

## **ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ УПРУГИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПОДЛОЖКЕ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА НА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ**

*Предложено аналитическое решение задачи распространения упругих волн во врачающейся с постоянной скоростью конструкции, состоящей из несущего основания, на которое нанесен слой из пьезоэлектрика. Получены соотношения для расчета зависимости параметров упругих волн от скорости ее вращения. Приведены результаты численного моделирования. Рассмотрена возможность применения полученных результатов в твердотельных гироскопах на поверхностных акустических волнах.*

**Ключевые слова:** упругие волны, твердотельный гироскоп, поверхностные акустические волны

### **Введение**

На сегодняшний день известен целый ряд гироскопов, широко используемых в системах навигации и ориентации подвижных объектов. В ракетно-космической технике наибольшее распространение получили поплавковые гироскопы и гироскопы с электростатическим подвесом ротора. Их преимуществом является высокая точность, а недостатком – высокая стоимость и значительные массогабаритные характеристики [1-5].

Потребность в применении недорогих, но обладающих высокой точностью гироскопов появилась прежде всего при создании авиационной и морской техники. Это в первую очередь динамически настраиваемый гироскоп (ДНГ) и волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) [6, 7].

ДНГ обладают наибольшей преемственностью по отношению к классическим механическим гироскопам [6]. Среди несомненных преимуществ ДНГ можно выделить малое время готовности, высокую устойчивость к механическим воздействиям, малое энергопотребление. Однако обеспечение высокой точности ДНГ сопряжено с необходимостью использования дорогостоящей и сложной аппаратуры управления и регулирования, а также большими затратами на калибровку его параметров.

В последнее время в качестве возможного перспективного чувствительного элемента все чаще рассматривается ВТГ [7], преимуществами которого являются высокая точность, малое энергопотребление, конструктивная простота ме-

---

**Сизов** Валерий Павлович. Доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФГУП «Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи», ФНПЦ.

**Погорелов** Вадим Алексеевич. Доктор технических наук, профессор ФГОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет».

**Вахтин** Юрий Владимирович. Начальник отдела ФГУП «Ростовский-на-Дону научно-исследовательского института радиосвязи», ФНПЦ.

---

нических узлов, устойчивость к прерыванию подачи электропитания, малое время готовности, широкий диапазон рабочих температур, устойчивость к воздействию ионизирующего излучения, малая чувствительность к линейным перегрузкам, большой срок службы, возможность применения автоматизированного производства при изготовлении.

К недостаткам, затрудняющим применение ВТГ, относятся его сложность (функционирование ВТГ обеспечивают несколько электронных систем), меньший по сравнению с оптическими гироскопами диапазон измерений, а самое главное, чувствительность к перекрестным перегрузкам, зависящая от материала резонатора.

Потребность в недорогих гироскопах обусловила создание микромеханических гироскопов (ММГ) [8]. ММГ представляют собой гироскопы вибрационного типа, сконструированные в виде электронного чипа с кварцевой подложкой площадью в несколько квадратных миллиметров. Принципиальной особенностью этих датчиков является использование при их производстве материалов и технологий современной твердотельной микроэлектроники и высокодобротных неметаллических материалов. ММГ имеют встроенные средства управления и обработки информации, малую массу и габариты, низкое энергопотребление.

Однако существуют области, в которых применение ММГ практически невозможно, поскольку они не обладают высокой ударопрочностью [8]. В связи с этим в последние годы наблюдается большой интерес к твердотельным микрогироскопам (ТМГ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ), отличающимся стойкостью к вибрациям и ударам, простотой производства, основанного на хорошо отработанной 2D-технологии, и низкой стоимостью [9].

В современных технологиях построения ТМГ на ПАВ можно выделить два основных направления: ТМГ на стоячих ПАВ и ТМГ на бегущих ПАВ. Известен целый ряд конструкций таких гироскопов, среди которых можно выделить ТМГ на ПАВ с цилиндрическим звукопроводом, с линиями задержки, с двойным преобразованием и ТМГ на горизонтально-поляризованных ПАВ [9-12].

Существенным недостатком описанных в [9-12] технических решений, содержащим их практическое применение, является ограничение их функциональных возможностей, обусловленное тем, что данные устройства обеспечивают регистрацию угловой скорости вращения несущего основания только относительно одного направления его вращения, а для регистрации угловых скоростей относительно двух направлений вращения необходимо дополнительно установить второй аналогичный гироскоп, что приводит к усложнению конструкции и увеличению ее стоимости. В связи с этим рассмотрим принцип действия модифицированного ТМГ на ПАВ [9].

### **Назначение и устройство модифицированного ТМГ на ПАВ**

Устройство модифицированного ТМГ на ПАВ показано на рис.1. Гироскоп содержит несущее основание 1, выполненное из изотропного материала, на внешней поверхности 2 которого нанесена тонкая пленка 3 из пьезоэлектрика с установленными на ней инерционными массами 4, образующими регулярную структуру, и измерительными встречно штыревыми преобразователями (ВШП) 5, 6 (относительно оси X) и 7, 8 (относительно оси Y) соответственно. Суммарное акустическое поле, порождаемое регулярной структурой инерционных масс 4, состоит из дифракционных и сигнальных (от сил Кориолиса) полей.

