Нетрудно заметить, что вместо (46) можно использовать удобное рекуррентное соотношение вида

$$J_i = J_{i-1} + \frac{1}{r^2} \int \left[\frac{ds_i(x)}{dx} \frac{ds_i(x)}{dx^T} \right] f(x) dx, \quad (47)$$

где $J_0 = P_x^{-1}$.

При использовании неравенства Рао – Крамера следует помнить, что с его помощью удастся находить лишь теоретическую границу, которая вовсе не обязана достигаться с использованием оптимального алгоритма. В то же время с помощью неравенства Рао – Крамера, удастся легко выявлять участки поля, на которых не может быть получена ожидаемая точность навигации, что весьма важно при выборе траекторий, рекомендуемых для проведения коррекции показаний НС [37, 122].

Важно также иметь в виду, что диагональные элементы матриц, определяющих потенциальную точность (41), (42) и нижнюю границу по Рао – Крамеру J_i^{-1} , соответствуют дисперсиям. В случае же негауссовского характера апостериорной плотности дисперсии не являются исчерпывающей характеристикой точности. В этой ситуации целесообразно наряду с (41), (42) привлекать и другие характеристики точности [121]. Такие характеристики могут быть получены, если по результатам метода статистических испытаний не ограничиваться вычислением дисперсий, а строить гистограмму ошибок оценивания, например, как это сделано в работе [149].

Заключение

Задача навигации по ГФП является одной из самых сложных задач, с которыми приходится сталкиваться при обработке навигационной информации. По мнению авторов, наиболее эффективным подходом к ее решению оказался байесовский подход, в рамках которого удастся сформулировать постановку задачи нелинейной фильтрации, учитывающую все ее специфические особенности, в частности, нелинейный и протяженный во времени характер. В первой из запланированных двух частей работы приведена соответствующая постановка и на этой основе представлен обзор алгоритмов. Показано, что повышение эффективности разрабатываемых алгоритмов в полной мере связано с прогрессом в области разработки методов нелинейной фильтрации.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда
(проект No14-29-00160).*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nygren I.** Terrain Navigation for Vehicles : Dissertation / I. Nygren - Sweden: Stockholm Royal Institute of Technology. - 2005. - 270 P.
2. **Karlsson R.** Bayesian Surface and underwater Navigation/ R. Karlsson F. Gustafsson// IEEE Transactions on Signal Processing. - 2006. - Vol 54. - P. 4204-4213.
3. **Бердышев В.И., Костоусов В.Б.** Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. - Екатеринбург: УрО РАН. - 2007. - 270 с.
4. **Teixeira F.** Terrain-Aided Navigation and Geophysical Navigation of Autonomous Underwater Vehicles : PhD thesis Instituto Superior Tecnico Universidade Tecnica de Lisboa. - 2007. - 177 P.
5. **Richeson J. A.** Gravity gradiometer aided inertial navigation within non-GNSS environments: Dissertations. - USA Washington: University of Maryland. - 2008. - 438 P.
6. **Антюфеев В. И., Быков В.Н., Гричанюк А.М., Краюшкин В.А., Гахов Р.П.** Применение принципов радиометрии в корреляционно-экстремальных системах навигации летательных аппаратов. - М.: Физматлит. - 2009. - 352 с.
7. **Веремеенко К.К., Желтов С.Ю., Ким Н.В., Себряков Г.Г., Красильщиков М.Н.** Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов / Под ред. М.Н. Красильщикова Г.Г. Серебрякова. - М.:Физматлит 2009. - 556 С.
8. **Сырямкин В.И., Шидловский В.С.** Корреляционно-экстремальные радионавигационные системы. Томск: Изд. Томского университета. - 2010. - 317 с.
9. **Carreno S.** A survey on terrain based navigation for AUVs. / S. Carreno P.A. Wilson P. Ridao Y. Petillot//In OCEANS 2010 MTS/IEEE. - 2010.
10. **Павлов Б.В., Волковицкий А.К., Каршаков Е.В.** Низкочастотная электромагнитная система относительной навигации и ориентации//Тирскопия и навигация.- 2010. - № 1(68). - С. 3-15.
11. **Afzal M.H.** Use of Earth's Magnetic Field for Pedestrian Navigation : Dissertation / M .H. Afzal. - Canada: University of Calgary 2011. - P. 247.
12. **Щербинин В.В.** Построение инвариантных корреляционно-экстремальных систем навигации и наведения летательных аппаратов. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2011. - 220 с.
13. **Meduna D. K.** Terrain relative navigation for sensor-limited systems with application to underwater vehicles : Dissertation / D. K. Meduna. - USA: Stanford University. - 2011. - 183 P.
14. **Белоглазов И.Н., Казарин С.Н., Косьянчук В. В.** Обработка информации в иконических системах навигации наведения и дистанционного зондирования местности. - М.: Физматлит. - 2012. - 368 с.
15. **Shockley J.A.** Ground Vehicle Navigation Using Magnetic Field Variation : PhD thesis Air Force Institute of Technology Ohio 2012 P. 186.
16. **Клюева С.Ф., Завьялов В.В.** Синтез алгоритмов батиметрических систем навигации. - Владивосток : Мор. гос. ун-т 2013. - 132 с
17. **Davidson P.** Algorithm for Autonomous Personal Navigation Systems : Dissertation / P. Davidson. - Finland: Tampere University of Technology. - 2013. - 95 P.

