

Д. У. АЛЛАН

ВАРИАЦИИ АЛЛАНА: ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ, ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ, ОСНОВНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

В течение последних 50 лет были предложены и получили распространение вариация Аллана и ее модификации для описания нестабильностей эталонов времени и частоты. Такие нестабильности часто моделируются нестационарными процессами; показано, что указанные вариации представляют собой эффективные оценки рассеяния для этих процессов. В статье представлены соответствующие временные и частотные соотношения, обсуждаются преимущества и недостатки предложенных вариаций. Продемонстрировано, что эти вариации могут с успехом использоваться в различных областях, в частности в навигации.

Ключевые слова: вариация Аллана, анализ временного ряда, атомные часы, прецизионный анализ, нестационарный процесс

Введение

В природе можно найти множество примеров нестационарных и хаотических процессов. Если правильно описать эти процессы, появится возможность разработать и использовать оптимальные методики оценивания, сглаживания и предсказания. В течение 1960–1970 гг. для решения этих задач в области временных измерений и телекоммуникаций были созданы такие инструменты, как вариация (дисперсия) Аллана, модифицированная вариация Аллана и временная вариация, достоинства и недостатки которых будут перечислены ниже. Признано, что вариации могут применяться также в других

Аллан Дэвид. Президент компании Allan's TIME, США.

Статья по докладу на круглом столе XXII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, 2015.

Научный редактор перевода д.т.н. В. А. Грановский

областях метрологии, поскольку указанные процессы широко распространены, в том числе в навигации.

До 1960-х годов, до появления на рынке атомных часов, для отсчета времени использовались кварцевые генераторы. Общеизвестно, что долговременную работу таких генераторов можно моделировать с помощью частотной модуляции (ЧМ) типа фликкер-шума, моделью которого, в свою очередь, является нестационарный процесс, так как его спектральная плотность пропорциональна $1/f$, где f – частота Фурье. При интегрировании шума такого типа для определения классической дисперсии оказывается, что интеграл расходится.

В 1964 г. Джеймс А. Барнс (James A. Barnes) разработал обобщенную функцию автокорреляции, которая имела регулярное поведение при фликкер-шуме. Мне повезло работать под его руководством в Национальном бюро стандартов (NBS) в г. Боулдер, Колорадо. В том же году IEEE и NASA провели специальную конференцию NASA в центре Годдарда (Белтсвилл, Мериленд), посвященную проблеме описания часов с помощью подобных нестационарных процессов. Мы с Д. Барнсом представили на этой конференции свой доклад, и он был хорошо принят. Его работа стала основой диссертации на соискание степени доктора философии, а мне дала данные, необходимые для магистерской диссертации. Кроме работы Барнса я активно использовал книгу сэра Джеймса Майкла Лайтхила «Анализ Фурье и обобщенные функции» (*Fourier Analysis and Generalized Functions, Sir James Michael Lighthill*)[1]. Ознакомление с этой книгой стало для меня бесценным опытом.

В своей магистерской работе я изучал, какое влияние на классическую дисперсию как функцию оказывают период осреднения частоты (время осреднения τ), количество выборок N , по которым рассчитана дисперсия, время задержки T между интервалами осреднениями частоты (в те годы для сброса счетчика после измерений частоты на некотором интервале требовалось время, T обозначает время между началом одного измерения и началом следующего) и как дисперсия зависит от полосы частот f_h измерительной системы. Мы разработали ряд спектральных степенных шумовых моделей для описания различных видов нестабильностей, наблюдаемых в часах и вызванных шумами измерительных систем, часов и внешними факторами. Мы заметили, что эти шумовые модели имеют гораздо более общий характер, чем казалось ранее, и могут широко применяться в метрологии.

Моя диссертация и диссертация Барнса были опубликованы в специальном выпуске Трудов IEEE по стабильности частоты в феврале 1966 г. [2], также в сборник было включено несколько докладов конференции IEEE/NASA 1964 г.

Моделирование природных явлений с помощью степенных шумовых процессов

Новаторская работа Мандельброта и Восса (Mandelbrot and Voss) [3], где введено понятие фракталов, показала значение автомодельных нестационарных процессов при моделировании природных явлений, в частности фликкер-шума. Было обнаружено, что при моделировании часов можно использовать пять различных видов шума. Многие из них могут быть успешно использованы в качестве моделей в других физических процессах, включая нестабильности в навигационных системах.

Моделирование шумовых процессов в природе – весьма полезное занятие. Чем лучше мы будем моделировать природные явления, тем эффективнее сможем использовать оптимизацию, чтобы больше узнать о процессах, маскируемых природным шумом.

Мы использовали вариации, представленные далее в статье, для описания и моделирования множества различных природных процессов. Оглядываясь назад, обобщая 50-летний опыт, могу сказать, что наша работа была вознаграждена возможностью проникнуть в сущность природных явлений. В статье приведено несколько примеров таких открытий.

Для часов с собственной частотой $\nu(t)$ и номинальной частотой ν_0 относительное отклонение частоты можно записать в виде $y(t) = (\nu(t) - \nu_0) / \nu_0$, а отклонение временных показаний часов $x(t)$ – в виде интеграла от $y(t)$. Изучение временных и частотных характеристик реализаций $x(t)$ и $y(t)$ дает возможность моделировать поведение часов и затем осуществлять оптимальную оценку, сглаживание и предсказание их «правильного» поведения на фоне шума – даже если шум нестационарный.

В качестве характеристик x и y в частотной области используем спектральные плотности $S_y(f)$ и $S_x(f)$. Во временной области наиболее полезными оказались вариация Аллана (ВА), модифицированная вариация Аллана (МВА) и временная вариация (ВВ). Другие вариации также оказались полезными. Часто используются квадратные корни из этих вариаций – девиации (Д):

КВАДРАТ	КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ
$\sigma_y^2(\tau) = \text{ВА}$	$\sigma_y(\tau) = \text{ДА}$
Mod. $\sigma_y^2(\tau) = \text{МВА}$	Mod. $\sigma_y(\tau) = \text{МДА}$
$\sigma_x^2(\tau) = \text{ВВ}$	$\sigma_x(\tau) = \text{ВД}$

Рис. 1. Общая номенклатура вариаций и их квадратных корней, используемая в NBS (в настоящее время – Национальный институт стандартов и технологий, NIST) в США, а также в международной научной литературе и стандартах IEEE

Спектральные плотности можно представить в виде $S_y(f) \sim f^\alpha$ и $S_x(f) \sim f^\beta$, а поскольку x – интеграл от y , можно показать, что $\alpha = \beta + 2$. Эффективные модели случайных вариаций для часов, их измерительных систем и систем распределения сигналов имеют значения $\alpha = -2, -1, 0, +1, +2$. Представляется, что эти модели довольно хорошо описывают наблюдаемые случайные нестабильности частоты. Модели могут использоваться во многих других областях метрологии. В природе фликкер-шум присутствует повсеместно. В случае измерений времени и частоты мы наблюдали как частотную (ЧМ), так и фазовую (ФМ) модуляцию типа фликкер-шума (соответственно $\alpha = \beta = -1$).

На рис. 2 показано, как данные модели применимы к разным типам часов. Обычно модель шума меняется от короткого к длинному периоду времени осреднения – почти всегда движение происходит по направлению к более отрицательным значениям α . На рис. 2 используется значение $\alpha = -3$, так как эта долговременная модель шума скорости вращения Земли для частот Фурье ниже одного периода в год после удаления из данных всех систематических компонентов.

Given: $S_y(f) \sim f^\alpha$; $S_x(f) \sim f^\beta$;
and $\beta = \alpha - 2$

Power-law spectra models

α	β	Earth	Qu	H-m	Cs	Rb	Optical
+2	0		•	•			
+1	-1		•				
0	-2		•	•	•	•	•
-1	-3	•	•	•	•	•	•
-2	-4		•	•	•	•	•
-3	-5	•					

Рис. 2. Матрица, демонстрирующая пригодность степенных спектральных моделей для описания шума скорости вращения Земли после удаления систематических компонентов (Earth), кварцевых генераторов (Qu), водородных мазеров (H-m), цезиевых лучевых и фонтанных эталонов частоты (Cs), рубидиевых эталонов частоты (Rb), а также новых и наиболее стабильных атомных часов, использующих частоты оптического диапазона электромагнитного спектра (Optical)

POWER-LAW SPECTRA

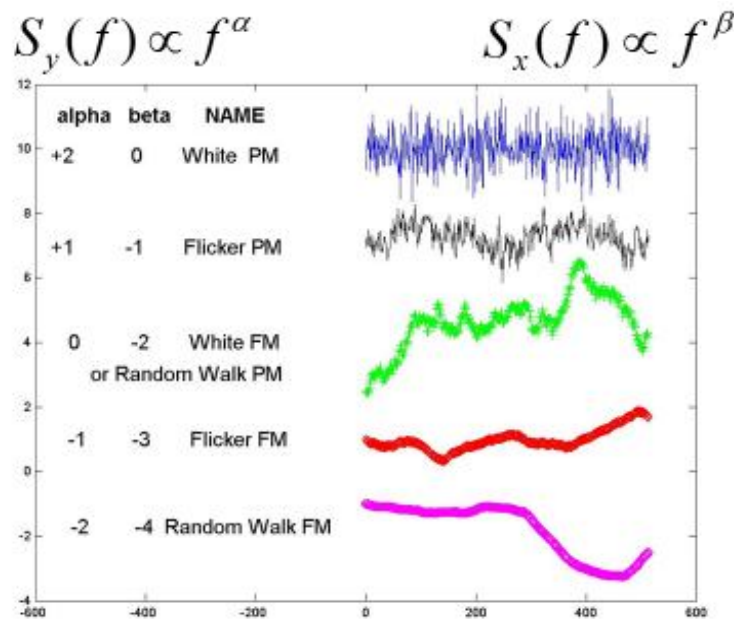


Рис. 3. Визуальные различия степенных спектральных моделей.