На внутренней поверхности 9 несущего основания 1 выполнен трапецидальный выступ 10, имеющий малое основание 11, большее основание 12 и боковые поверхности 13, при этом большее основание 12 обращено в сторону внешней поверхности 2 несущего основания 1.

Боковые поверхности 13 трапецидального выступа 10 образуют с внешней поверхностью 2 несущего основания 1 угол  $Q$ , который выбирается из условия оптимального возбуждения ПАВ на внешней поверхности 2 несущего основания 1 и задается соотношением

$$\sin Q = v_l / v_R ,$$

где  $v_l$  - скорость продольных волн в материале несущего основания 1,  $v_R$  - скорость ПАВ.

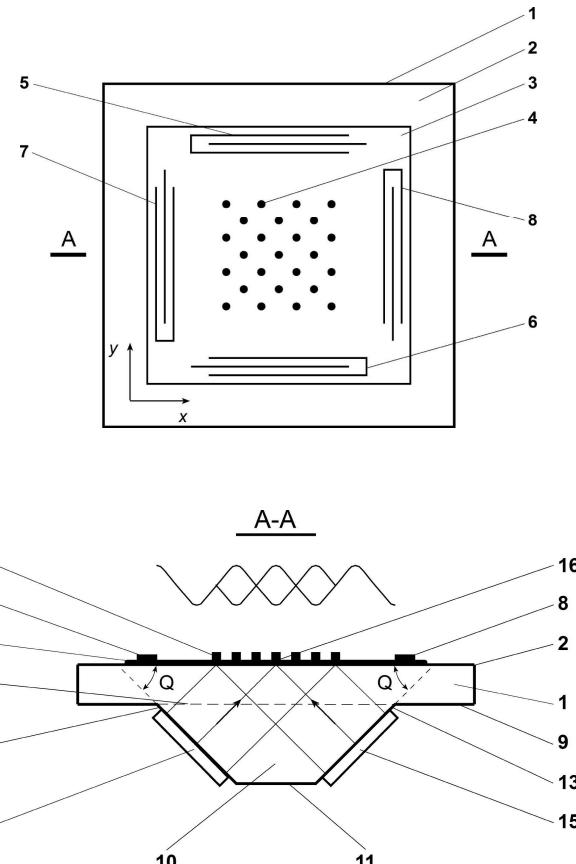


Рис. 1. Схема предлагаемого микроакустомеханического гироскопа

На боковых поверхностях 13 трапецидального выступа 10 симметрично друг другу установлены активные пьезоэлектрические преобразователи 14 и 15, которые обеспечивают возбуждение продольных акустических волн в материале несущего основания 1 в направлениях, определяемых углом  $Q$ .

Измерительные ВШП установлены на пленке 3 симметрично относительно положения регулярной структуры инерционных масс 4 и перпендикулярно осям вращения несущего основания 1.

Инерционные массы в регулярной структуре 4 размещены в шахматном порядке на расстоянии, обеспечивающем преимущественное излучение в направлении измерительных ВШП 5, 6 и 7, 8.

## Принцип действия модифицированного ТМГ на ПАВ

Принцип действия предлагаемого микроакустомеханического гироскопа заключается в следующем. Активные пьезоэлектрические преобразователи 14 и 15 возбуждают в несущем основании 1 продольные волны, которые при взаимодействии с его внешней поверхностью 2 возбуждают ПАВ, бегущие в разные стороны по оси  $X$ .

В области 16 интерференции пучков продольных волн на внешней поверхности 2 несущего основания 1 по месту размещения регулярной структуры инерционных масс 4 образуется стоячая волна с расстояниями между пучностями, равными  $\lambda_R/2$ , где  $\lambda_R = v_R/f$ ;  $f$  – частота возбуждения. Под воздействием стоячих волн массы регулярной структуры инерционных масс 4 совершают вертикальные (вдоль оси  $Z$ ) колебания, которые, в свою очередь, являются источниками ПАВ, распространяющихся вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

Таким образом, из области 16 интерференции пучков продольных волн в стороны измерительных ВШП 5, 6 и 7, 8 распространяются бегущие волны, которые детектируются данными ВШП. В результате на выходах измерительных ВШП 5, 6 и 7, 8 возникают соответствующие сигналы.

При вращении несущего основания 1 относительно оси  $X$  на движущиеся вдоль оси  $Z$  массы действует сила Кориолиса, направленная вдоль оси  $Y$ :

$$F = 2m[\Omega V],$$

где  $m$  – масса колеблющейся структуры;  $\Omega$  – угловая скорость вращения гироскопа;  $V$  – колебательная скорость массы.

Под воздействием этой силы генерируется дополнительная ПАВ, которая изменяет электрические сигналы на выходах ВШП 7 и 8. Это изменение пропорционально угловой скорости  $\Omega$ , направленной вдоль оси  $X$ , и фиксируется соответствующим измерителем. На выходе ВШП 5 и 6 сигналы остаются практически неизменными. При вращении несущего основания 1 относительно оси  $Y$  происходят аналогичные явления, а полезные сигналы возникают на выходах ВШП 5 и 6.