18. **Торопов А.Б.** Алгоритмы фильтрации в задачах коррекции показаний морской навигационной системы с использованием нелинейных измерений. Дисс.на соиск. уч. степени канд. техн. наук - СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон» 2013. - 147 с.
19. **Джанджгава Г.И., Герасимов Г.И., Августов Л.И.** Навигация и наведение по пространственным геофизическим полям// Известия ЮФУ. Технические науки. - № 3 (140) / 2013. - С. 74-83
20. **Медведев Г.А., Тарасенко В.П.** Вероятностные методы исследования экстремальных систем. - М.: Наука 1967.
21. **Козубовский С.Ф.** Корреляционно-экстремальные системы: Справочник. -- Киев: Наукова думка 1973. - 224 с.
22. **Белоглазов И.Н., Тарасенко В.П.** Корреляционно-экстремальные системы. - М.: Сов. радио 1974. - 392 с.
23. **Алексеев В.И., Кориков А.М., Полонников Р.И., Тарасенко В.П.** Экстремальная радионавигация /Под ред. Р.И. Полонникова и В.П. Тарасенко. - М.: Наука 1978. - 279 с.
24. **Чигин Г.П.** Моделирование оптимальной корреляционной системы. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика 1978 № 2. С. 182-192.
25. **Ржевкин В.А.** Автономная навигация по картам местности // Зарубежная радиоэлектроника. 1981. №10. с.3-28.
26. **Силаев А.И., Стефанов В.А., Чигин Г.П.** Комбинированный алгоритм оценивания в корреляционно-экстремальных навигационных системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1984. - №6. - С. 12-16.
27. **Баклицкий В.К., Бочкарев А.В., Мусьянков М.П.** Методы фильтрации сигналов в корреляционно-экстремальных системах. - М.: Радио и связь 1986. - 216 с.
28. **Щербатюк А. Ф.** Бесписковые корреляционно-экстремальные алгоритмы коррекции местоположения объекта по изолинии поля рельефа // Сб. коррекция в навигационных системах и системах ориентации ИСЗ. - М: Изд. МГУ. - 1986. - С. 40-48.
29. **Буймов А. Г.** Корреляционно-экстремальная обработка изображений. - Томск: Изд. Томского университета 1987.
30. **Чигин, Г.П.** Использование поля линейных ориентиров в задачах экстремальной навигации // Известия Академии наук. Теория и системы управления. - 1998. - №2. - С. 161-172.
31. **Солунин В.Л., Гурский Б.Г., Спирин Э.П.** Корреляционно-экстремальные системы для высокоточной навигации летательных аппаратов и компьютерной диагностики сложных колебаний // Гироскопия и навигация. – 2005. - № 2. - С. 56 - 61.
32. **Косяченко С.А., Наумов А.И.** Алгоритмы поиска глобального экстремума функционала поискового алгоритма корреляционно-экстремальной навигационной системы при одновременном оценивании координатных и скоростных ошибок. // Материалы X КМУ "Навигация и управление движением". - 2008. - С. 395-402.
33. **Белоглазов И.Н., Казарин С.Н., Меркулов В.А., Наумов А.И.** Оценка точности эталонной информации для рельефометрической корреляционно-экстремальной навигационной системы // Информационно-измерительные и управляющие системы. - 2010. - Т. 8. № 4. С. 9-14.
34. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Использование последовательных методов Монте-Карло в задаче корреляционно-экстремальной навигации // Изв. вузов. Приборостроение. - 2010. - Т. 53, № 10. - С. 49-54.
35. **Щербинин В.В., Шевцова Е.В., Васильева Ю. С., Чижевская О. М.** Методы и алгоритмы функционирования цветной оптической корреляционно-экстремальной системы навигации летательных аппаратов// Гироскопия и навигация. 2012. № 4 (79). С. 34-49.
36. **Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Мойланен Е.В., Павлов Б.В.** Комплексирование магнитоградиентной корреляционно-экстремальной и инерциальной навигационных систем // XIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон»», 2012. - С.169-171.
37. **Степанов, О.А., Соколов, А.В., Торопов, А.Б., Васильев, В.А., Краснов А.А.** Выбор информативных траекторий в задаче корреляционно-экстремальной навигации с учетом погрешностей карты и измерителей // Сб. материалов XXIX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н.Острякова. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон»», 2014. - С. 217-225.
38. **Миллер, Р.** Корреляционная радиоэлектронная система для самолетов и космических кораблей // Электроника. - 1961. - № 50 (русский перевод).
39. **Hinrichs, R.** Advance terrain correlation techniques./R. Hinrichs//IEEE. PLAN'S-76.-1976. P 76-89.
40. **Hessel A.** Precision navigation updating by means of digital area correlation/ A. Hessel W. Eckle // Journal of Navigation. - Vol. 30 № 2. - 1977. Pp. 296 – 306.

