

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИМ ИНТЕГРАТОРОМ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЕНИЙ

Предложена математическая модель работы авиационного гироскопического гравиметра, в котором чувствительным элементом выступает измеритель линейных ускорений. Для этого в математической модели учтены как поступательные, так и угловые колебания основы гравиметра. Принципиальным отличием предложенной модели от известных является использование датчиков углов гироскопа для определения величины аномалии ускорения силы тяжести.

**Ключевые слова:** математическая модель, гироскопический гравиметр, аномалия ускорения силы тяжести

### Введение

Вопросам определения аномалий силы тяжести придается большое значение как в теории, так и на практике (создание аппаратуры, разработка эффективных алгоритмов обработки измерений) [1–4]. В данной статье исследуется возможность использования гироскопического интегратора линейных ускорений (ГИЛУ) в качестве чувствительного элемента авиационного гравиметра.

### Математическая модель

Для измерения аномалий ускорения силы тяжести (УСТ) предлагается использовать авиационный гравиметр, чувствительным элементом которого является трехступенчатый ГИЛУ [8,9].

Для получения математической модели гравиметра введем следующие системы координат с началом в точке пересечения осей карданова подвеса – точке  $O$ :

$O\xi\eta\zeta$  – поступательно движущаяся относительно инерциального пространства;

$Oxyz$  – связанная с основанием ГИЛУ, ось  $Oy$  совпадает с осью его наружного кольца. Основание стабилизируется так, что ось  $Oy$  совпадает с местной вертикалью, ось  $Ox$  направлена по касательной к меридиану на север, ось  $Oz$  направлена по касательной к параллели на восток. Положение  $Oxyz$  относительно  $O\xi\eta\zeta$  определяется углами Эйлера:  $\theta$  – тангаж,  $\varphi$  – крен,  $\psi$  – рыскание [5];

$Ox_1y_1z_1$  – связанная с наружным кольцом ГИЛУ. Ее положение относительно  $Oxyz$  определяется углом  $\alpha$ , причем ось  $Oy_1$  совпадает с  $Oy$ , а  $Ox_1$  – с осью

---

**Коваль** Антон Валерьевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированного управления технологическими процессами и компьютерных технологий Житомирского государственного технологического университета (Украина).

подвеса внутреннего кольца,  $Oz_1$  направлена по нормали к плоскости внешнего кольца;

$Ox_2y_2z_2$  – связанная с внутренним кольцом ГИЛУ, причем ось  $Ox_2$  совпадает с осью  $Ox_1$ , а ось  $Oz_2$  совпадает с осью вращения ротора. Ее положение относительно внешнего кольца определяет угол поворота  $\beta$ . Угол  $\gamma$  – угол поворота ротора ГИЛУ относительно гирокамеры.

$Ox_cy_cz_c$  – сопутствующая летательному аппарату (ЛА), ось  $Oy_c$  которой совпадает с осью  $Oy$ , ось  $Ox_c$  направлена по касательной к траектории ЛА и повернута относительно оси  $Ox$  на курсовой угол  $K$ , ось  $Oz_c$  дополняет ее до правой системы координат;

$Ox_ay_az_a$  – связанная с ЛА.

Ориентацию системы координат  $Ox_ay_az_a$  относительно  $Ox_cy_cz_c$  определяют углы  $\theta_a$ ,  $\varphi_a$ ,  $\psi_a$ .

При получении модели авиационного гирокопического гравиметра (АГГ) примем следующую модель УСТ [7]:

$$\vec{g} = \vec{g}_n + \vec{\delta g} + \vec{\delta g}_r,$$

где  $\vec{g}_n$  – нормальная составляющая силы тяжести, совпадающая с осью  $Oy$ ;  $\vec{\delta g}$ ,  $\vec{\delta g}_r$  – соответственно составляющие аномалии удельной силы тяжести по оси  $Oy$  и в горизонтальной плоскости  $Oxz$ ; направление  $\vec{\delta g}_r$  зададим азимутом  $\alpha_g$ . Проекции  $\vec{g}$  на оси системы  $Oxyz$  примут вид:

$$g_x = \delta g_r \cdot \cos \alpha_g, \quad g_y = g_n + \delta g, \quad g_z = \delta g_r \cdot \sin \alpha_g.$$