При одновременном вращении несущего основания 1 относительно осей  $X$  и  $Y$  полезные сигналы возникают на всех измерительных ВШП 5, 6 и 7, 8, причем уровень сигналов на выходах ВШП 7 и 8 соответствует его скорости вращения относительно оси  $X$ , а уровень сигналов на выходах ВШП 5, 6 – скорости вращения относительно оси  $Y$ . Таким образом, регистрируются полезные сигналы, позволяющие определить скорости вращения несущего основания 1 относительно двух осей его вращения.

Одной из нерешенных проблем, возникающих при проектировании рассмотренного ТВГ на ПАВ, является неопределенность влияния вращения основания на параметры упругих волн, распространяющихся в конструкции.

В связи с этим целью настоящей работы является получение соотношений для расчета зависимости параметров упругих волн, распространяющихся в подложке ТВГ на ПАВ, от скорости ее вращения и численное исследование этой зависимости.

## Постановка задачи

Рассмотрим конструкцию, состоящую из слоя толщиной  $h$  на полубесконечной подложке (рис. 2). Вращающаяся вокруг оси  $Y$  с постоянной угловой

скоростью  $\Omega$  конструкция возбуждается упругими волнами, падающими из полупространства на слой под углом  $\theta$ . Будем считать, что поле не зависит от координаты  $y$ .

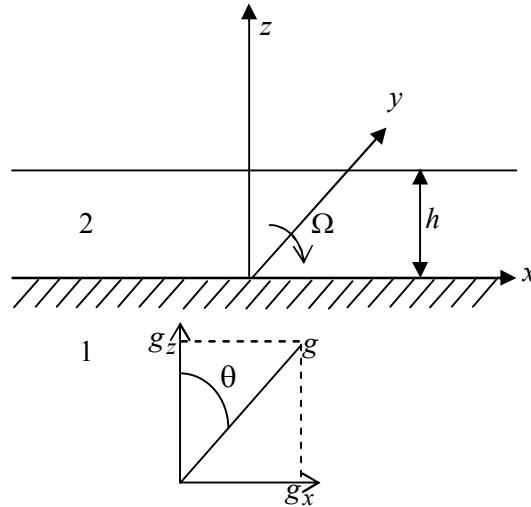


Рис. 2. Конструкция в виде слоя толщиной  $h$  на полу бесконечной подложке

Возникающие волны должны удовлетворять уравнениям движения во вращающейся системе координат и граничным условиям свободной поверхности слоя при  $z = h$ , а также условиям жесткой склейки слоя с полупространством  $z = 0$ .

Для гармонических волн  $(e^{-i\omega t})$  уравнение движения в изотропной вращающейся среде, пренебрегая центробежными силами, запишем следующим образом [13]:

$$\omega^2 \rho u + (\lambda + \mu) \text{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u = -i \omega \rho 2 [\Omega \times u], \quad (1)$$

где  $u$  – вектор перемещений,  $\lambda, \mu$  – упругие константы Ламе,  $\omega$  – частота,  $\rho$  – плотность материала. В правой части этого уравнения записан вектор плотности сил Кориолиса.

Для компонент перемещений, поляризованных в плоскости падения волн ( $y = 0$ ), из уравнения (1) получим:

$$\frac{\omega^2 \rho}{\mu} u_z + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \Delta u_z = i \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \frac{\Omega}{\omega} u_x, \quad (2)$$

$$\left( \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = -i \frac{2\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\Omega}{\omega} u_z. \quad (3)$$

Компоненты напряжения могут быть определены из закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x^k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. По повторяющемуся индексу  $(k)$ , как принято в индексных обозначениях, следует применить правило суммирования.

### Решение задачи

Используя метод скаляризации, следуя [14], представим перемещение через потенциальные функции для продольных волн  $\varphi$  и поперечных  $W$  в виде

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi - \frac{i}{g_x} \left( \delta_{iz} g^2 + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x_i} \right) W. \quad (5)$$

Потенциалы  $\varphi$  и  $W$  являются решением волновых уравнений Гельмгольца

$$\Delta \begin{pmatrix} \varphi \\ W \end{pmatrix} + g^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ W \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где  $g = \frac{\omega}{V_\phi}$ ,  $V_\phi$  – фазовая скорость продольных или поперечных волн при вращении полупространства.

Для определения собственных значений  $g$  подставим выражение (5) в (2) и (3) и, учитывая (6), получим

$$\beta_{11}\varphi + \beta_{12}W = 0, \quad \beta_{21}\varphi + \beta_{22}W = 0 \quad (7)$$

$$\beta_{11} = i \cos \theta \frac{\chi^2}{k^2} (k^2 - g^2) - \sin \theta \chi^2 2 \frac{\Omega}{\omega},$$

$$\beta_{12} = -i \sin \theta (\chi^2 - g^2) + \cos \theta \chi^2 2 \frac{\Omega}{\omega}, \quad (8)$$

$$\beta_{21} = \sin \theta (k^2 - g^2) + i \cos \theta k^2 2 \frac{\Omega}{\omega},$$

$$\beta_{22} = \cos \theta \frac{k^2}{\chi^2} (\chi^2 - g^2) - i \sin \theta k^2 2 \frac{\Omega}{\omega},$$

где  $k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + \mu} = \frac{\omega^2}{V_e^2}$ ,  $\chi^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} = \frac{\omega^2}{V_t^2}$ ,  $V_e, V_t$  – скорость продольных и поперечных волн в материале соответственно.