41. **Reed C.G.** Range correlation guidance for cruise missiles/ C.G. Reed J. Hogan // IEEE Trans. Aerospace and Electr. Sys. - Vol. AES-15 № 4. - 1979. P. 547-555.
42. **E P. Bialecke and R C. Lewis.** A digital terrain correlation system for tactical aircraft " Proceedings of the IEEE /AIAA S t h Digital Avionics Systems Conference. Oct. 31 - Sov. 3 1983.
43. **Boozer D. D.** Terrain Aided Navigation Test Results in the AFIT/F-16 Aircraft./ D. D. Boozer J.R. Fellerhoff// Navigation. - 1988. - Vol. 35 N2. - P. 161-175.
44. **Lux, D. and Eibert D.M.** ISS-A combined terrain topography reference navigation system// IEEE, PLAN'S-90. 1990. pp. 470-473.
45. **Boozer D.D.** Terrain Referenced Navigation. / D.D. Boozer// Aerospace Navigation Systems. - 1995. P. - 152-157.
46. **Hollowell J.** HELI/SITAN. A Terrain Referenced Navigation Algorithm for Helicopters./ J. Hollowell// IEEE PLAN'S-90 - 1990. P. 616-625.
47. **Henley A.J.** Terrain aided navigation - current status techniques for flat terrain and reference data requirements/ A.J. Henley// IEEE PLAN'S-90 1990. - P. 608-615.
48. **Priestley N.** Terrain referenced navigation/ N. Priestley // PLAN'S-90. - 1990. - P 482-489.
49. **Snyder F.B.** Terrain aided altitude computations on the AFTI/F-16/ F.B. Snyder C.A. Baird L.M. Beierle// PLAN'S-90. - 1990. - P. 474-481.
50. **Johnson N.** Terrain Aided Navigation Using Maximum A Posteriori Estimation/ N. Johnson W. Tang G. Howell// PLAN'S-90. -1990. Pp. 464 - 469.
51. **Bar-Gill A., Ben-Ezra P., Bar-Itzhack I.Y.** Improvement of Terrain-Aided Navigation via Trajectory Optimization// IEEE Trans on Control Systems Technology Vol. 2 No. 4 December 1994 pp 336-342.
52. **Enns R., Morrell D.** Terrain-Aided Navigation Using the Viterbi Algorithm // Journal of Guidance Control and Dynamics Vol. 18 No. 6 Nov-Dec 1995 pp 1444-1449.
53. **Massa D.E.** Terrain-Relative Navigation for Autonomous Underwater Vehicles : Dissertation. USA - Massachusetts Institute of Technology. - 1997. - 147 P.
54. **Bachmann A.** Terrain aided Underwater Navigation - a Deeper Insight into Generic Monte Carlo Localization. / A. Bachmann S. B. Williams// Australian Conference on Robotics and Automation 2003 (ACRA) 2003. Pp. 1-7.
55. **Metzger J.** Covariance Estimation for Terrain Referenced Navigation with a Comparison Technique / J. Metzger O. Meister G.F. Trömmel// Proceeding of the ION 60th Annual Meeting 2004 p. 571-580.