Написи на рисунке: ФМ типа белого шума,
ФМ типа фликкер-шума,
ЧМ типа белого шума или ФМ типа случайного блуждания,
ЧМ типа фликкер-шума
ЧМ типа случайного блуждания

Как видно на рис. 3, степенные спектры выглядят по-разному, и человеческий глаз в этом смысле может быть хорошим спектроанализатором. При ана-

лизе данных исследователю всегда стоит взглянуть на графики еще и по той причине, что наш мозг – это удивительный, волшебный процессор.

Пользуясь книгой Лайтхилла, переведем эти спектры во временную область. Результаты показаны на рис. 4.

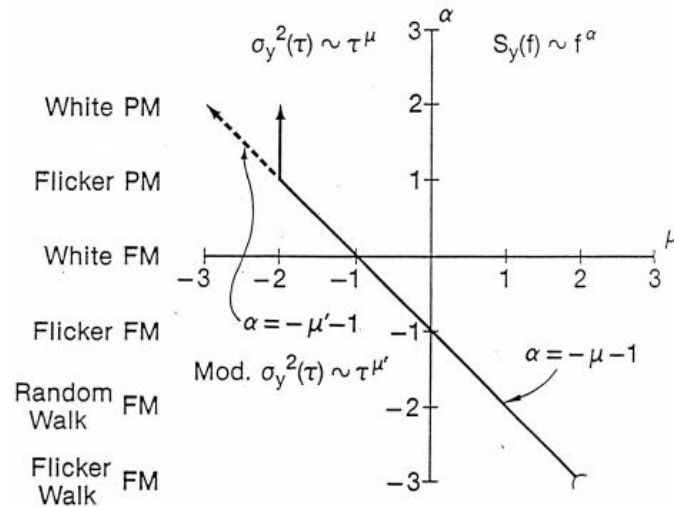


Рис. 4. На графике абсцисса μ – показатель степени при основании τ , отражающем зависимость во временной области. Обратите внимание на изящное соотношение $\alpha = -\mu - 1$, характеризующее преобразование Фурье; мы в шутку называем его «сверхбыстрым преобразованием Фурье», так как ВА можно рассчитать очень быстро по набору равноотстоящих точек.

Надписи слева см. на рис. 3, кроме последней: ЧМ типа фликкерного блуждания

Поскольку $\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^\mu$, при построении графика $\log \sigma_y(\tau) - \log \tau$ наклон будет составлять $\mu/2$; по такому графику мы сможем определить тип шума и его уровень. Такая методика построения графика использовалась в буквальном смысле слова тысячи раз, чтобы обеспечить огромное преимущество сверхбыстрого преобразования Фурье.

На рис. 4 можно заметить неопределенность ВА при $\mu = -2$. Простое уравнение менее применимо, и невозможно определить разницу между фазовой или временной модуляцией (ФМ) типа белого шума и ФМ типа фликкер-шума. Это создавало значительные трудности при определении параметров часов в течение 16 лет после изобретения ВА. Хотя имела место неопределенность зависимости в этой области, мы знали, что сможем решить проблему, поскольку сохранялась чувствительность в измерительной полосе частот. Модулировать полосу частот измерительной системы было неудобно, поэтому этот подход не был реализован. Но в 1981 г. мы открыли способ модуляции полосы частот программным образом, и это стало прорывом, приведшим к созданию МВА, концепция которой показана на рис. 5.

Программную модуляцию полосы частот можно осуществить следующим образом. Всегда имеется конечная полоса частот измерительной системы. Назовем ее аппаратной полосой f_h . Пусть $\tau_h = 1/f_h$. Тогда всякий раз при выборе из данных фазового или временного показания оно будет иметь измерительное временное окно τ_h . При осреднении n таких выборок временное окно программ-

но увеличивается в n раз, $\tau_s = n\tau_h$. Пусть $\tau_s = 1/f_s$, следовательно, увеличивая количество осредняемых выборок, мы уменьшаем программную полосу частот. Нам удалось показать, что, модулируя полосу частот таким образом, мы исключали неопределенность, обеспечивая тем самым пригодность уравнения простого сверхбыстрого преобразования Фурье для всех интересующих нас степенных шумовых процессов, т.е. $\alpha = -\mu' - 1$. Между f_s , показанной ниже, и f_s в приведенных выше уравнениях существует неизвестный коэффициент пропорциональности, но, к счастью, нам не нужно его знать для определения параметров данных.

На рис. 5 представлена программная модуляция полосы частот для $n = 4$; n может принимать любые целые значения от 1 до $N/3$, где N – общее количество данных, отстоящих друг от друга на τ_0 .

In 1981 we learned how to modulate the bandwidth in the software;
fundamental breakthrough

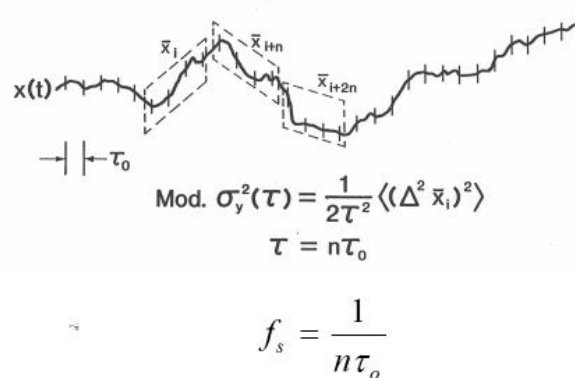


Рис. 5. Методика программной модуляции диапазона частот, используемая в технике модифицированной вариации Аллана для снятия неопределенности при $\mu = -2$. Программная модуляция позволяет охватить все степенные спектральные модели от $\alpha = -3$ до $\alpha = +2$, т.е. весь диапазон полезных шумовых моделей для большинства часов. На рисунке представлен случай для $n = 4$.

Текст над рисунком:

В 1981 г. мы изучали, как осуществить программную модуляцию полосы частот;
фундаментальный прорыв

О неэффективности вариаций, зависящих от объема данных

Вернемся назад в 1964 г. Доктор Джеймс Барнс показал [2], что второй и третий конечноразностные операторы временных вариаций часов дают сходящуюся статистику при наличии ЧМ типа фликкер-шума. Его диссертация на соискание степени доктора наук была посвящена использованию кварцевого генератора, откалиброванного с помощью первичного цезиевого эталона частоты NBS для построения шкалы времени NBS и соответственно всего гражданского сектора США (для оборонного сектора официальным эталоном времени является аппаратура Вашингтонской обсерватории).

В магистерской диссертации я показал расхождение классической дисперсии, т.е. непригодность ее как функции количества данных для представления вышеописанных степенных шумовых процессов. Степень расхождения зависит

как от количества данных в выборке, так и от типа шума. Другими словами, классическая дисперсия зависела от объема данных для всех степенных шумовых моделей, используемых для описания часов, кроме ЧМ типа классического белого шума. Таким образом, считалось, что классическая дисперсия будет неэффективна при определении характеристик атомных часов, так как в этом случае требовались модели шумов, отличных от белого шума. Считается, что проблема расхождения существует во всех областях метрологии и является результатом физических процессов в природе и воздействия окружающей среды на все, что бы мы ни измеряли.

Я использовал двухвыборочную вариацию в качестве нормирующего коэффициента, зная из работ Лайтхилла и Барнса [1, 2] о ее сходимости и регулярности для всех интересующих нас степенных спектральных процессов, применяемых при моделировании часов и измерительных систем. Эту вариацию можно записать следующим образом:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\Delta y)^2 \rangle = \frac{1}{2\tau^2} \langle (\Delta^2 x)^2 \rangle,$$

где скобки $\langle \rangle$ означают математическое ожидание, или среднее по ансамблю, а 2 в знаменателе нормализует это значение, чтобы оно равнялось классической дисперсии в случае ЧМ типа классического белого шума. Дон Халфорд (Don Halford), руководитель моего сектора в то время, назвал эту вариацию вариацией Аллана, с тех пор и используется это название. При взятии квадратного корня из вариации она становится девиацией Аллана – мне поначалу это не понравилось (англ. *deviation* – отклонение), но потом я сказал себе: «У меня нет отклонений!». Девиация – это критерий оценки качества (изменение тактовой частоты) – чем меньше, тем лучше.

Отношение N -выборочной дисперсии к вариации Аллана как функция от N показано на рис. 6.

**This ratio is called the bias function, $B_1(N)$;
can be used to ascertain kind of noise:**

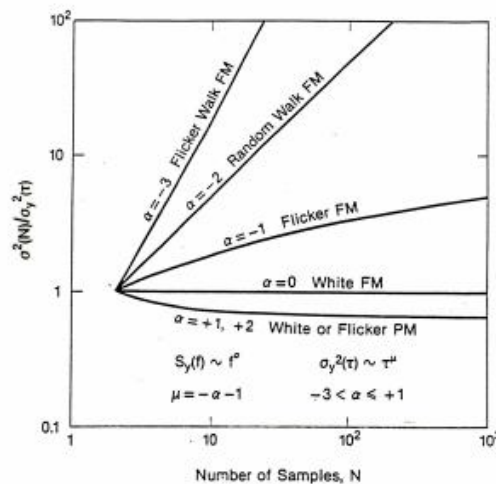


Рис. 6. Зависимость классической дисперсии от объема данных при различных видах степенных шумовых процессов, используемых для моделирования прецизионных генераторов и атомных часов, как функция объема данных.

Надпись над рисунком:

Это отношение называется функцией смещения, $B_1(n)$, и может быть использовано для определения типа шума.

N -выборочная дисперсия является классической дисперсией для N выборок, поэтому становится понятно, почему ее использование неэффективно для определения характеристик различных видов шумов: во многих случаях она не сходится и является смещенной как функция N во всех случаях, кроме классического белого шума. Можно превратить эту зависимость в преимущество и использовать для описания типа шума с помощью функции смещения B_1 : $B_1(N) = \sigma^2(N) / \sigma_y^2(\tau_0)$.

После издания специального выпуска Трудов IEEE по стабильности частоты в 1966 г. [2] руководство IEEE обратилось к Дж. Барнсу с просьбой возглавить группу экспертов и подготовить специальную статью по теме «Определение стабильности частоты». Статья была опубликована в 1971 г., в ней в качестве мер стабильности частоты рекомендовалось использовать спектральную плотность $S_y(f)$ и двухвыборочную вариацию. Авторы статьи назвали эту вариацию также вариацией Аллана.