Приравнивая определитель системы уравнений (7) нулю, найдем уравнение, решая которое, определим два значения модуля волнового вектора  $g$ , а следовательно и два выражения для фазовой скорости  $V_\phi$ . Величины, соответствующие продольным волнам, в дальнейшем будем обозначать индексом  $(L)$ , а по перечным волнам – индексом  $(T)$ . Без такого индекса приводимые далее выражения относятся к любому из этих типов волн, а конкретные результаты мы имеем в зависимости от того, какое значение  $g$  подставлять –  $g^{(L)}$  или  $g^{(T)}$ .

Если вращение отсутствует, т.е.  $\Omega = 0$ , то из (7) с учетом (8) следует  $g^{(L)} = k$ ,  $g^{(T)} = \chi$ .

Из выражения (7) вытекает соотношение  $\frac{\varphi}{W} = -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} = -\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} = D$ . Подставляя его в (5), получим выражение для перемещений:

$$\begin{aligned} u_i^{(L)} &= \left( 1 + i \frac{g_z}{g} \frac{1}{D} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi + \frac{g}{D} \delta_i^z \varphi, \\ u_i^{(T)} &= \left( D + i \frac{g_z}{g} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} W + g \delta_i^z W, \\ u_i &= u_i^{(L)} + u_i^{(T)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Напряжения выражаются через потенциальные функции  $\varphi$  и  $W$  из формулы (4) при подстановке в нее соотношений (9).

Полученные формулы используем при решении поставленной задачи для слоя на подложке, вращающегося с постоянной скоростью  $\Omega$ . Наличие границ ( $z=0, z=h$ ) в рассматриваемой конструкции предполагает существование падающих и отраженных волн, поэтому общее решение уравнений (6) для рассматриваемой задачи представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \left( \varphi^+ e^{ig_z z} + \varphi^- e^{-ig_z z} \right) e^{ig_x x} e^{-i\omega t}, \\ W &= \left( W^+ e^{ig_z z} + W^- e^{-ig_z z} \right) e^{ig_x x} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\varphi^\pm, W^\pm$  – амплитуды, подлежащие определению из граничных условий,  $g_z^{(L)}, g_z^{(T)}$  – проекции волнового вектора на ось  $z$  для продольных и поперечных волн соответственно,  $g_x$  – проекция волнового вектора на ось  $x$ , которая в силу закона Снеллиуса одинакова для продольных и поперечных волн.

Для удобства дальнейшего изложения представим компоненты перемещений  $u_i$  и напряжений  $\sigma_{ij}$ , входящие в граничные условия, в виде вектор-столбца [15]

$$B = (u_z, u_x, \sigma_{zz}, \sigma_{zx})^T = (u, \sigma)^T. \quad (11)$$

Для определения этих компонентов запишем:

$$B = CF\Psi, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} C(1) & C(2) \\ C(3) & C(4) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F^+ & 0 \\ 0 & F^- \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{pmatrix}, \\ F^+ &= \begin{pmatrix} (L) \\ e^{ig_z z} & 0 \\ 0 & e^{ig_z z} \end{pmatrix}, \quad F^- = \begin{pmatrix} (L) \\ e^{-ig_z z} & 0 \\ 0 & e^{-ig_z z} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Psi^+ = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ W^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi^- = \begin{pmatrix} \varphi^- \\ W^- \end{pmatrix}, \quad C_{(1)} = \begin{pmatrix} C_{(11)} & C_{(12)} \\ C_{(21)} & C_{(22)} \end{pmatrix}, \quad C_{(3)} = \begin{pmatrix} C_{(31)} & C_{(32)} \\ C_{(41)} & C_{(42)} \end{pmatrix}.$$

Фазовый и временной множители  $e^{ig_x x}, e^{-i\omega t}$  в соотношениях (13) опущены.

Блоки  $C_{(2)}$  и  $C_{(4)}$  совпадают с  $C_{(1)}$  и  $C_{(3)}$  соответственно, если у элементов главной  $C_{(1)}$  и побочной  $C_{(3)}$  диагонали матрицы изменить знаки на противоположные.