56. **Campbell J.** Terrain Referenced Navigation using Airborne LAsER SCanner (ALASCA): Preliminary Flight Test Results/ J. Campbell M. Uijt de Haag F. Van Graas// Proceedings of the 60-th Annual Meeting of The Institute of Navigation. - 2004. P. 671-678.
57. **Metzger J.** Acquisition and Tracking Improvement by an Enhanced Comparison Based Terrain Referenced Navigation Method. /J. Metzger G.F. Trömmel P. Kreutz B.Taddiken// Proceeding of the ION 61th Annual Meeting June 27-29 2005. Pp. 970 - 975.
58. **Carlstrom J.** Terrain Navigation of the Swedish AUV62f Vehicle/ J. Carlstrom I. Nygren. // International Symposium on UUST05 Durham - 2005. [электронный ресурс] : www.ee.kth.se/php/modules/publications/reports/2005/IR-S3-SB-0560.pdf
59. **Oliveira P.** MMAE Terrain Reference Navigation for Underwater Vehicles using Eigen Analysis/ P. Oliveira//Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference 2005. pp. 5468-5473
60. **Meduna D.K.** AUV Terrain relative navigation Using Coarse Maps/ D.K. Meduna S.M. Rock R. McEwen //In Unmanned Untethered Submersible Technology Conference. - 2009. - P. 11.
61. **Morice C.** Terrain Referencing for Autonomous Navigation of Underwater Vehicles/ C. Morice S. Veres S. McPhail// In Oceans 2009 2009. Pp. 1-7.
62. **Leines M.T.** Terrain Referenced Navigation Using SIFT Features in LiDAR Range-Based Data. / M. T. Leines, J. F. Raquet //Proceedings of the Institute of Navigation 2015 International Technical Meeting. - 2015. - P. 239-250
63. **Nordlund P.-J.** Recursive estimation of three-dimensional aircraft position using terrain-aided positioning/ P.-J. Nordlund F. Gustafsson // IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing. - 2002. - Pp. 1121-1124.
64. **May M. B.** Gravity Navigation./M.B. May// IEEE PLAN'S-78. - 1978. - P. 212-218.
65. **D'Appolito J.A., Griffiths B.E., Healy R.D.** Gravity navigation performance analysis using the optimal linear correlation technique. IEEE PLAN'S-80 1980. 101-105
66. **Андреев В.Д., Иванищева Е.И., Попов Е.И.** К теории гравиинерциальных систем //Приборы и методы обработки гравиинерциальных измерений. - 1984. - С. 98-109.
67. **Gleason D.M.** Passive Airborne Navigation and Terrain Avoidance Using Gravity Gradiometry//Journal of Guidance Control and Dynamics/ D.M. Gleason// - 1995. - N 6 - P. 1450-1458.