Текст статьи можно найти на сайте Отделения временных и частотных измерений NIST [4].

Доктор Леонард С. Катлер (Leonard S. Cutler), один из экспертов, впервые написал уравнение временных вариаций в терминах спектральной плотности; оно развито в данной статье (соотношение 23).

Любопытно, что много лет назад меня попросили написать статью под названием «Следует ли использовать классическую дисперсию как основную меру в метрологии эталонов?» [5]. Я изучил эталоны напряжения и концевые меры длины и обнаружил, что в их долговременной работе тоже присутствуют признаки фликкер-шума. Фундаментальный вывод, который был сделан по результатам этого исследования, заключался в том, что если функция смещения $B_1(N)$ не равна 1 в пределах разумного доверительного интервала, то использование классической дисперсии в качестве меры будет неэффективно. Этот вывод не был принят во внимание комитетом по эталонам Международного бюро мер и весов. Зачастую традиции оказываются слишком сильными, даже когда они мешают прогрессу. В то же время вариация Аллана широко и успешно применяется вместе с классической дисперсией в современных эталонах, как в российских (например, [6]), так и в международных (например, [7]).

Следует отметить, что двухвыборочная вариация, или вариация Аллана, не имеет запаздывания. Другими словами, частотные измерения следуют непосредственно одно за другим. Например, i -е отклонение частоты за время осреднения τ можно вывести из временных отклонений следующим образом: $y_i = (x_i - x_{i-1})/\tau$. Это уравнение дает нам истинное среднее отклонение частоты на этом интервале; возможно, оно не будет оптимальной оценкой частоты. Можно заметить, что, если берется среднее из всей совокупности данных, все промежуточные значения аннулируются и остается истинное среднее отклонение частоты: $y_{\text{avg}} = (x_N - x_0)/N\tau$. Это одно из преимуществ, обусловленных отсутствием запаздывания данных. Другое преимущество состоит в том, что для ЧМ типа классического белого шума – главного ограничения для большинства атомных часов – $\sigma_y^2(\tau)$ является оптимальным оператором оценки изменений частоты за время осреднения τ и равна классической дисперсии при минимальных колебаниях интервала между данными.

Дж. Барнс также показал, что $\sigma_y^2(\tau)$ – несмещенная оценка для уровня интегрирующих нас степенных шумовых процессов при моделировании атомных ча-

сов и что она имеет χ^2 -распределение. Время τ при анализе может принимать значения $\tau = n\tau_0$ для любых целых n от 1 до $N/2$. Точность такой оценки наиболее высока при $\tau = \tau_0$, постепенно снижаясь к $n = N/2^1$, где есть только одна степень свободы. На графике зависимости $\sigma_y^2(\tau)$ от τ часто наблюдаются слишком низкие значения при приближении τ к середине ряда данных; что свидетельствует о недостаточном числе степеней свободы. Дэвид А. Хоуи (David A. Howe) и его группа в NIST занимались этой проблемой и разработали несколько изящных решений путем увеличения числа степеней свободы долговременных данных; работа ведется до сих пор и представляет исключительный интерес [8].

В других областях метрологии необходимо уделять должное внимание проблеме запаздывания, если шум не является белым. Как показано в моей диссертации, время запаздывания влияет на результирующую вариацию, если шум не белый. В [9] данный вопрос освещен для зависимости от N и запаздывания с функциями смещения $B1$ и $B2$. Далее будет показано, что данная проблема не является столь уж значительной в общей метрологии, она уникальна только для временных и частотных измерений.

Временная вариация

В конце 1980-х годов ко мне обратились представители телекоммуникационной промышленности США за помощью в разработке критерия для определения параметров телекоммуникационных сетей. Я попросил доктора Марка Вейсса (Marc Weiss), который работал со мной в одной группе в NIST, помочь мне. Это была потрясающе интересная работа, мы проанализировали большое количество данных, чтобы найти наилучший параметр. В результате мы разработали временную вариацию $BB = \tau^2 MVA/3$. Цифра три в знаменателе нормализует вариацию, уравнивая ее с классической дисперсией в случае ФМ типа классического белого шума. Можно показать, что для ЧМ типа белого шума BB является оптимальным оператором оценки изменений фазовых или временных невязок.

Эти исследования были продолжены в США, и к 1988 г. три вышеназванные вариации были признаны IEEE в качестве стандартных временных характеристик на международном уровне. Можно отметить три основные области применения вариаций:

1. BA – для определения характеристик эталонов частоты и времени.
2. MVA – для определения характеристик систем распределения сигналов точного времени и образцовых частот.
3. BB – для определения погрешностей синхронизации в телекоммуникационных сетях.

После разработки каждой вариации появилось много других областей применения. $ВД$ (временная девиация, квадратный корень из BB) не имеет запаздывания и поэтому стала стандартным параметром в международной телекоммуникационной промышленности. Все три вариации могут применяться во многих других областях метрологии – примером этому служит изучение погрешностей навигационных систем и гироскопов. При запросе «Вариация Аллана» сайт Google.com выдает около 50000 результатов.

¹ У автора $\tau = N/2$ (Прим. науч. ред.).

Уравнения и их преобразования

Уравнения для вычисления ВА, МВА и ВВ по временным отклонениям для N данных имеют вид:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2(N-2n)} \sum_{i=1}^{N-2n} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i)^2,$$

$$\text{Mod.}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2 n^2 (N-3n+1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left(\sum_{i=j}^{n+j-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right)^2,$$

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{1}{6n^2 (N-3n+1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left(\sum_{i=j}^{n+j-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right)^2,$$

где x_i – данные о временном отклонении с интервалом дискретизации τ_0 и $\tau = n\tau_0$.

Для МВА и ВВ вычисление включает двойное суммирование. Можно было бы предположить, что при этом время вычисления увеличится как N^2 , но, применив некоторые математические процедуры, например пошаговое осреднение (*sample drop-add averaging*), можно сделать эту зависимость линейной. В противном случае могли бы возникнуть значительные трудности при большом объеме данных. Такие процедуры были успешно применены, и в упомянутых далее руководствах по программному обеспечению описаны соответствующие методики вычислений.

Приведенные ниже уравнения демонстрируют, как можно получить три временные вариации из частотных данных. Обратное действие – получение спектральных плотностей путем анализа во временной области – невозможно. Очень полезно анализировать данные в обеих областях. На рис. 7, а показаны вариации в частотной области. На рис. 7, б, в, г изображены окна Фурье, использующие передаточные функции для каждой из трех вариаций.

а)

Translation Between Frequency and Time Domains

$$\tau = n\tau_0$$

AVAR:

$$\sigma_y^2(\tau) = \int_0^\infty 2 \left[\frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \right] S_y(f) df$$

MVAR:

$$\text{Mod } \sigma_y^2(\tau) = \int_0^\infty 2 \left[\frac{\sin^3(\pi f \tau)}{(n\pi f \tau) \sin(\pi f \tau_0)} \right]^2 S_y(f) df$$

TVAR:

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{8}{3n^2} \int_0^\infty \left[\frac{\sin^3(\pi f \tau)}{\sin(\pi f \tau_0)} \right]^2 S_x(f) df$$

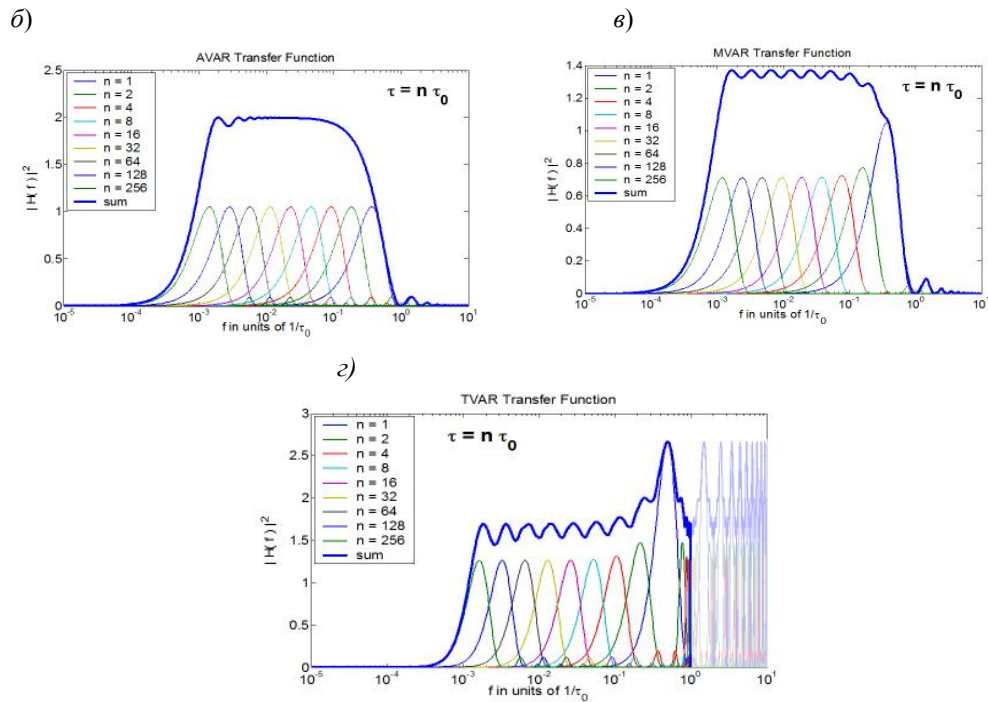


Рис. 7. Три уравнения в частотной области, выведенные из спектральных плотностей (а); окна Фурье, использующие передаточные функции для каждой из трех вариаций (б), (в), (г).