Элементы  $C_{(ij)}$  матрицы  $C$  определяются из формул (9), (4) при подстановке в них выражений (10). Для рассматриваемой задачи эти элементы имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{(11)} &= i(P - L)\chi\sqrt{q-s} + i\chi\sqrt{q-s}, \\ C_{(12)} &= -\frac{i}{\sqrt{s}}[\chi s - \chi(1-s)Q], \\ C_{(21)} &= -i\chi\sqrt{s}L + i\chi\sqrt{s}, \\ C_{(22)} &= i(\chi\sqrt{1-s} + \chi\sqrt{1-s}Q), \\ C_{(31)} &= -\mu\chi^2(1-2s) - 2\mu\chi^2(q-s)(P-L), \\ C_{(32)} &= -\frac{1}{\sqrt{s}}\left[\mu\chi^2\left(\frac{1}{q} - 2s\right)\sqrt{1-s}Q - 2\mu\chi^2s\sqrt{1-s}\right], \\ C_{(41)} &= -\chi^2\sqrt{q-s}\sqrt{s}2\mu\left(1 + \frac{1}{2}P\right) + \chi^2\sqrt{q-s}\sqrt{s}2\mu L, \\ C_{(42)} &= -\chi^2(1-s)2\mu Q + \chi^22\mu\left(s - \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где:

$$Q = \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{q}\right)}} \frac{\Omega}{\omega}, \quad P = \frac{-2\sqrt{\frac{q}{s}}}{\sqrt{\frac{s}{q} - 1}(1-q)} \frac{\Omega}{\omega}, \quad L = \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{s}}}{\sqrt{1-q}} \frac{\Omega}{\omega}, \quad (15)$$

$$q = \frac{k^2}{\chi^2}, \quad s = \frac{g_x^2}{\chi^2}. \quad (16)$$

В выражениях (15) авторы пренебрегли малой величиной второго порядка  $\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2$ .

Всем величинам, относящимся к подложке, присвоим индекс (1), а величины, характеризующие параметры слоя, запишем с индексом (2).

Используя соотношения (11), обозначим граничные условия как

$$B_2^\uparrow = \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2^\downarrow = B_1^\uparrow. \quad (17)$$

Стрелка  $\uparrow$  означает верхнюю границу слоя,  $\downarrow$  – нижнюю.

Подставив (12) и (13) в (17), получим

$$B_2^\uparrow = C_2 F_2^\uparrow \Psi_2, \quad C_2 F_2^\downarrow \Psi_2 = C_1 F_1^\uparrow \Psi_1. \quad (18)$$

Отсюда имеем:

$$\Psi_2 = F_2^\uparrow C_2^{-1} B_2^\uparrow, \quad \Psi_2 = F_2^{\downarrow-1} C_2^{-1} C_1 F_1^\uparrow \Psi_1, \quad (19)$$

или

$$B_2^\uparrow = C_2 F_2^\uparrow F_2^{\downarrow-1} C_2^{-1} C_1 F_1^\uparrow \Psi_1. \quad (20)$$

Компоненты вектор-столбца  $\Psi_1$  представляют собой амплитуды падающих и отраженных полей в подложке. Если представить падающее поле в виде продольной волны с единичной амплитудой, то отраженное поле будет определяться коэффициентами отражения  $\Gamma_{\varphi\varphi}, \Gamma_{\varphi W}$ , в силу чего вектор-столбец  $\Psi_1 = (1, 0, \Gamma_{\varphi\varphi}, \Gamma_{\varphi W})^T$ . При падающей поперечной волне единичной амплитуды  $\Psi_1 = (0, 1, \Gamma_{W\varphi}, \Gamma_{WW})^T$ . Подставляя эти значения  $\Psi_1$  в соотношение (20) и учитывая, что напряжение на свободной поверхности равно 0 (17), можно найти формулы для компонентов  $\Gamma$ . Совокупность этих формул запишем в виде выражения для матрицы  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\varphi\varphi} & \Gamma_{\varphi W} \\ \Gamma_{W\varphi} & \Gamma_{WW} \end{pmatrix} = -R_{(4)}^{-1} R_{(3)}, \quad (21)$$

где, как видно из (20),

$$R = \begin{pmatrix} R_{(1)} & R_{(2)} \\ R_{(3)} & R_{(4)} \end{pmatrix} = C_2 F_2^\uparrow F_2^{\downarrow-1} C_2^{-1} C_1 F_1^\uparrow. \quad (22)$$

Этими выражениями определяются амплитуды  $\Psi_1$  в подложке. Значение амплитуды в слое  $\Psi_2$  можно найти из соотношений (19), где эти амплитуды связаны с  $\Psi_1$ . Таким образом, определено упругое поле в слое и подложке при вращении конструкции со скоростью  $\Omega$ .

Остановимся более подробно на случае распространения упругих волн в полупространстве при  $h = 0$ . Тогда из (21) следует  $R = C_1 F_1^\uparrow$  и матрица (21) характеризует отражение от границы вращающегося полупространства.

Опуская индексы принадлежности к слоям, из выражений (21), (22) и (13) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma = & \begin{pmatrix} \Gamma_{\varphi\varphi} & \Gamma_{\varphi W} \\ \Gamma_{W\varphi} & \Gamma_{WW} \end{pmatrix} = -C_{(4)}^{-1} C_{(3)} = \\ & -\frac{1}{\Delta} \begin{Bmatrix} C_{(42)} C_{(31)} + C_{(32)} C_{(41)} & 2 C_{(42)} C_{(32)} \\ 2 C_{(41)} C_{(31)} & C_{(41)} C_{(32)} + C_{(31)} C_{(42)} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Delta = C_{(33)} C_{(44)} + C_{(43)} C_{(34)}. \quad (24)$$

Если  $\Omega = 0$ , то выражения для коэффициентов отражения  $\Gamma_{ij}$  совпадают с известными [16]. Когда коэффициенты отражения от свободной границы обращаются в бесконечность, возникают поверхностные волны Рэлея [17].