68. **Lowrey III. J.** Passive Navigation using Inertial Navigational Sensors and Maps. / III. J Lowrey J.C. Shellenbarger // Naval Engineerins Journal. - 1997. Pp. 245–249.
69. **Moryl J.** The Universal Gravity Module for Enhanced Submarine Navigation./ J. Moryl H. Rice S. Shinnars // IEEE - 1998. P. 324-331.
70. **Timney Ti. E** Bounding the Errors of the Marine Inertial Navigator by Employing an Array of Algorithms Encompassed in the Triad Passive Navigation (TPN) Software/ Ti.E. Timney R. E. Mayhall III J. Lowrey// Proceeding of Position Location and Navigation Symposium. - 2000. Pp. 193-200.
71. **Wang F.** Observability Analysis and Simulation of Passive Gravity Navigation System/ F. Wang X. Wen D. Sheng// Journal of Computers. - Vol. 8 No 1. - 2013. P - 248-255.
72. **Смоллер Ю.Л.** Использование аэрогравиметра GT2A в полярных областях / Ю. Л. Смоллер и др.// Межд. симпозиум «Наземная морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях». – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2013.
73. **Краснов А.А., Соколов А.В., Элинсон Л.С.** Новый аэроморской гравиметр серии «Чекан» // Гироскопия и навигация. - 2014. - № 1. - С. 26-34.
74. **Пешехонов В.Г., Соколов А.В., Элинсон Л.С., Краснов А.А.** Результаты разработки и испытаний нового аэроморского гравиметра // XXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. - 2015. - С. 173-179.
75. **Михлин Б.З., Селезнев В.П., Селезнев А.В.** Геомагнитная навигация. - М.: Машиностроение. - 1976.
76. **Гурьев И.С.** Адаптивные магнитометрические системы контроля пространственного положения. - М.: Энергоатомиздат. - 1985.
77. **C. Tyren.** Magnetic terrain navigation. //In 5th International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology vol. 5 1987 Pp. 245-256.
78. **Кисилев С.К.** Корреляционно-экстремальная навигация по полю магнитных аномалий протяженных ориентиров // Известия РАН. Теория и системы управления. - 1997. - №6. - С. 56-62.
79. **Goldenberg F.** Geomagnetic Navigation beyond the Magnetic Compass/F. Goldenberg// Proceedings of IEEE/ION PLANS 2006. - 2006. P. 684-694.
80. **Frassl M.** Magnetic Maps of Indoor Environments for Precise Localization of Legged and Non-legged Locomotion/ M. Frassl et. al. //RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) Japan - 2013. Pp. 913-920.
81. **Shockley J.A.** Navigation of Ground Vehicles Using Magnetic Field Variations /J.A. Shockley J. F. Raquet // Journal of The Institute of Navigation Vol. 61 No. 4 2014 P.237-252.
82. **Canciani A. J.** Absolute Positioning Using the Earth's Magnetic Anomaly Field/A. J. Canciani J. F. Raquet//Proceedings of the Institute of Navigation 2015 International Technical Meeting. - 2015. P. 265-278.
83. **Klass Ph. J.** New guidance technique being tested.//Aviation Week and Space Technology. - Vol. 100 No 8. - 1974.
84. **Reed C.G.** Range correlation guidance for cruise missiles/ C.G. Reed J. Hogan // IEEE Trans. Aerospace and Electr. Sys. - Vol. AES-15 № 4. - 1979. P. 547-555.
85. **Лонгейбейкер В.Е.** Навигация пассивных тактических ракет с использованием информации о рельефе местности и датчиков применяемых в автопилотах./В.Е. Лонгейбейкер/ Аэрокосмическая техника. – 1985. - Т. 3? №3. - С. 113-122
86. **Golden J.P.** Terrain Contour Matching (TERCOM): A Cruise Missile Guidance Aid. SPIE: Image Processing for Missile Guidance vol. 238 pp. 10-18 1980.
87. **French R.L.** Land Vehicle Navigation and Tracking. Global Positioning System: Theory and Applications. - 1996. - Vol. II. - P.275-301 (Edited by Parkinson B.W.).
88. **Dmitriev S. P., Stepanov O. A., Koshaev D. A.** Map Matching for Automobile Navigation. GIM International. The world Magazine for Geomatics. 2000 vol.14 N7 July pp. 69-71.
89. **Дмитриев С.П., Степанов О.А., Ривкин Б.С., Кошаев Д.А., Чанг Д.** Оптимальное решение задачи автомобильной навигации с использованием карты дорог// Гироскопия и навигация. 2000. - № 2. - С. 57-68.
90. **Степанов О.А.** Состояние перспективы развития и применения наземных систем навигации для подвижных объектов //Гироскопия и навигация. – 2005. - №2. – С.95-121.
91. **Шолохов А.В.** Коррекция автономных наземных навигационных систем в движении с использованием контрольных точек цифровой карты дороги //Гироскопия и навигация. - 2007. № 3. - С. 34-41.
92. **Davidson P.** Application of Particle Filters to a Map-Matching Algorithm. / P. Davidson J. Collin and J. Takala // Gyroscope and Navigation. Vol 3. - 2011. Pp. 46-58.