Несколько лет назад меня попросили написать статью на тему «Преобразование критериев стабильности частоты из временной области в частотную и наоборот, а также в степенные спектральные плотности» [10]. В ней содержится множество данных о процедурах преобразования. Соответствующие преобразования представлены в таблице для пяти видов шума

Тип шума	$S_y(f)$	$S_x(f)$
ФМ типа белого шума	$\frac{(2\pi)^2}{3f_h} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^2$	$\frac{1}{\tau_0 f_h} [\tau \sigma_x^2(\tau)] f^0$
ФМ типа фликкер-шума	$\frac{(2\pi)^2}{A} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^1$	$\frac{3}{3.37} [\tau^0 \sigma_x^2(\tau)] f^{-1}$
ЧМ типа белого шума	$2 [\tau^1 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{12}{(2\pi)^2} [\tau^{-1} \sigma_x^2(\tau)] f^{-2}$
ЧМ типа фликкер-шума	$\frac{1}{2 \ln 2} [\tau^0 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$\frac{20}{(2\pi)^2 9 \ln 2} [\tau^{-2} \sigma_x^2(\tau)] f^{-3}$
ЧМ типа случайного блуждания	$\frac{6}{(2\pi)^2} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{240}{(2\pi)^4 11} [\tau^{-3} \sigma_x^2(\tau)] f^{-4}$

$$A = 1.038 + 3 \ell n(2\pi f_h \tau)$$

Оценка, сглаживание и предсказание

Оценка и сглаживание

Бокс и Дженкинс (Box and Jenkins) в книге «Анализ временных рядов» (*Time Series Analysis*) [11] решают задачу оценки и сглаживания для разных случайных процессов. В данной работе я не буду рассматривать их впечатляющие результаты.

Для оценки, сглаживания (а также предсказания) я использую простую, мощную и эффективную теорему: *оптимальная оценка математического ожидания² процесса со спектром белого шума – это среднее арифметическое*. В качестве примера можно взять ФМ типа белого шума: оптимальная оценка фазы или времени представляет собой среднее арифметическое независимых невязок фазы или времени, добавляемых к систематическим компонентам.

Допустим, что мы имеем ЧМ типа белого шума, тогда оптимальная оценка частоты будет средним арифметическим независимых показаний частоты, что эквивалентно разности первого и последнего временных отсчетов, деленной на число данных, если между частотными измерениями нет запаздывания. Как показано ранее, истинная средняя частота равна $y_{\text{avg}} = (x_N - x_0)/N\tau$.

Предсказание

Используя данную выше теорему, получаем оптимальное предсказание на время τ от текущего момента t для часов с ЧМ типа белого шума и средней частотой смещения y_{avg} : $\hat{x}(t + \tau) = x_N + \tau y_{\text{avg}}$. Простое изображение оптимального предсказания времени с помощью этой теоремы для пяти разных видов шумовых процессов показано на рис. 8; для ЧМ типа белого шума y_{avg} полагается нулевым.

Четные показатели степени строго подчиняются данной теореме, но фликкер-шум (нечетные показатели степени) – более сложное явление. Однако для ЧМ типа фликкер-шума существует простой алгоритм предсказания с использованием так называемого предсказателя второй разности. Он очень

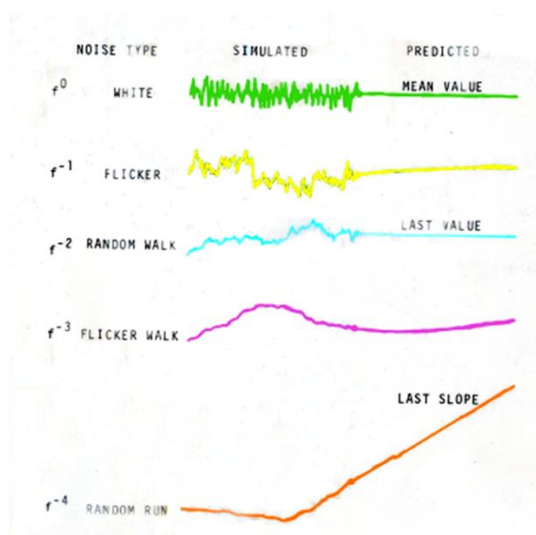


Рис. 8. Оптимальное предсказание для пяти различных видов степенных шумовых процессов, используемых при моделировании временных отклонений в прецизионных часах (белый шум, фликкер-шум, случайное блуждание, фликкер-блуждание, случайный уход (*random run*)). Эти алгоритмы предсказания могут применяться повсеместно

² У автора - «среднего значения» (*Прим. науч. ред.*).

прост и близок к оптимальному: $\hat{x}(t+\tau) = 2x(t) - x(t-\tau)$, где t – текущее время. Такая зависимость ассоциируется с поведением рынка ценных бумаг, которое сродни фликкер-шуму.

Знание нестабильности часов $\sigma_y(\tau)$ позволяет оценить возможность ее прогнозирования во времени. С использованием приближенного эмпирического метода, прогноз дается выражением $\tau \cdot \sigma_y(\tau)$. На рис. 9 в соответствии с этим выражением показана возможность прогнозирования во времени для различных устройств синхронизации, используемых в ходе истории человечества.

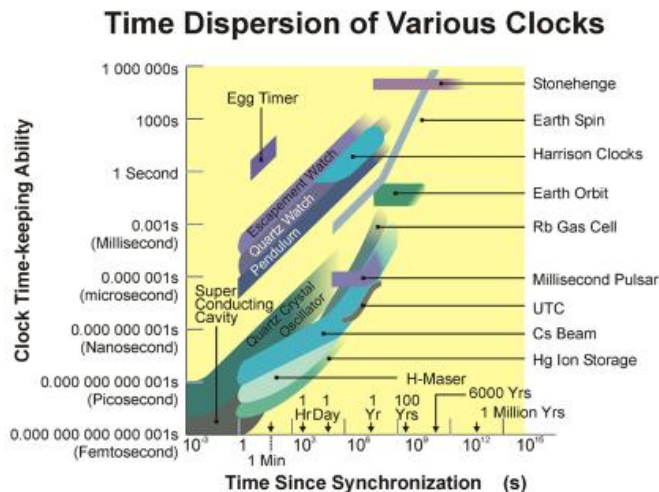


Рис. 9. Этот график составлен в 1997 г. Если нужно было бы включить в него иттербиевые часы, они были бы представлены линией $\tau^{+1/2}$, проходящей через 40 фс за 7 ч; это было бы примерно в 100 раз лучше, чем самые лучшие часы, представленные здесь.

Надпись над рисунком:

Временная дисперсия разных видов часов

Надписи на рисунке:

Ось абсцисс: Время с момента синхронизации

Ось ординат: Возможность хронометрирования

На рисунке справа сверху вниз:

Стоунхендж, Вращение Земли, Часы Гаррисона, Орбита Земли, Рубидиевая газовая ячейка, Миллисекундный пульсар, Всемирное координированное время, Цезиевый лучевой эталон частоты, Ртутная ионная ловушка, Водородный мазер

На рисунке слева сверху вниз: Бытовой таймер, Часы со спусковым механизмом, Кварцевые часы, Маятник, Сверхпроводящий резонатор, Кварцевый генератор

Для навигационных приложений можно построить аналогичный график, который демонстрировал бы оценку дисперсии положения для разных навигационных устройств. График дал бы возможность понять, какие технологии можно скомбинировать, чтобы добиться значительного улучшения работы приборов.

Систематические погрешности

Эффективной представляется следующая модель временных отклонений в часах:

$$x(t) = x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} D_{\underline{x}} \times t^2 + \varepsilon(t),$$

где x_0 и y_0 соответственно погрешности синхронизации и синтонизации при $t = 0$, D – дрейф частоты, $\varepsilon(t)$ – случайные погрешности (в дополнение к первым трем систематическим составляющим). Удобно вычесть из данных систематические погрешности, чтобы случайные эффекты были наглядны и более качественно проанализированы. Такой подход может оказаться очень полезным.

Если в часах присутствует дрейф частоты, как обычно и бывает, то он влияет на ВА, МВА и ВВ следующим образом:

$$\sigma_y(\tau) = \text{mod.} \sigma_y(\tau) = \frac{D\tau}{\sqrt{2}} \text{ and } \sigma_x(\tau) = \frac{D\tau^2}{\sqrt{6}}.$$

Пример воздействия дрейфа частоты на ДА показан на рис. 10.

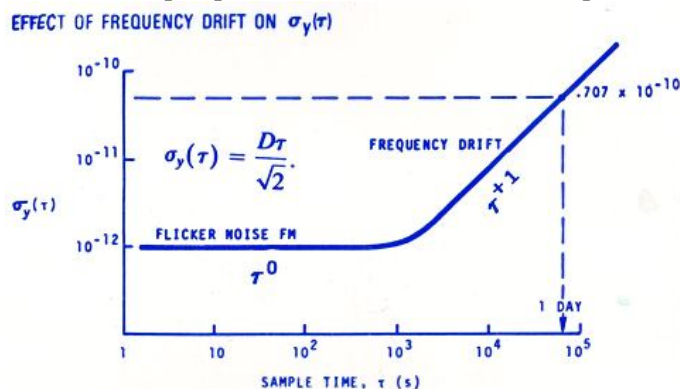


Рис. 10. Влияние дрейфа частоты на ДА

При наличии дрейфа частоты значения $\sigma_y(\tau)$ в области воздействия дрейфа находятся строго на линии τ^1 . Однако в условиях случайного шума эти значения будут отклоняться от линии.

Частотная модуляция f_m также оказывает систематическое воздействие, которое характеризуется с помощью ДА: $\sigma_y(\tau) = \frac{x_{pp}}{\tau} \sin^2(\pi f_m \tau)$, где x_{pp} – размах модуляционного сигнала. На рис. 11 показано влияние частотной модуляции на ДА.