Рабочее уравнение АГГ получим, исходя из уравнений движения ГИЛУ на подвижном основании согласно [6]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - m \left( \vec{\rho}_C \times \vec{w}_0 \right)_{q_i}, \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия гирокопа;  $q_i$ ,  $Q_i$  – обобщенные координаты и силы соответственно;  $\vec{w}_0$  – инерциальное ускорение точки  $O$  карданова подвеса;  $C$  – центр тяжести гироблока, расположенный на главной оси ротора на расстоянии  $z_C$  от точки  $O$ ;  $\vec{\rho}_C$  – радиус-вектор точки  $C$ ;  $m$  – масса гироблока. Второе слагаемое в правой части уравнения (1) представляет собой проекцию момента сил инерции на ось, по которой направлена обобщенная угловая скорость  $\dot{q}_i$ . В дальнейшем предполагается отсутствие сил, зависящих от угла собственного вращения ротора  $\gamma$ . Примем, что  $q_1 = \alpha$ ,  $q_2 = \beta$ .

Обобщенные силы  $Q_\alpha$ ,  $Q_\beta$  в сформулированных выше условиях примут вид [5]:

$$Q_\alpha = -b_\alpha \cdot \dot{\alpha} - m \cdot z_C \left[ g_y \cos \beta + \delta g_r \sin \beta \sin (\alpha_g + \alpha) \right] \cdot \left( R/r_{\text{ир}} \right)^2;$$

$$Q_\beta = -b_\beta \cdot \dot{\beta} - k_\beta \cdot \beta - m \cdot z_C \delta g_r (\sin \beta + \cos \beta) \cos (\alpha_g + \alpha) \cdot \left( R/r_{\text{ир}} \right)^2,$$

где  $b_\alpha, b_\beta$  – коэффициенты вязкого трения в осях внешнего и внутреннего колец соответственно;  $k_\beta$  – коэффициент момента, препятствующего складыванию колец,  $r_{\text{цг}}$  – расстояние центра тяжести ЛА от центра Земли.

Для рассмотрения вертикальной составляющей аномалии УСТ примем следующие приближения:  $\delta g_r \ll \delta g$  [7] и  $|\sin\beta| < 0,01$  [5], тогда выражение обобщенной силы  $Q_\alpha$  примет вид

$$Q_\alpha = -b_\alpha \cdot \dot{\alpha} - m \cdot z_C g_y \cos\beta \cdot \left( R/r_{\text{цг}} \right)^2. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим измеренное значение УСТ на поверхности референц-эллипсоида

$$g_{\text{уизм}} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - b_\alpha \cdot \dot{\alpha} - m \left( \vec{p}_C \times \vec{w}_0 \right)_{\dot{\alpha}} \right\} \left( \frac{r_{\text{цг}}}{R} \right)^2 (m \cdot z_C \cdot \cos\beta)^{-1} \quad (3)$$

и измеренное значение аномалии ускорения  $\Delta g_{\text{изм}}$

$$\Delta g_{\text{изм}} = g_{\text{уизм}} - g_n, \quad (4)$$

где  $\partial T/\partial \alpha$ ,  $d/dt(\partial T/\partial \dot{\alpha})$  – выражения, зависящие от параметров ГИЛУ и результатов измерений углов  $\alpha, \beta$  и их производных  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}$ .

Формула (3) будет являться математической моделью для вычисления ускорения силы тяжести на поверхности референц-эллипсоида, а формула (4) – математической моделью аномалии УСТ.

### Анализ погрешностей

Суммарную погрешность авиационного гравиметра, построенного на базе стабилизированного ГИЛУ, представим в виде

$$\delta g_{\text{изм}} = \delta_n + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

где  $\delta_n$  – относительная среднеквадратическая погрешность стабилизации платформы;  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – инструментальные относительные среднеквадратические погрешности, обусловленные соответственно: смещением центра тяжести ротора ГИЛУ  $\delta_{z_C}$ ; погрешностью определения масштабного коэффициента  $\delta_{k_\beta}$ ; влиянием осевого момента инерции ГИЛУ  $\delta_C$ ;  $\delta_{z_C}, \delta_{k_\beta}, \delta_C$  – относительные величины.

