

О. А. СТЕПАНОВ, А. Б. ТОРОПОВ

## МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ

### ЧАСТЬ 2. СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ

*Рассматривается задача навигации подвижного объекта с использованием карт геофизических полей. Опираясь на проведенный ранее обзор алгоритмов нелинейной фильтрации, предложенных для решения этой задачи, обсуждаются современные тенденции и формулируются некоторые направления развития алгоритмического обеспечения, связанные с идентификацией моделей погрешностей используемых измерительных систем и с привлечением информации о модели движения объекта.*

**Ключевые слова:** навигация, подвижный объект, геофизические поля, нелинейная фильтрация, синтез алгоритмов, идентификация.

#### Введение

Настоящая статья является продолжением обзора, посвященного алгоритмам нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям (ГФП) [1]. Следуя принятой терминологии, авторы делают акцент на системах навигации по ГФП первого типа, в которых предполагается, что измерительная информация об используемом поле в каждый момент времени снимается в точке, т.е. выходной сигнал датчика поля представляет собой в каждый момент времени скалярную величину, если используется одно поле. Такое предположение вносит дополнительные сложности при построении алгоритмов решения, связанные с протяженным во времени характером задачи, обусловленным необходимостью накопления такого объема информации, при котором обеспечивается ее эффективное решение.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 напомним постановку обсуждаемой задачи [1]. В разделе 2 приводятся и анализируются тенденции совершенствования алгоритмов, связанные с современными направлениями развития методов нелинейной фильтрации. Раздел 3 посвящен некоторым актуальным вопросам, связанным с проблемами построения алгоритмического обеспечения в задаче навигации по ГФП.

#### 1. Постановка и алгоритмы решения задачи навигации по геофизическим полям в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации

Напомним основные предположения и постановку обсуждаемой задачи

---

**Степанов** Олег Андреевич. Доктор технических наук, профессор, начальник отдела АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», профессор кафедры Университета ИТМО (С.-Петербург). Вице-президент международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

**Торопов** Антон Борисович. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», сотрудник кафедры Университет ИТМО.

навигации по ГФП в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации [1].

Предполагается, что на борту подвижного объекта имеются навигационная система (НС), вырабатывающая измерения его координат на плоскости  $y_i^{\text{HC}} = [y_i^{(1)} \ y_i^{(2)}]^T$  в  $i$ -е моменты времени, и внешний датчик, обеспечивающий измерения геофизического поля  $y_i$ , которые могут быть представлены в виде:

$$y_i^{\text{HC}} = X_i + \Delta y_i^{\text{HC}}, \quad (1)$$

$$y_i = \phi^k(X_i) + \Delta y_i^{\Sigma}, \quad (2)$$

где  $X_i = [X_i^{(1)} \ X_i^{(2)}]^T$  – истинные координаты подвижного объекта в некоторой прямоугольной системе координат;  $\Delta y_i^{\text{HC}} = [\Delta y_i^{(1)} \ \Delta y_i^{(2)}]^T$  – погрешности выработки координат места НС;  $\phi^k(X_i)$  – функция векторного аргумента, определяющая карту поля и позволяющая с погрешностью  $\Delta y_i^k$  вычислять значения поля в произвольной точке заданного района, т.е.  $\phi^k(X_i) = \phi(X_i) + \Delta y_i^k$ ;  $\phi(X_i)$  – функция, известная с точностью до  $\Delta y_i^k$ , описывающая зависимость истинных значений используемого поля от координат;  $\Delta y_i^{\Sigma}$  – суммарная погрешность измерений внешнего датчика и карты поля. Для описания погрешностей  $\Delta y_i^{\text{HC}}$  и  $\Delta y_i^{\Sigma}$  вводятся два формирующих фильтра для векторных последовательностей  $x_i^{\text{HC}}$ ,  $x_i^{\Sigma}$  с размерностями  $n^{\text{HC}}$  и  $n^{\Sigma}$  соответственно:

$$x_i^{\text{HC}} = \Phi_i^{\text{HC}} x_{i-1}^{\text{HC}} + \Gamma_i^{\text{HC}} w_i^{\text{HC}}, \quad (3)$$

$$x_i^{\Sigma} = \Phi_i^{\Sigma} x_{i-1}^{\Sigma} + \Gamma_i^{\Sigma} w_i^{\Sigma}, \quad (4)$$

так что  $\Delta y_i^{\text{HC}} = H_i^{\text{HC}} x_i^{\text{HC}}$ ,  $\Delta y_i^{\Sigma} = H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}$ . В этих соотношениях  $\Phi_i^l$ ,  $\Gamma_i^l$ ,  $H_i^l$  – известные матрицы динамики, порождающих шумов и матрицы наблюдения,  $w_i^l$  – центрированные белозумные последовательности размерности  $p^l$  с матрицами ковариаций  $Q_i^l$ ,  $l = \text{HC}, \Sigma$ ;  $v_i^{\Sigma}$  – центрированная белозумная составляющая суммарных погрешностей карты и внешнего датчика с матрицей ковариаций  $R_i^{\Sigma}$ ; эти последовательности для простоты предполагаются независимыми между собой и от начальных условий. Считается, что плотности распределения вероятности для векторов  $f(w_i^{\text{HC}})$ ,  $f(w_i^{\Sigma})$ ,  $f(v_i^{\Sigma})$ ,  $f(x_0^{\text{HC}})$ ,  $f(x_0^{\Sigma})$  известны.