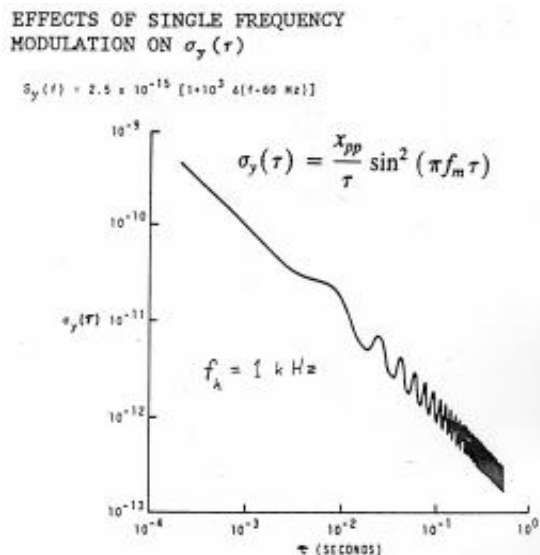


Рис. 11. ДА при наличии в данных частотной модуляции (f_m)

МВА, ВА и ВВ также подвергаются воздействию частотной модуляции. На рис. 12 показано ее влияние на ВВ.

EFFECT OF FREQUENCY MODULATION ON TDEV

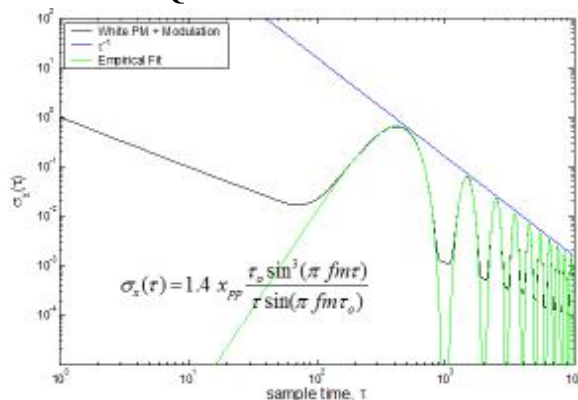


Рис. 12. Воздействие частотной модуляции на ВВ при наложении её на сигнал и шум. ФМ типа белого шума приводит к значениям $\tau^{-1/2}$, представленным на графике. Среднее модуляционного сигнала снижается, как τ^{-1} . Уравнение, описывающее влияние модуляции, получено эмпирическим путем

При $\tau = n/f_m$ эффект модуляции исчезает, если n – целое положительное число, что позволяет использовать эти три вариации как инструменты низкочастотного спектрального анализа для четких (bright) линий частоты Фурье в данных. Согласно моему опыту, нередко низкочастотные спектральные линии при использовании такого нулевого подхода лучше наблюдаемы во временной области, чем в частотной.

Примеры и области приложения вариаций Атомные часы в 1960-1970 годах

QUARTZ OSCILLATOR (DIANA) VS COMMERCIAL CESIUM (#601)

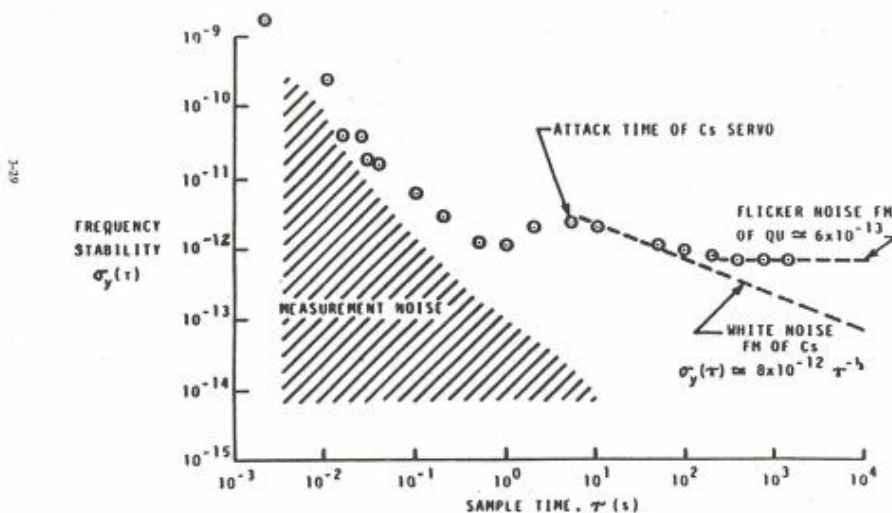


Рис. 13. ДА прецизионного кварцевого генератора и цезиевых лучевых атомных часов промышленного производства

Слева направо: Стабильность частоты, Время захвата в цезиевых часах, ЧМ типа фликкер-шума кварцевого генератора, ЧМ типа белого шума цезиевых часов, Шум измерений

На рис. 13 представлен график нестабильности частоты прецизионного кварцевого генератора и цезиевых атомно-лучевых часов промышленного производства. Видно, что время выборки τ в диапазоне менее 1 с влияет на шум измерений, как τ^{-1} . График был составлен до введения МДА, поэтому невозможно точно назвать тип шума из-за проблемы неопределенности ДА на этом графике. Подобную проблему неопределенности я наблюдал на некоторых графиках нестабильности навигационных устройств. Когда график ДА приобретает характер зависимости τ^{-1} , необходимо проанализировать данные с помощью МДА, чтобы снять неопределенность относительно шумовой модуляции, присутствующей в данных.

Значение $\sigma_y(\tau)$ увеличивается по мере приближения времени выборки или осреднения к 10 с вследствие времени захвата, необходимого для введения кварцевого генератора цезиевых часов в резонанс с цезиевой трубкой. Следующий отрезок характеризуется зависимостью $\tau^{-1/2}$ или $\mu = -1$, что означает, что $\alpha = 0$ согласно нашему простому сверхбыстрому преобразованию Фурье, и это – классический белый шум, измеряемый для цезиевых атомных часов. При самых длительных временах осреднения наблюдается зависимость τ^0 , которая затем соответствует $\alpha = -1$ вследствие ЧМ типа фликкер-шума прецизионного кварцевого генератора. Даже при наличии проблемы неопределенности ДА в указанные годы мы были невероятно рады тому, что нашли способ так легко характеризовать тип шума и уровень нестабильности часов, используемых для отсчета времени в США.

В 1965 г. в NBS (Боулдер, Колорадо) было проведено очень интересное сличение атомных часов. Боб Вессот (Bob Vesot) привез водородный мазер из Бостона, Массачусетс, Гарри Петерс (Harry Peters) представил водородный мазер из NASA центра Годдарда, Белтсвилл, Мериленд, а Лен Катлер (Len Cutler) привез цезиевые часы производства Hewlett Packard из Пало Альто, Калифорния. Мы использовали первичный эталон частоты и системы сбора данных. По результатам этих грандиозных сличений часов была написана интересная статья, авторский коллектив которой включал двенадцать исследователей [12].

Мои обязанности тогда заключались в обеспечении эталонной шкалы времени NBS для сличений всех этих часов. До этого момента расчет времени для NBS и гражданского сектора США осуществлялся по алгоритму, разработанному Дж. Барнсом. С его помощью я написал новый алгоритм для шкалы времени – AT-1. Позднее в него были внесены некоторые усовершенствования Томом Паркером и Джудой Левиным (Tom Parker and Judah Levine), и именно по этому алгоритму до сих пор вырабатывается время для США. Данный алгоритм построения временной шкалы стал основным применением вариации Аллана и привел к созданию программных часов квазиреального времени со следующими возможностями оптимизации:

- выходной сигнал программных часов всегда лучше, чем входной сигнал, создаваемый самыми лучшими физическими часами;
- при сбое в работе часов их данные исключаются (не используются), что дает возможность избежать ненужных возмущений;
- при включении в алгоритм расчета времени каждым часам присваивается оптимальный весовой коэффициент;

- веса могут быть адаптированы, т.е. при улучшении работы часов их коэффициент увеличивается, и наоборот;
- оптимальное время каждых часов, а также оптимальная оценка частоты часов уточняются на каждом цикле измерений;
- как кратковременная, так и долговременная нестабильность выходного сигнала программного ансамбля оптимизируются ;
- алгоритм может работать с ЧМ типа белого шума, ЧМ типа фликкер-шума и ЧМ типа случайного блуждания – т.е. с видами шумовых процессов, моделирующих работу используемых атомных часов.

Изначально я работал с компьютером PDP-8 и ансамблем из 8 часов; алгоритм AT-1 с 94 строками программы выдавал сообщения об ошибках. Пришлось использовать некоторые переменные трижды, чтобы не превысить имеющиеся ограничения компьютера. Интересно наблюдать, как работает этот алгоритм: кажется, что он, как живой, реагирует на каждый шаг часов. По алгоритму AT-1 официальное время для США вырабатывалось в течение почти 50 лет.

Нестабильности новых оптических часов с использованием полной девиации Аллана

Рассмотрим великолепные новые оптические часы. График ДА (рис. 14) составлен по данным, полученным в NIST (Боулдер, Колорадо) в 2013 г. при сличениях двух иттербиевых оптических часов. Для построения графика использован метод полной ДА, разработанный Дэвидом А. Хоуи и его группой [8] и обеспечивающий оптимальную достоверность ДА-оценок долговременной нестабильности. Эти оценки представляют особую ценность, поэтому методика полной ДА значительно увеличивает объем получаемой информации.

Наилучшая оценка нестабильности, достигнутая на настоящий момент, составляет $\sigma_y(\tau = 25000 \text{ с}) = 1,6 \times 10^{-18}$. Это эквивалентно погрешности в 50 пс за год (за 50 пс свет проходит расстояние в 1,5 см), что в 20 раз лучше, чем наносекундная точность, необходимая для поправок GPS при их загрузке как минимум раз в день. На графике видно, что почти идеальные атомные часы ($\tau^{1/2}$) характеризуются ЧМ типа белого шума на уровне $3,2 \times 10^{-16}$ за 1 с в течение интервала времени осреднения 40 с.