Скорость распространения этих волн  $V_R$  можно найти из уравнения, которое получается, если приравнять определитель (24) к нулю. Используя соотношения (14), (15) и (16), запишем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[ (1-2s)^2 + 4s\sqrt{1-s}\sqrt{q-s} \right] - 2 \left[ (1-2s)(1-s) - \sqrt{1-s}\sqrt{q-s} \left( \frac{1}{q} - 2s \right) \right] Q - \\ & - 2 \left[ (1-2s)(q-s) + s\sqrt{1-s}\sqrt{q-s} \right] P + 2 \left[ (1-2s)(q-s) + 2s\sqrt{1-s}\sqrt{q-s} \right] L = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Задав в (25) параметры  $q$  и  $\frac{\Omega}{\omega}$  и определив из этого уравнения величину  $s$ , можно использовать формулы (14) и (15) для нахождения компонентов поля (11).

Для волн, распространяющихся в приграничном слое, эти компоненты могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} u_z &= C_{(11)} \varphi^+ e^{i g_z z} + C_{(12)} W^+ e^{i g_z z}, \\ u_x &= C_{(21)} \varphi^+ e^{i g_z z} + C_{(22)} W^+ e^{i g_z z}. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= C_{(31)} \varphi^+ e^{i g_z z} + C_{(32)} W^+ e^{i g_z z}, \\ \sigma_{zx} &= C_{(41)} \varphi^+ e^{i g_z z} + C_{(42)} W^+ e^{i g_z z}. \end{aligned} \quad (27)$$

Найдем амплитуды потенциалов  $\varphi^+$  и  $W^+$ . Предположим, что к внешней границе приложено давление. Тогда, используя граничные условия, можно решить систему уравнений (27) и, подставив решение в (26), получить выражение для компонентов перемещений. Восстанавливая опущенный ранее множитель  $e^{-i\omega t} e^{ig_x x}$ , находим:

$$\begin{aligned} u_z &= A_0 \left( C_{(11)} C_{(42)} e^{i g_z z} - C_{(12)} C_{(41)} e^{i g_z z} \right) e^{-i\omega t} e^{ig_x x}, \\ u_x &= A_0 \left( C_{(21)} C_{(42)} e^{i g_z z} - C_{(22)} C_{(41)} e^{i g_z z} \right) e^{-i\omega t} e^{ig_x x}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для поверхностных волн, убывающих при удалении от границы, величины  $(L) \quad (L) \quad (T) \quad (T)$   
 $g_z$  являются мнимыми  $g_z = i \alpha$ ,  $g_z = i \alpha$ , и вещественные значения  $u_z$  и  $u_x$  описывают траекторию частиц, участвующих в переносе ПАВ.

Движение частиц вблизи поверхности может быть найдено из (28) при  $z=0$  и, после подстановки элементов матрицы  $C_{(ij)}$  из (14)-(16), определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} u_z &= A \frac{1}{2} \sqrt{s-q} \left[ -1 + (s-1)P + L \right] \sin(g_x x - \omega t), \\ u_x &= A \sqrt{s} \left[ 0,5 - s + \sqrt{s-1} \sqrt{s-q} + \left( 1 - s + \sqrt{s-1} \sqrt{s-q} \right) Q + \right. \\ & \left. + \left( s - 0,5 - \sqrt{s-1} \sqrt{s-q} \right) L + 0,5 \sqrt{s-1} \sqrt{s-q} P \right] \cos(g_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $s$  – находится из уравнения (25).

Из этих формул видно, что траектория смещения частиц в поверхностной волне представляет собой эллипс, оси которого зависят от скорости вращения основания.

### Результаты имитационного моделирования

Полученные соотношения (14), (20), (22), (25) и (29) позволяют производить численные исследования. С помощью выражений (14), (15), (21) и (22) были рассчитаны коэффициенты отражения для вращающейся конструкции из слоя с параметрами  $V_{l2} = 6084 \text{ м/с}$ ,  $V_{t2} = 3568 \text{ м/с}$ ,  $\rho_2 = 7454 \text{ кг/м}^3$  и подложки из стекла  $V_{l1} = 2700 \text{ м/с}$ ,  $V_{t1} = 1125 \text{ м/с}$ ,  $\rho_1 = 1180 \text{ кг/м}^3$  [18]. Вычисленные значения модуля и фазы коэффициента отражения  $\Gamma_{\phi\phi}$  от угла падения продольной волны при различной скорости вращения для конструкции с толщиной слоя  $h = 0,13\lambda$  и  $h = 0,25\lambda$  (при  $\frac{\Omega}{\omega} = 0$ ,  $\frac{\Omega}{\omega} = -0,001$  и  $\frac{\Omega}{\omega} = -0,01$ ) показывают, что комплексный коэффициент  $\Gamma_{\phi\phi}$  меняет свое значение при вращении конструкции. Причем это более ярко выражено в конструкции с  $h = 0,25\lambda$  по сравнению с подложкой, имеющей слой толщиной  $h = 0,13\lambda$ .