93. **Gustafsson F.** Navigation and tracking of road-bound vehicles using map support./Gustafsson et. al. - In: A. Eskandarian ed. Handbook of Intelligent Vehicles London: Springer. - 2012. P. 397-434.
94. **Gilleeron P.Y.** Indoor Navigation Enhanced by Map-Matching/ P.Y. Gilleeron I. Spassov B. Merminod// European Journal of Navigation. - 2005. - Vol.3 N3. P. 6-13.
95. **Ascher C. C.** Dual IMU Indoor Navigation with particle filter based map-matching on a smartphone. / C. C. Ascher C. Kessler M. Wankel and G.G. Trömmel// Proc. International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation. - 2010.
96. **Kinsey J.C.** A survey of underwater vehicle navigation: recent advances and New Challenges/ J.C. Kinsey R.M. Eustice L.L. Whitcomb // Proceedings of the 7th Conference on Maneuvering and Control of Marine Craft (MCMC'2006). - 2006.
97. **Stutters L.** Navigation technologies for autonomous underwater vehicles. / L. Stutters H. Liu C. Tiltman D.J. Brown//IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part C: Applications and Reviews 38 (4) 2008 pp. 581-589.
98. **Paull L.** AUV Navigation and Localisation - A Review/ L. Paull S. Saeedi M. Seto H. Li//IEEE Journal of Oceanic Engineering. - 2014. 39(1). P. - 131-149.
99. **Bergem O.** Bathymetric navigation of autonomous underwater vehicles using a multibeam sonar and a Kalman filter with relative measurement covariance matrices : Dissertation / O. Bergem. - Norway: University of Trondheim. - 1993. - P. 162.
100. **Белоглазов И.Н.** Оптимальная фильтрация в корреляционно-экстремальных системах использующих изображение местности // Изв. АН. СССР. Техническая кибернетика. - 1977 №2. С. 185-191.
101. **Степанов О.А.** Предельно допустимая точность совмещения гауссовских изображений //Автометрия. - 1990. - N5. - С. 16-22.
102. **Степанов О. А.** Оптимальное решение задачи уточнения координат объекта в корреляционно-экстремальных системах навигации при использовании информации о поле в виде кадра //Автометрия. - 1994. - N2.
103. **Bevington J.E.** Precision aided navigation using SAR and digital map data./ J.E. Bevington C.A. Martila// PLAN'S-90. - 1990. - P. 490-496.
104. **Гасилов В.Л., Костоусов В.Б.** Задача идентификации параметров движения объекта на основе обработки изображения внешнего информационного поля.// Известия Российской академии наук. Техническая кибернетика. - 1994. - № 3. С. 78.
105. **Борейко А.А., Воронцов А. В., Кушнерик А.А., Щербатюк А.Ф.** Алгоритмы обработки видеоизображений для решения некоторых задач управления и навигации автономных необитаемых подводных аппаратов // Подводные исследования и робототехника. - 2010. - № 1. - С. 29-39.
106. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 1. Введение в теорию оценивания. - СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2010. - 517 с.
107. **Beisner H.M.** Arbitrary path magnetic navigation by recursive nonlinear estimation. / H.M. Beisner //Navigation. - 1969. Vol. 16 N3. P. 271-278.
108. **Красовский А.А.** Оптимальная фильтрация в теории корреляционно-экстремальных систем // Изв. АН СССР Техническая кибернетика. - 1976. - №3. - С. 155-160.
109. **Hostetler L. D.** A Kalman approach to continuous aiding of inertial navigation systems using terrain measurements/ L. D. Hostetler// in Proc. Milwaukee Symp. Automat. Computation Contr. 1976. Pp. 305-309.
110. **Дмитриев С.П. Шимелевич Л.И.** Нелинейные задачи обработки навигационной информации : обзор. - Л.: ЦНИИ «Румб», 1977. - 84 с.
111. **Andreas R.D.** Continuous Kalman updating of an inertial navigation system using terrain measurements./R.D. Andreas L.D. Hostetler R. Beckman// - NAECON'78 Vol .3.
112. **Красовский А.А. Белоглазов И.Н. Чигин Г.П.** Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. - М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы? 1979. - 448 с.
113. **Sheives T.S.** An Alternate Approach for Terrain-Aided Navigation Using Parallel Kalman Filters./ T.S. Sheives R.D. Andreas// Tech. Rep. SAND79-2198. Sandia Nat. Lab., Albuquerque, NM,- 1979.
114. **Белоглазов И.Н. Ермилов А.С. Карпенко Г.И.** Рекуррентно-поисковое оценивание и синтез алгоритмов корреляционно-экстремальных навигационных систем //Автоматика и Телемеханика. - 1979. - №7.
115. **Дмитриев С.П. Шимелевич Л.И.** Обобщенный фильтр Калмана с многократной линеаризацией и его применение в задаче навигации по геофизическим полям //Автоматика и телемеханика. - 1979. - N 4. - С. 50-55.