Результаты моделирования влияния указанных инструментальных погрешностей на точность измерений аномалий УСТ представлены в табл. 1 – 3.

Таблица 1

#### Влияние смещения центра тяжести ротора ГИЛУ на точность измерений аномалий УСТ

$\delta_{z_C}, \%$	-1	-0,5	0	0,5	1
$\delta_1, \%$	0,0645	0,0028	0,0000	0,0050	0,0064

Таблица 2

**Влияние погрешности определения масштабного коэффициента на точность измерений аномалий УСТ**

$\delta_{k_B}$ , %	99	66	33	0	33	66	99
$\delta_2$ , %	1,7	2,2	0,3	0	0,3	1,6	5,2

Таблица 3

**Влияние осевого момента инерции ГИЛУ на точность измерений аномалий УСТ**

$\delta_C$ , %	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	1
$\delta_3$ , %	23,7	9,0	0,6	0	0,4	8,7	23,3

Погрешности стабилизации учитываются в соответствии с [10], где сказано, что процесс стабилизации представляет собой колебания с частотой от десятых долей герца до 1 Гц. Наименьшую погрешность стабилизации платформы прием равной 3 угл. с согласно [11]. Результаты моделирования представлены в табл. 4.

Таблица 4

**Влияние точности стабилизации платформы на точность измерений аномалий УСТ**

$f_n$ , Гц	Погрешность стабилизации платформы		
	3 угл. с	10 угл. с	30 угл. с
	$\delta_n$ , %	$\delta_n$ , %	$\delta_n$ , %
0,0	0	0	0
0,1	2,49	16,84	65,28
0,4	0,01	0,06	1,80
0,5	0,03	0,13	0,72
1,0	0,03	0,10	0,37

Из представленных результатов видно, что инструментальные погрешности ГИЛУ могут существенно влиять на точность измерения УСТ.

**Моделирование измерения аномалий ускорения силы тяжести**

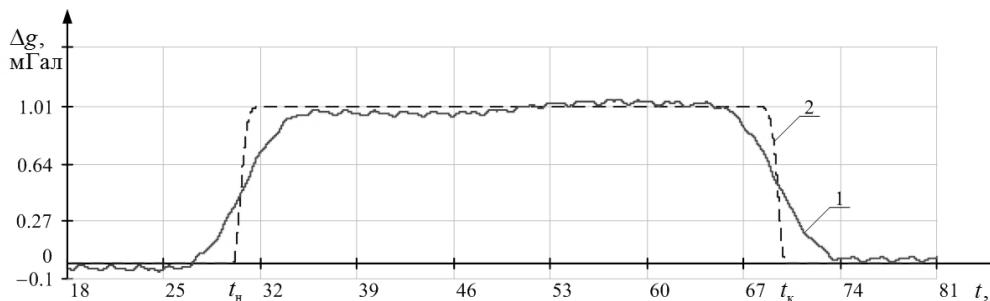
В сформулированных выше условиях моделировалось движение ГИЛУ на временному промежутке  $[0, T]$ , причем на интервале  $(t_n, t_k) \subset [0, T]$  вводилась аномалия ускорения  $+1 \text{ мГл}$ .

Использовались следующие значения моментов инерции ГИЛУ [4,6]:  $A = 3$ ,  $C = 3.5$ ,  $A_1 = 1$ ,  $C_1 = 1.3$ ,  $A_2 = 1$ ,  $B_2 = 1.3$  ( $\times 10^{-7} \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$ ). Параметры движения ЛА:  $V = 400 \text{ км/ч}$ ,  $K = 0^\circ$ ,  $h = 1000 \text{ м}$ . В режиме автопилотирования ЛА, принят следующий закон изменения углов  $\theta_a$ ,  $\varphi_a$ ,  $\psi_a$ :  $\theta_a = A_{\theta a} \sin \omega_\theta t$ ;  $\varphi_a = A_{\varphi a} \sin(\omega_\varphi t + \delta_{\varphi a})$ ;  $\psi_a = A_{\psi a} \sin(\omega_\psi t + \delta_{\psi a})$ , где  $A_{\theta a} = 0.0099 \text{ рад}$ ,  $A_{\varphi a} = 0.043 \text{ рад}$ ,  $A_{\psi a} = 0.019 \text{ рад}$ ,  $\delta_{\varphi a} = \delta_{\psi a} = 0$ ,  $\omega_\theta = \omega_\varphi = \omega_\psi = 0.02 \text{ Гц}$ .