Приведем также результаты расчета для полупространства в ситуации возникновения поверхностных волн Рэлея.

Об изменении скорости Рэлея при  $h=0$  в зависимости от вращения подложки с  $q = 0,33$  можно судить из графика на рис. 3, полученного из соотношения (25).

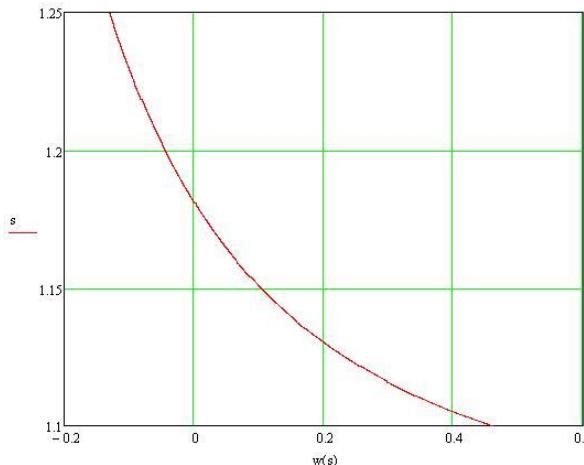


Рис. 3. Изменение скорости Рэлея в зависимости от вращения подложки при  $q = 0,33$ ,  $w = \frac{\Omega}{\omega}$ ,  

$$s = \frac{V_t^2}{V_R^2}$$

При малых скоростях вращения эта зависимость имеет почти линейный характер.

Как видно из графика, скорость ПАВ увеличивается или уменьшается в зависимости от направления вращения  $W = \frac{\Omega}{\omega}$ .

О влиянии толщины слоя на изменение скорости Рэлея при  $W=0,01$  можно судить по графику на рис. 4. При малых значениях  $\frac{h}{\lambda} << 1$  (когда не возникают моды высшего порядка) имеет место линейная зависимость изменения скорости от  $\frac{h}{\lambda}$ .

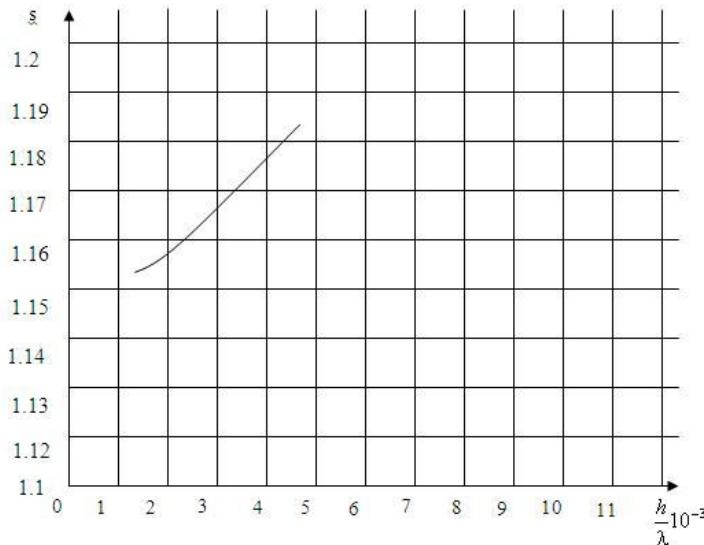


Рис. 4. Изменение скорости Рэлея при вращении подложки со скоростью  $w=0,01$  в зависимости от толщины слоя

На рис. 5 показана зависимость соотношения осей эллипса, по которому движутся частицы вблизи поверхности от скорости вращения, а на рис. 6 приведены траектории движения этих частиц при  $W=0,08$ ,  $W=0$ ,  $W=-0,08$ .

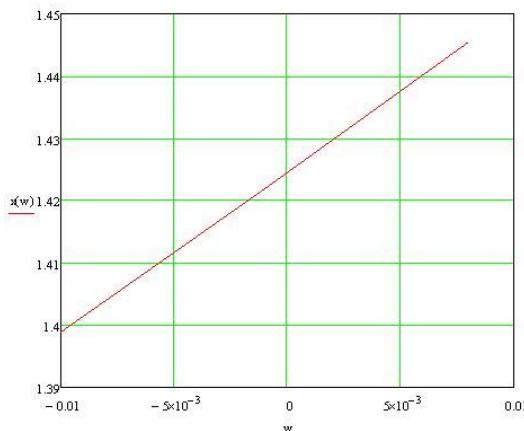


Рис. 5. Зависимость отношения  $x(w) = \frac{b(w)}{a(w)}$  большой оси  $b$  к малой оси  $a$  от скорости вращения основания  $w = \frac{\Omega}{\omega}$  для  $q = \frac{1}{3}$ .

Величина соотношения осей увеличивается или уменьшается в зависимости от направления вращения, что можно использовать для его определения. По этим же графикам также можно найти и величину вращения.