116. **Hostetler L.D.** Nonlinear Kalman filtering techniques for terrain-aided navigation/ L.D. Hostetler R. D. Andreas//IEEE. - 1983. - Vol. AC-28. - N 3. - P. 315-323.
117. **Mealy G.L.** Application of multiple model estimation to a recursive terrain height correlation system/ G.L. Mealy W. Tang //IEEE Trans. Automat. Contr. - 1983. Vol. AC-28 N.3. P. 323-331.
118. **Белоглазов И.Н. Джанджава Г.И. Чигин Г.П.** Основы навигации по геофизическим полям. - М.: Наука. - 1985. - 328 с.
119. **Степанов О.А.** Приближенные методы анализа потенциальной точности в нелинейных задачах обработки навигационной информации. - Л.: ЦНИИ «Румб», 1986. - 88 с.
120. **Дмитриев С.П.** Высоточная морская навигация. - СПб: "Судостроение" 1991. - 220 с.
121. **Степанов О. А.** Методы оценки потенциальной точности в корреляционно-экстремальных навигационных системах. СПб: ЦНИИ «Электроприбор» 1993. - 84 с.
122. **Степанов О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации/ СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 1998. - 369 с.
123. **Bergman N., Ljung L., Gustafsson F.** Point mass filter and Cramer-Rao bound for Terrain-Aided Navigation.// IEEE Conference on Decision and Control San Diego 1997.
124. **Bergman N.** Recursive Bayesian estimation. Navigation and Tracking Applications/ N. Bergman. - Sweden Linköping: Linköping University 1999. - 204 p.
125. **Kalman R. E.** A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. / R.E. Kalman//Trans. ASME J. Basic Eng. - 1960 - 82 (Series D) . - P. 35-45.
126. **Стратонович Р.Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. - М.: Изд-во МГУ 1966. - 319 с.
127. **Kushner H. J.** Dynamical equations of optimal nonlinear filtering. J. Differential Equations . vol.3 -1967. - Pp. 179-199.
128. **Jazwinski A.H.** Stochastic process and filtering theory. / A.H. Jazwinski. - New York: Academic Press. - 1970. - 400 p.
129. **Gelb A.** Applied optimal estimation/ A. Gelb. - Cambridge: M.I.T. Press. - 1974. - 384 p.
130. **Magill D.T.** Optimal adaptive estimation sampled stochastic processes// IEEE Transactions of on Automatic Control vol. AC-10 no. 4 pp. 434-439 Oct. 1965.
131. **Lainiotis D. G.** Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaptation. IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 16 pp. 160-170 Apr. 1971.
132. **Bucy R. S.** Digital synthesis of non-linear filters/ R. S. Bucy K. D. Senne// Automatica. - 1971. - № 7(3). - P. 287-298.
133. **Alspach D.L.** Recursive Bayesian estimation using Gaussian sum approximation/D.L. Alspach H.W. Sorenson / Automatica . - 1971. - Vol. 7 No 4.
134. **Лайниотис Д.Г.** Разделение – единый метод построения адаптивных систем//Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. - 1976.- Т. 64 N8. - I. Оценивание - С.8-27 II. Управление - С. 74-94.
135. **Белоглазов И.Н.** Рекуррентно-поисковое оценивание //Доклады АНССР . 1977. 1977. Т. 236 N 2.
136. **Kramer S. C.** Recursive Bayesian estimation using piece-wise constant approximations/ S. C. Kramer H. W. Sorenson // Automatica. - 1988. - 24(6). - Pp. 789-801.
137. **Ярлыков М.С., Миронов М.А.** Марковская теория оценивания случайных процессов / М.С.Ярлыков М.А.Миронов. - М.: Радио и связь, 1993.
138. **Степанов О.А.** Фильтр Калмана: история и современность. К 80-летию Рудольфа Эмиля Калмана. //Гирскопия и навигация. - 2010- № 2. - С. 107 - 121.
139. **Mathematical System Theory (1991):** The Influence of R.E. Kalman: A Festschrift in Honor of Professor R.E. Kalman on the Occasion of His 60th Birthday, Antoulas, A.C., Ed., Berlin: Springer-Verlag.
140. **Тихонов, В.И., Харисов В.Н.** Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. - М.: Радио и связь, 1991.
141. **Зарицкий В.С., Светник В.Б., Шимелевич Л.И.** Метод Монте-Карло в задачах оптимальной обработки информации // Автоматика и телемеханика. - 1975. - № 12. - С. 95-103.
142. **Берковский Н.А., Степанов О.А.** Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах//Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. - 2013. - № 3, т. 52. - С. 3-14.
143. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения оценок и модуляции. Т. 1. Теория обнаружения оценок и линейной модуляции. - М.: Сов. радио, 1972. - 744 с.
144. **Кошаев Д.А. Степанов О.А.** Применение неравенства Рао-Крамера в задачах нелинейного оценивания // Теория и системы управления. Известия Академии наук. - 1997. - №2. - С. 65-72.