World record for stability NIST ytterbium optical lattice clock

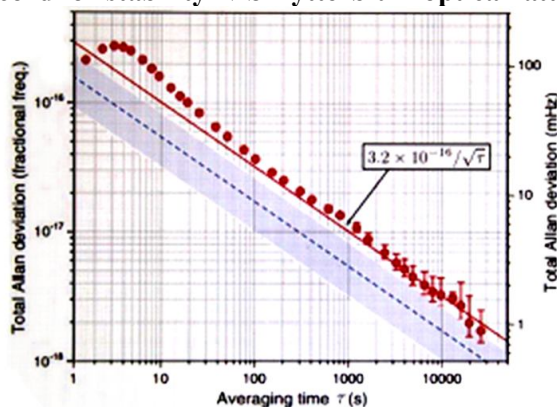


Рис. 14. Сличение двух иттербиевых оптических атомных часов, работающих при частоте 518 295 836 591 600 Гц

Надпись над рисунком: Мировой рекорд стабильности: иттербиевые оптические атомные часы NIST

Синхронизация миллисекундного пульсара с помощью модифицированной девиации Аллана

Вернемся в 1982 год. Именно тогда группой исследователей (Дональд Бекер, Шри Кулкарни, Карл Хейлес, Майкл Дэвис и Миллер Госс (Donald Backer, Shri Kulkarni, Carl Heiles, Michael Davis, and Miller Goss) был открыт первый миллисекундный пульсар [13]. Пульсар получил название PSR B1937+21, где PSR – сокращение от слова *pulsar*, цифры обозначают склонение и прямое восхождение пульсара, а буква В – принадлежность координат к эпохе 1950.0. Пульсар продемонстрировал наиболее точную астрономическую синхронизацию среди всех обнаруженных до этого объектов. Я заинтересовался статьей этих исследователей и в 1984 г. по приглашению доктора Майкла Дэвиса, научного руководителя Аресибской обсерватории (Пуэрто-Рико), установил приемник GPS для синхронизации их часов, которые выполняли измерения пульсара, с лучшими в мире атомными часами. На рис. 15 представлены сложная система измерений миллисекундного пульсара и номинальные точности каждого звена измерительной системы.

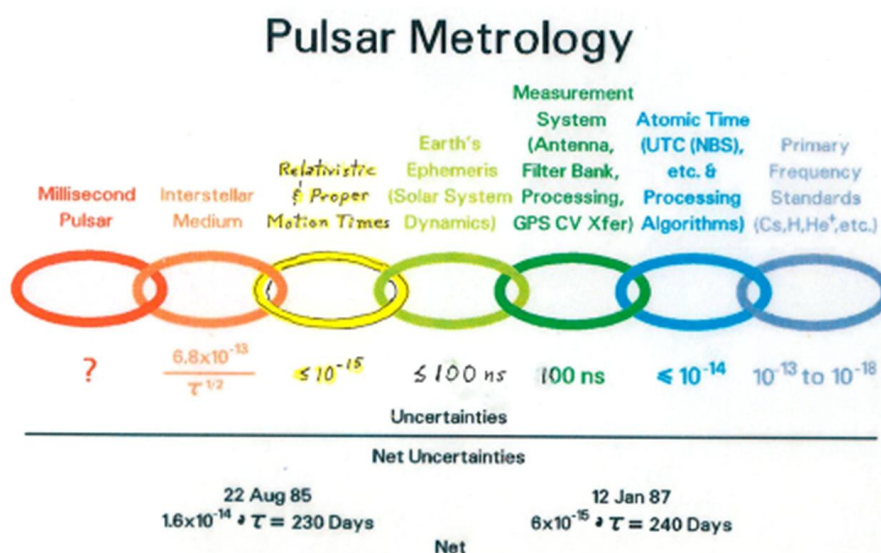


Рис. 15. Измерительная система для миллисекундного пульсара.

С 1985 по 1987 гг. благодаря помощи, которую мы оказали исследователям, точность измерений нестабильности улучшилась примерно в три раза.

Слева направо и сверху вниз: Миллисекундный пульсар, Межзвездная среда, Время релятивистского и истинного движения, Эфемерида Земли (Динамика Солнечной системы), Измерительная система (антенна, набор фильтров, обработка, скорость передачи приемника GPS), Атомное время (UTC(NBS) и др.) и алгоритмы обработки), Первичные эталоны частоты (Cs, H, He⁺ и др.)
Неопределенности / Чистые неопределенности

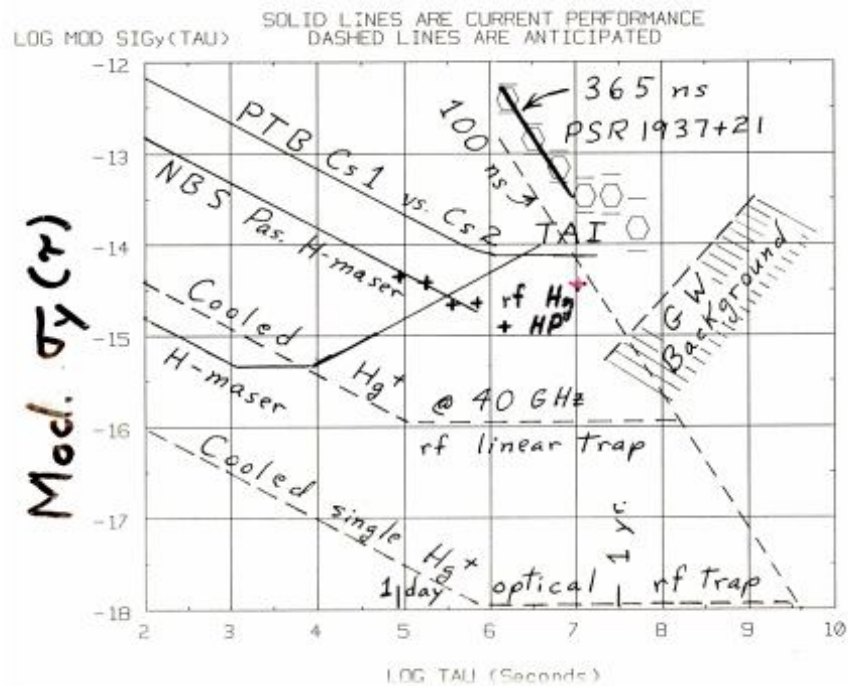


Рис. 16. В состав PTB (Physikalisch Technische Bundesanstalt) входит лаборатория первичных эталонов частоты Германии. Pas на рисунке означает пассивный водородный мазер, H-maser – активный водородный мазер. При времени осреднения менее чем 100 с активные водородные мазеры часто демонстрируют ФМ типа белого шума (график $\tau^{-3/2}$, сходный с графиком шума измерений пульсара). Пульсар PSR 1937+21 расположен на расстоянии примерно 1/7 поперечника Галактики, и мы надеялись на то, что сможем увидеть возмущения гравитационных волн на траектории, обозначенной на рисунке GW Background

На рис. 16 представлен пример преимуществ модифицированной вариации Аллана. При изучении данных я наблюдал случайные блуждания (спектр f^2) в промежутке между двумя различными частотами наблюдений пульсара. При этом полагалось, что количество электронов вдоль траектории было постоянным. Это предположение оказалось неверным, и при применении поправки $1/f^2$ на количество ионов удалось с помощью МДА подавить эффект случайных блужданий, так что сохранилась только остаточная ФМ типа белого шума.

В течение нескольких следующих лет исследователи провели модернизацию Аресибского телескопа стоимостью 25 миллионов долларов, в ходе которой были введены значительные улучшения в надежде снизить уровень шума до указанного на рис. 16 значения 100 нс.

В 1990 г. я продемонстрировал график нестабильности частоты на семинаре по миллисекундным пульсарам в Калифорнийском университете в Беркли.

Поскольку считалось, что новые быстровращающиеся пульсары могут соперничать с атомными часами, график имел фундаментальное значение. Однако даже если после модернизации пульсары достигнут уровня шума (ФМ типа белого шума) 100 нс, необходимо осреднять данные примерно за 200 лет, чтобы достичь уровня нестабильности 10^{-18} – а этот уровень уже достигнут лучшими часами. Другими словами, каждые 200 лет вы получите одно значение временной шкалы на уровне нестабильности 10^{-18} – такие часы никак нельзя

назвать конкурентоспособными! Кстати, стабильность иттербиевых часов уже в три раза превзошла наилучшую ожидаемую стабильность для одного охлажденного иона ртути (по данным на 2013 г.).

Возможность улучшения точности GPS

Навигационные спутники GPS вращаются вокруг Земли по орбите, равной примерно 4,2 радиуса Земли. Такое расстояние приводит к значительным геометрическим проблемам при определении вертикального расстояния от спутников до центра Земли, так как векторы станций слежения слишком близки к параллели. В системе GLONASS проблема решается путем использования световозвращающих рефлекторов на спутниках и определения лазером расстояния от наземной станции с известными координатами до каждого спутника. Погрешность при этом уменьшается до 5 см, что почти в 12 раз лучше, чем в системе GPS.

Использование третьего закона Кеплера обеспечивает необходимую ортогональность для решения задачи определения вертикального расстояния:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3, \quad \text{где } T \text{ — период обращения по орбите,}$$

G — универсальная гравитационная постоянная, M — масса Земли, r — радиус орбиты спутника. Орбита направлена по касательной к радиус-вектору, поэтому если мы можем определить точку максимального подхода к станции слежения с известными координатами, то будем располагать ортогональными данными для определения радиус-вектора. Доплеровский сдвиг опорного генератора спутника снижается до нуля в точке ближайшего подхода к станции слежения. Этот нулевой доплеровский сдвиг обеспечивает нам точный маркер на орбитальном периоде T с неопределенностью δT . В соответствии с вышеприведенным уравнением можно вывести неопределенность радиус-вектора: $\delta r = \frac{2}{3} r \frac{\delta T}{T}$. Если применять современные высокоточные атомные часы и использовать МДА, чтобы убедиться, что невязки являют собой ФМ типа белого шума, т.е. все систематические компоненты удалены, то расчеты показывают, что δr можно довести до уровня менее 1 см. Уменьшение δT возможно потому, что, если предельным шумом измерения является ФМ типа белого шума, его значение уменьшается пропорционально объему данных в степени $-3/2$ в течение видимого прохода спутника.