Моделирование проводилось с учетом рассмотренных составляющих погрешностей. Сформированы диапазоны допустимых отклонений для относительных погрешностей:  $\delta_{z_c} \in [-0.005; 0.010]$ ;  $\delta_{k_b} \in [-0.33; 0.33]$ ;  $\delta_c \in [-0.001; 0.001]$ .

Для стабилизирующей платформы была выбрана точность стабилизации 3 угл. с [11] и допустимый диапазон частот  $f_n \in [0.4; 1.0]$ .

Результаты моделирования подвергались процедуре сглаживания по методу наименьших квадратов. Пример результатов моделирования представлен на рисунке.



Результаты моделирования: 1 – измеренное значение аномалии УСТ; 2 – тестовое значение аномалии УСТ

## Выводы

Разработана математическая модель авиационного гравиметра, в котором в качестве чувствительного элемента используется гироскопический интегратор линейных ускорений.

Проанализировано влияние инструментальных погрешностей ГИЛУ на точность измерения ускорения силы тяжести.

Проведено сравнение результатов моделирования измерений аномалии ускорения силы тяжести с его тестовыми значениями. Среднеквадратическое расхождение не превышает 10,5 % измеряемой величины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов А. А., Соколов А. В., Элинсон Л. С. Новый аэроморской гравиметр серии «Чекан» // Гироскопия и навигация. 2014. № 1. С. 26-34.
2. Инерциально-гравиметрический комплекс МАГ-1 (GT-1A). Опыт разработки и результаты летных испытаний. / В. Н. Бержицкий, В. Н. Ильин, Е. Б. Савельев [и др.] // Применение гравиинерциальных технологий в геофизике. Сб. ст. и докл. / ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор». СПб., 2002. С. 48-60.
3. Степанов О. А., Блажнов Б. А., Кошаев Д. А. Исследование эффективности использования спутниковых измерений при определении ускорения силы тяжести на летательном аппарате // Гироскопия и навигация. 2002. № 3 (38). С. 33-47.
4. Безвесільна О. М. Авіаційні гравіметричні системи та гравіметрія / О. М. Безвесільна. Житомир: ЖДТУ, 2007. 604 с.
5. Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов / Я. Л. Лунц. М.: Наука, 1972. 296 с.
6. Павловский М. А. Теория гироскопов: монография / М. А. Павловский. Киев: Вища школа, 1986. 304 с.
7. Торге В. Гравиметрия. М.: Мир, 1999. 429 с.

- 
8. **Bezvesil'naya E. N.** Investigation of the errors of a mechanical information-measuring system / E.N. Bezvesil'nya // International Applied Mechanics. 1990. Vol. 26. № 4. P. 418-423.
  9. **Bezvesil'naya E. N.** Increasing the precision of measurements of free-fall acceleration / E. N. Bezvesil'nya // International Applied Mechanics. 1995. Vol. 31. № 2. P. 160-163.
  10. **Бесекерский В. А.** Динамический синтез систем гироскопической стабилизации / В. А. Бесекерский, Е. А. Фабрикант. Л.: Судостроение, 1968. 353 с.
  11. **Семенов И. В., Челпанов И. Б.** Оптимизация системы управления приводом гироскопического стабилизатора [Электронный ресурс] // (<http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/kmu14/text/157.doc>). Проверено 03.07.2015

**Abstract.** In this paper presented mathematical model of the aviation gyro gravimeter eq. (9) – that allows to obtain values of acceleration of gravity on the surface of the reference ellipsoid. From equation (10) one can obtain gravity anomalies. Introduced model allows to conduct simulations of aviation gyro gravimeter in conditions that are close to the conditions of a flight. To do this, in mathematical model were included both forward and angular vibrations of the gravimeter's basis. In practice, these vibrations can be measured using MEMS gyroscopes. Fundamental difference of the proposed model from the known models is using of angle sensors of the gyroscope to get the gravity anomaly.

**Key words:** mathematical model, gyro gravimeter, gravity anomaly

Материал поступил 25.11.2014