145. Tichavsky P., Muravchik C., Nehorai A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering // IEEE Transactions on Signal Processing. 1998. № 46. P. 1386-1398.
146. Simandl M., Kralovec J. and Tichavsky P. Filtering predictive and smoothing Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear dynamic systems // Automatica. 2001. № 37. P. 1703-1716
147. Van Trees H. L., Bell K. L. Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking. Wiley-IEEE Press 2007.
148. Karlsson R. Particle filtering and Cramer-Rao lower bound for underwater navigation/ R. Karlsson F. Gustafsson T. Karlsson.// IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing. - 2002. - P. 65-68.
149. Stepanov O.A., Koshaev D.A., Motorin A.V. Designing Models for Signals and Errors of Sensors in Airborne Gravimetry Using Nonlinear Filtering Methods// Proceedings of the Institute of Navigation 2015 International Technical Meeting, ITM 2015 January 27-29 Laguna Cliffs Marriott Dana Point, California. 2015, pp.279-284.
150. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 2. Современные тенденции развития. //Гироскопия и навигация.- 2016. - № 1 (принята к публикации).

Abstract. A map-aided navigation method is considered. The main features of this method are discussed; an overview of the algorithms used to solve navigation problems is given. Considerable attention is focused on the algorithms based on the use of nonlinear filtering, which make it possible to not only formulate and solve the problem of algorithm design, but also provide a background for accuracy analysis.

Key words: map-aided navigation, nonlinear filtering, accuracy analysis

Материал поступил 16.06.2015