Однако существуют важные условия корректности упомянутого уравнения. Совместно с профессором Нилом Эшби (Neil Ashby), который разрабатывал релятивистские уравнения для GPS, мы работали над моделированием этого подхода в 1990-х гг. С тех пор атомные часы значительно улучшились, и выполнение требования, связанного с нулевым g , как для проекта Gravity Probe-B, сейчас более достижимо. Есть еще некоторые трудности, но преимущества все же значительнее, одно из которых — возможность работы в любую погоду. Один из основных недостатков данного подхода состоит в том, что для него требуются значительные изменения в архитектуре системы, но эти изменения можно реализовать в ходе целенаправленного пошагового процесса.

Осознавая, что эта методика весьма перспективна, я отправил письмо в Управление системой GPS. Это описано в главе 20 моей книги *It's About Time* [14], а также в приложении к книге [15].

Новая единая теория поля: результаты, подтвержденные с помощью девиации Аллана

DIALLEL-FIELD LINE COUPLING OF THE PLANETS TO THE SUN SHOWN IN SUNSPOT ACTIVITY

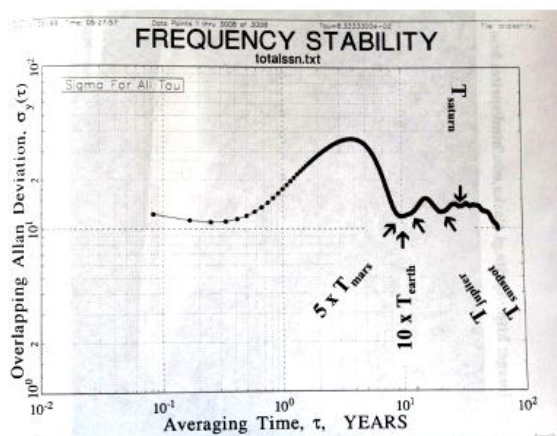


Рис. 17. Кривая ДА для данных о солнечной активности за последние 100 лет

Надпись над рисунком:

Связь планет с Солнцем по парным линиям поля, выражающаяся в активности солнечных пятен.

С 1999 г. мы работали над пониманием новой концепции применительно к единой теории поля. Концепция описана в статьях на нашем сайте [16] и в главе 21 моей книги [14]. В книге содержатся удивительные новые данные. С помощью данной концепции, которую мы назвали «Парные линии поля», можно охватить все четыре силовых поля и даже больше, и связать все со всем (connect everything to everything). Книга Линн МакТаггерт «Поле» [17] содержит описание множества экспериментов, согласующихся с этой новой единой теорией поля.

Мы вначале провели эксперименты, чтобы продемонстрировать существование этих парных линий и наличие у них квантовых состояний. Хотя квантовые состояния в атомах и молекулах обычно мыслятся сферическими или эллиптическими, в структурах парного поля они цилиндрические (nominally cylindrical). Осенью 2000 г. мы впервые наблюдали излучения квантовых переходов таких линий. Эти и некоторые другие эксперименты были проведены в лаборатории лазерной физики Университета Бригама Янга. Все эти эксперименты описаны в главе 21 моей книги [14]. На настоящий момент проведено 7 экспериментов, подтверждающих новую теорию парных линий единой теории поля. На рис. 17 представлена связь планет с Солнцем по парным линиям поля и их воздействие на активность солнечных пятен. Я проанализировал данные о солнечных пятнах за 100 лет с помощью ДА, как показано на рис. 17. В соответствии с новой единой теорией поля мы обнаружили периоды, когда все большие планеты присутствовали в данных о солнечных пятнах, кроме Урана, для которого вековой промежуток съема данных оказался недостаточным. Я также использовал сведения о массе, магнитных полях и ориентации планет, чтобы понять, можно ли дублировать (распространить) данные за пределы последних 100 лет. Коэффициент корреляции составил 80 %. Нам еще многое предстоит узнать. Мы словно дети в гигантском лесу.

Выводы

С тех пор, как я закончил свою магистерскую работу, прошло полвека. За эти 50 лет моей работы в области временных и частотных измерений вариации Аллана были значительно усовершенствованы, а область их применения

расширилась. Подобный рост и развитие я наблюдаю также в применениях вариаций Аллана в навигации и метрологии.

Говоря об анализе литературы по этой теме, я хотел бы выделить три технические области и высказать следующие предложения.

Во-первых, в течение 16 лет мы были вынуждены мириться с проблемой неоднозначности вариации Аллана, когда ее квадратный корень (ДА) меняется, как τ^{-1} , т.е. с невозможностью различить ФМ типа белого шума и ФМ типа фликкер-шума. Эта проблема неоднозначности была разрешена в 1981 г. с разработкой модифицированной вариации Аллана, которая позволяла программно модулировать полосу частот. Погрешности квантования в навигационных системах имеют спектр белого шума, поэтому использование МДА было бы очень эффективно. Просмотрев несколько статей по навигации, написанных специалистами, использующими вариацию Аллана, я обнаружил, что МДА применяют очень немногие. В случае погрешностей квантования МДА позволяет осреднить шум до $\tau^{-3/2}$, что, в свою очередь, дает возможность наблюдать другие типы шума и быстрее решать проблемы нестабильности. МДА также является оптимальным инструментом осреднения для таких погрешностей. Также при необходимости узнать скорость в присутствии остаточного белого шума, использование линейной регрессии улучшает оценку кривой в $N^{3/2}$ раз, где N – количество данных в регрессионном анализе. Оценка кривой становится оптимальной по той же причине, по какой МДА улучшается, как $\tau^{-3/2}$. Я с большой радостью вижу, что исследователи в области навигации начинают применять эту методику.

Во-вторых, после осреднения погрешностей квантования ДА работает хорошо и может служить эффективным параметром для описания средневременных и долговременных нестабильностей. Но поскольку вариация Аллана имеет распределение χ -квадрат, то, когда количество степеней свободы оказывается слишком мало для самых больших времен осреднения данных, значения ДА часто оказываются слишком малыми. Эта проблема в большой степени была решена Дэвидом А. Хоуи и его группой в NIST [8], Боулдер, Колорадо за счет применения полной ДА и ее модификаций (см. Обзор литературы). В их работе весьма рациональным образом добавляются новые степени свободы. Работу Хоуи можно также успешно применять и для анализа навигационных погрешностей. Зачастую получить долговременные данные очень дорого, поэтому применение полной ДА и ее разновидностей обеспечивает более эффективное использование данных.

И в-третьих, систематические погрешности часто представляют большую трудность. Наш многолетний опыт подсказывает, что следует по мере необходимости устранять систематические погрешности из данных перед анализом невязок в части их шумовых характеристик. Делается это обычно в ходе постобработки, но возможно и в реальном времени с помощью правильно выбранного фильтра и алгоритмов предсказания, которые смогут оценить и исключить систематические погрешности. Поскольку методики оптимального оценивания зависят от типа шума, данную задачу можно решить рекурсивно или на основе изначальных знаний шумовых характеристик системы. Принцип экономии диктует использование самого простого и самого эффективного параметра для анализа шума. ДА соответствует этому требованию во многих областях метрологии, и, думаю, именно поэтому она получает такое широкое распространение. Однако, если не исключить систематические погрешности из

данных перед анализом шума, они часто негативно влияют на долговременные значения ДА. Именно по этой причине специалисты по программам GPS перешли от вариации Аллана к вариации Адамара, которая является третьим разностным оператором временных невязок и нечувствительна к систематическому дрейфу частоты – настоящему бедствию для рубидиевых атомных часов, используемых в GPS-спутниках. Но вариация Адамара – неэкономный метод, можно было бы получить лучшие оценки достоверности анализа шума путем оценивания и исключения дрейфа частоты, а затем использовать ДА или полную ДА (или ее разновидность) для анализа шумовых характеристик невязок, из которых выводятся параметры фильтра Калмана для оптимизации работы GPS.

Обзор литературы

О трех вариациях, описанных в данной статье, существует множество литературы. Первым делом я хотел бы рекомендовать читателю посетить сайт Отделения временных и частотных измерений NIST [18], где представлены многие публикации. Также отсылаю читателей к стандарту IEEE Standard 1139-1988: *Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology* [19], Техническому замечанию NIST Technical Note 1337, *Characterization of Clocks and Oscillators* [20], пособию «Selection and Use of Precise Frequency and Time Systems» [21], Hewlett Packard Application Note 1289, *The Science of Timekeeping* [22], работам по вариациям, проведенным в NIST в 2000–2014 гг., обеспечивающим дополнительные степени свободы и более высокую достоверность оценок вариаций [23], книге “Handbook of Frequency Stability Analysis” W. J. Riley [24], также доступной на www.wiley.com, и главе 20 моей книги, изданной в 2014 г. [14, 15]; Приложение J в ней содержит буклет [22]. Также рекомендую ознакомиться с публикациями на моем веб-сайте: www.allanstime.com. Вышеуказанные публикации W. J. Riley содержат ПО анализа, включая описание преимуществ полной ДА и т.д. По этой и другим причинам его программы постоянно используются специалистами в области частотно-временных измерений.

Как уже было сказано выше, если задать в поиске в Google «Allan variance» (на английском языке), вы получите около 50 000 результатов. Если добавить к запросу слово «навигация», получите порядка 3000 результатов. Частично просмотрев эти 3000 результатов, я нашел некоторые очень интересные статьи. Должен оговориться, что, хотя я и вхожу в навигационное сообщество и являюсь членом Института навигации, я не считаю себя экспертом по литературе данной тематики. Статьи [25–33] представляются мне наиболее выдающимися, но в некоторых из них остается нерешенной проблема неоднозначности ДА при поведении τ^{-1} в контексте задачи шума квантования. Как было сказано выше, здесь лучше использовать МДА.

Поскольку шум $1/f$ и фракталы – это универсальные средства моделирования, мы считаем, что методики нестационарного анализа, такие как линейка вариаций Аллана, могут успешно использоваться при анализе временных рядов. Их применение расширяется, но во многих областях вариации по-прежнему остаются неизвестным статистическим инструментом. В моем исследовании я показал эффективность применения вариации при анализе стабильности конфе-

вых мер длины и эталонов напряжения. Ричард Ф. Восс (Richard F. Voss) продемонстрировал присутствие шума $1/f$ во множестве музыкальных фрагментов [34]. Исследователи Муша и Хигучи (Musha and Higuchi) идентифицировали такой шум в транспортном потоке [35]. Высота подъема Нила в период наводнения за несколько тысяч лет, по которым есть данные, имеет спектральную плотность $1/f$. Аналогичный шум можно обнаружить, например, в экономике и физиологии. Другое название для шума $1/f$, или фликкер-шума, – розовый шум (*pink noise*). На сайте Wikipedia можно найти отличную статью по розовому шуму [36], где продемонстрировано его повсеместное распространение и дано множество ссылок.