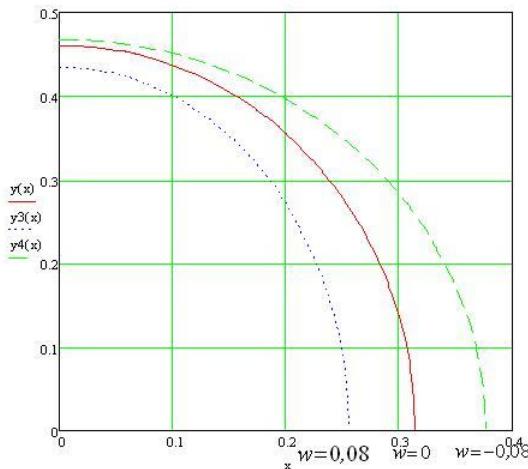


Рис. 6. Траектория движения частиц при  $w=-0,08$ ,

$$w=0, \quad w=0,08, \quad w=\frac{\Omega}{\omega}$$

Из рисунков видно, что скорость вращения подложки влияет как на амплитуду колебаний частиц, так и на форму эллиптической траектории.

### Заключение

Полученные соотношения позволяют производить численный анализ влияния вращения на различные параметры упругих волн, распространяющихся в конструкции из слоя на подложке, выполненной из различных материалов.

Наличие вращения существенно изменяет комплексные коэффициенты отражения объемных волн от слоя на подложке. В случае распространения ПАВ вращение приводит к изменению фазовой скорости и, следовательно, к изменению частоты. Кроме того, при вращении основания изменяется амплитуда колебаний частиц, участвующих в переносе ПАВ, а также форма эллиптической траектории движения частиц. Все эти факторы могут быть использованы при конструировании твердотельных микрогироскопов на акустических волнах.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пешехонов В. Г.** Проблемы и перспективы современной гироскопии // Известия вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. № 1; 2. С. 49-55.
2. **Волынцев А. А., Дудко Л. А., Казаков Б. А., Козлов В. В. и др.** Опыт создания высокоточных поплавковых гироприборов, применяемых в системах угловой ориентации и стабилизации космических аппаратов и станций // Гироскопия и навигация. 2004. № 1 (44). С. 45-57.
3. **Доронин В. П., Мезенцев А. П., Новиков Л. З., Решетников В. И. и др.** Гироскопические чувствительные элементы для систем управления ориентацией и стабилизации орбитальных космических аппаратов // VIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 2001. С. 17-29.
4. **Емельянцев Г. И., Левин С. Л., Романенко С. Г** Калибровка погрешностей бескарданной инерциальной системы на ЭСГ в условиях орбитального полёта // Гироскопия и навигация. 2010. № 1. С. 36-46.

5. **Лобанов В. С., Тарасенко Н. В., Зборошенко В. Н.** Направления развития систем ориентации и стабилизации космических аппаратов различного назначения // Гирокопия и навигация. 2015. № 2 (89). С. 18-29.
6. **Броздуль Л. И.** Динамически настраиваемые гироскопы. М.: Машиностроение, 1989. 232 с.
7. **Матвеев В. А., Липатников В. И., Алексин А. В.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 168 с.
8. **Распопов В. Я.** Микромеханические приборы. Тула.: Тульский государственный университет, 2002. 389 с.
9. **Лукьянин Д. П., Филатов Ю. В., Шевченко С. В., Шевелько М. М. и др.** Современное состояние и перспективы развития твердотельных микрогироскопов на поверхностных акустических волнах // Гирокопия и навигация. 2011. № 3 (74). С. 75-87.
10. **Каплин В., Лавров Ю., Лукьянин В., Мельников В., Шубаров В.** Математическое моделирование гироскопов на ПАВ // Микроэлектроника и Микросхемотехника. Спецвыпуск. 2008. С. 47-51.
11. Патент № 2543706, Россия, 2015. Микроакустомеханический гироскоп / Вахтин Ю.В., Мирошниченко И. П., Сизов В. П., Погорелов В. А.
12. Patent № 6516665 B1, US, 2003. Micro-electro-mechanical gyroscope / Varadan V. K., Xavier P. B., Suh W. D., Kollakompil J. S. et al.
13. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. **Сизов В. П.** О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропной среде. МТТ. № 5. 1988. С. 55-58.
15. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957. 502 с.
16. **Бреховских Л. М., Годин О. А.** Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
17. **Шутилов В. А.** Основы физики ультразвука. Л.: ЛГУ, 1980. 280 с.
18. **Балышева О. Л. и др.** Акустоэлектронные устройства обработки и генерации сигналов. Принципы работы, расчета и проектирования / Под ред. академика РАН Гуляева Ю. В. М.: Радиотехника, 2012. 576 с.

**Sizov V. P., Pogorelov V. A., Vakhtin Yu. V.** (FSUE Rostov-on-Don Research Institute of Radio Communication)

Effect of rotation on parameters of elastic waves propagating in substrate of SAW-based solid-state gyros // Гирокопия и Навигация. 2015. № 4 (91). P. 77-90.

**Abstract.** The paper provides an analytical solution to the problem of propagation of elastic waves in a structure including a bearing foundation with a piezoelectric layer applied to it subject to constant rotation. Relations to calculate the dependency of elastic wave parameters on the structure rate are obtained. Numerical simulation results are given. The possibility of applying these results in solid-state gyros on surface acoustic waves is considered.

**Key words:** elastic waves, solid-state gyro, surface acoustic waves

Материал поступил 22.04.15