И в заключение приведу пример из нашей повседневной жизни. Если ехать на велосипеде по прямой линии, для чего требуется сохранять равновесие, то отклонения переднего колеса от прямой будут представлять собой процесс со спектральной плотностью f^3 . При контролируемом наборе параметров действия по удержанию велосипеда в равновесии – с использованием ДА для анализа отклонений – можно применять, чтобы улучшать или ухудшать равновесие. Будучи заядлым горным велосипедистом, я часто наблюдаю это явление, особенно на узких оленьих тропах на крутых горных откосах вблизи моего дома.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lighthill M. J.** Introduction to Fourier analysis and generalised functions. New York; London: Cambridge University Press. 1964. 79 p.
2. **IEEE Proceedings**, Special Issue on Frequency Stability. Vol. 54. № 2. February 1966. [Электронный ресурс] URL: <http://www.ieee-uffc.org/publications/special/toc.asp?iss=e661>
3. **Voss R. F., Mandelbrot B. B.** Why is Nature Fractal and When should Noises be Scaling? // Noise in Physical Systems and 1/f Noise / M. Savelli, G. Lecoy and J-P Nougier eds. New-York: Elsevier Science, 1983. P. 31-39.
4. **Barnes J. A., Chi A. R., Cutler L. S., Healey D. J., Leeson D. B., Mc Gunigal T. E., Mullen J. A., Jr., Smith W. L., Sydnor R. L., Vessot R. F. C., Winkler G. M. R.** Characterization of Frequency Stability // IEEE Transactions on Instruments and Measurements Vol. 20. № 2. 1971. P. 105–120. [Электронный ресурс] Сайт Отделения временных и частотных измерений NIST: URL: <http://tf.boulder.nist.gov/general/pdf/118.pdf>.
5. **Allan D. W.** Should the Classical Variance Be Used As a Basic Measure in Standards Metrology? // IEEE Transactions on instrumentation and measurement. Vol. IM-36. №. 2. June 1987. P. 646–654. [Электронный ресурс] URL: <http://tf.boulder.nist.gov/general/pdf/776.pdf>.
6. **Катков А. С.** Применение преобразования Аллана для анализа предельных возможностей мер и компараторов напряжения. Измерительная техника, 2006. № 6.
7. **Witt T. J.** Testing for correlations in measurements with the Allan Variance // Advanced mathematical and computational tools in metrology IV. World Scient. Publ. 2000. P. 273-288.
8. **NIST Time and Frequency Publication Search Results:** сайт. [Электронный ресурс] URL: <http://tf.boulder.nist.gov/tf-cgi/showpubs.pl>.
9. **Allan D. W., Shoaf J. H., Halford D.** Statistics of time and frequency data analysis // Time and frequency theory and fundamentals. National bureau of standards monograph 140. Washington DC: U. S. Department of Commerce, 1974. P. 151-204. [Электронный ресурс] URL: <http://tf.boulder.nist.gov/general/pdf/771.pdf>.
10. **Allan D. W.** Conversion of frequency stability measures from the time-domain to the frequency domain, vice-versa and power-law spectral densities. [Электронный ресурс] URL: http://www.allanstime.com/Publications/DWA/Conversion_from_Allan_variance_to_Spectral_Densities.pdf.
11. **Box G., Jenkins G.** Time series analysis: Forecasting and control. San Francisco: Holden-Day, 1970.
12. **Vessot R., Peters H., Vanier J., Beehler R., Halford D., Harrach R., Allan D., Glaze D., Snider C., Barnes J., Cutler L., Bodily L.** An intercomparison of Hydrogen and Cesium Frequency Standards // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements.

- Vol. IM-15. № 4. December 1966. P. 165-176. [Электронный ресурс] URL:<http://tf.boulder.nist.gov/general/pdf/172.pdf>.
13. **Backer D. C., Kulkarni S. R., Heiles C., Davis M. M., Goss W. M.** A millisecond pulsar // *Nature*. 300 (5893). 1982. P. 615-618.
 14. **Allan D. W.** *It's About Time: Science Harmonized with Religion*. New-York: Legends library, 2014. 411 p.
 15. **It's about time:** сайт. [Электронный ресурс] URL:<http://www.ItsAboutTimeBook.com>
 16. **Allan's TIME.** David W. Allan's Time Interval Metrology Enterprise: сайт. [Электронный ресурс] URL:http://www.AllansTIME.com/UFT_private
 17. **Mc Taggart L.** *The Field: The Quest for the Secret Force of the Universe*. New-York: HarperCollins Publishers, 2001. 268 p.
 18. **NIST Time and frequency division:** сайт. [Электронный ресурс] URL:<http://www.nist.gov/pml/div688>.
 19. **1139-1988** – IEEE Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology // IEEE Standards Associations: сайт. [Электронный ресурс] URL:<http://standards.ieee.org/findstds/standard/1139-1988.html>
 20. **NIST Technical Note 1337.** Characterization of Clocks and Oscillators / Sullivan D. B., Allan D. W., Howe D. A., Walls EL. Washington: U. S. Department of commerce, 1990. 352 p.
 21. **Handbook selection and use of precise frequency and time systems:** ITU Handbook. Geneva: Radiocommunication Bureau, 1997. 191 p.
 22. **Allan D. W., Ashby N., Hodge C.** *Science of Timekeeping: Hewlett-Packard Application Note 1289*. Palo Alto, 1997.
 23. **NIST Time and frequency division:** сайт. [Электронный ресурс] URL:<http://tf.nist.gov/general/publications.htm>
 24. **Riley W. J.** *Handbook of Frequency Stability Analysis: NIST special publication 1065*. Washington: U. S. Government printing office, 2008. 136 p. [Электронный ресурс] URL:<http://tf.nist.gov/general/pdf/2220.pdf>
 25. **El-Sheimy N., Hou H., Niu X.** Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. Vol. 57. № 1. 2008. P. 140-149.
 26. **Zhang X., Li Y., Mumford P., Rizos Ch.** Allan Variance Analysis on Error Characters of MEMS Inertial Sensors for an FPGA-based GPS/INS System // *Proceedings of the International Symposium on GPS/GNSS*, Odaiba, Tokyo, Japan, 11-14 November 2008. Vol. 1. New-York: Curran associates, 2009. P. 127-133. [Электронный ресурс] URL:<http://toc.proceedings.com/06708webtoc.pdf>
 27. **Gyroscope // VECTORNAV:** Embedded Navigation Solutions: сайт. [Электронный ресурс] URL:<http://www.vectornav.com/support/library/gyroscope>
 28. **Marinov M., Petrov Zh.** Allan Variance Analysis on Error Characters of Lowcost MEMS Accelerometer MMA8451Q // *AFASES 2014. International conference of scientific paper*, Brasov, 22-24 May 2014. Romania: Publishing house of «Henri Coanda» Air force academy, 2014. P. 179-184. [Электронный ресурс] URL:http://www.afahc.ro/ro/afases/2014/mecanica/marinov_petrov_allan.pdf
 29. **Hou H.** *Modeling Inertial Sensors Errors Using Allan Variance: A thesis for the degree of master of science*. Calgary: University of Calgary, 2004. [Электронный ресурс] URL:<http://www.ucalgary.ca/engo/webdocs/NES/04.20201.HaiyingHou.pdf>
 30. **Quinchia G., Falco A., G., Falletti E., Dovis F., Ferrer C.** A Comparison Between Different Error Modelling of MEMS Applied to GPS/INS Integrated Systems // *Sensors*. Vol. 13. № 8. P. 9549-9588. 2013. [Электронный ресурс] URL:<http://www.mdpi.com/1424-8220/13/8/9549>.
 31. **Yuskel Y., Kaygisiz H. B.** Notes on Stochastic Errors of Low Cost MEMS Inertial Units. 2011. 39 p. [Электронный ресурс] URL:http://instk.org/web/static/bibliography/Introduction_to_Sensor_Errors.pdf
 32. **Vukmirica V., Trajkovski I., Asanović N.** Two methods for the determination of inertial sensor parameters // *Scientific Technical Review*. Vol. 60. No. 3-4. 2010. P. 27-33. [Электронный ресурс] URL:<http://www.vti.mod.gov.rs/ntp/rad2010/34-10/4/04.pdf>
 33. **Fang B., Guo X.** Modified Allan variance analysis on random errors of MINS // *TELKOMNIKA*. Vol. 11. № 3. March 2013. P. 1227-1235.
 34. **Voss R. F., Clarke J.** 1/f Noise in Music and Speech // *Nature*. 1975. Vol. 258. P. 317-318.
 35. **Musha T., Higuchi H.** The 1/f fluctuation of traffic current on an expressway // *Journal of Applied Physics*. 1978. № 15. P. 1271-1276.

36. **Pink noise** // Wikipedia: The free encyclopedia. [Электронный ресурс]
URL:https://en.wikipedia.org/wiki/Pink_noise.

Allan D. W. (Allan's TIME; Fountain Green, USA)

Historicity, Strengths, and Weaknesses of Allan Variances and Their General Applications // *Giroskopiya i Navigatsiya*. 2015. № 4 (91). P. 3-28.

Abstract. Over the past 50 years, Allan variance and its modifications have been developed for characterizing the instabilities in precision clocks and oscillators. These instabilities are often modeled by non-stationary processes, and these variances have been shown to be efficient descriptors of these processes. The time-domain and frequency-domain relationships are shown along with the strengths and weaknesses of the proposed variances. These variances are also shown to be useful elsewhere, as in navigation.

Key words: Allan variances, time series analysis, atomic clocks, precision analysis, non-stationary processes

Материал получен 20.05.2015