В результате можно сформулировать следующую задачу фильтрации: оценить вектор состояния, описываемого (3), (4), по измерениям

$$y_i = \tilde{s}_i(x_i^{\text{HC}}) + H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}, \quad (5)$$

в которых  $\tilde{s}_i(x_i^{\text{HC}}) = s_i(H_i^{\text{HC}} x_i^{\text{HC}}) = \phi^k(y_i^{\text{HC}} - H_i^{\text{HC}} x_i^{\text{HC}})$  – функция, получаемая с учетом (1) и (2).

Если ввести составные векторы  $x_i = \begin{bmatrix} (x_i^{\text{HC}})^T & (x_i^{\Sigma})^T \end{bmatrix}^T$ ,  $w_i = \begin{bmatrix} (w_i^{\text{HC}})^T & (w_i^{\Sigma})^T \end{bmatrix}^T$  размерности  $n = n^{\text{HC}} + n^{\Sigma}$  и  $p = p^{\text{HC}} + p^{\Sigma}$  и функцию  $\tilde{s}_i(x_i) = \tilde{s}_i(x_i^{\text{HC}}) + H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma}$ , то задачу фильтрации можно записать в более компактной форме: оценить вектор состояния

$$x_i = \Phi_i x_{i-1} + \Gamma_i w_i, \quad (6)$$

по измерениям

$$y_i = \tilde{s}_i(x_i) + v_i^{\Sigma}, \quad (7)$$

где  $\Phi_i$ ,  $\Gamma_i$  формируются с учетом (3), (4).

Суть задачи заключается в получении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки вектора состояния с использованием накопленных к текущему моменту времени  $i$  измерений  $Y_i = [y_1, \dots, y_i]^T$ . Как отмечается в [1], искомая оптимальная оценка и соответствующая ей текущая характеристика точности в виде условной матрицы ковариаций определяются с помощью следующих соотношений:

$$\hat{x}_i^{\text{opt}}(Y_i) = E_{x_i/Y_i} \{x_i\} = \int x_i f(x_i / Y_i) dx_i, \quad (8)$$

$$P_i^{\text{opt}}(Y_i) = E_{x_i/Y_i} \{(x_i - \hat{x}_i^{\text{opt}}(Y_i))(x_i - \hat{x}_i^{\text{opt}}(Y_i))^T\}, \quad (9)$$

где  $f(x_i / Y_i)$  – апостериорная (условная к измерениям  $Y_i$ ) плотность. Здесь интеграл понимается как многократный с бесконечными пределами, а  $E$  – знак математического ожидания с нижним индексом, характеризующим функцию плотности распределения вероятности, для которой оно вычисляется.

Из материалов первой части статьи следует, что построение алгоритмов основано на различных методах аппроксимации апостериорной плотности, среди которых можно выделить два основных, определяемых соотношениями:

$$f(x_i / Y_i) \approx \sum_{j=1}^M \mu_i^j N(x_i; \hat{x}_i^j, P_i^j), \quad (10)$$

$$f(x_i / Y_i) \approx \sum_{j=1}^L \mu_i^j \delta(x_i - x_i^j). \quad (11)$$

Здесь  $\mu_i^j$  – веса, удовлетворяющие условиям нормировки;  $N(x_i; \hat{x}_i^j, P_i^j)$  – гауссовские плотности с математическими ожиданиями  $\hat{x}_i^j$  и матрицами ковариаций  $P_i^j$ ,  $j = 1, M$ ; а  $\delta(x_i - x_i^j)$ ,  $j = 1, L$ , – набор дельта-функций. Частный случай представления (10) при  $M = 1$  соответствует гауссовской аппроксимации апостериорной плотности. При выборе точек (узлов сетки)  $x_i^j$  исходя из детерминированного их характера соответствующий алгоритм получил наименование метода (фильтра) точечных масс. При случайном же выборе этих узлов тем или иным способом в результате получают различные модификации метода Монте-Карло. Важным при построении алгоритмов оказывается возможность представления плотности для составного вектора в виде

$$f(x_i / Y_i) = f(x_i^{\text{HC}} / Y_i) f(x_i^{\Sigma} / x_i^{\text{HC}}, Y_i). \quad (12)$$

Из представленных моделей следует, что в случае гауссовского характера плотностей  $f(w_i^{\Sigma})$ ,  $f(v_i^{\Sigma})$ ,  $f(x_0^{\Sigma})$  в принципе имеется возможность построить

экономичные алгоритмы нахождения оптимальных оценок и матриц ковариаций, основанные на банке фильтров Калмана размерности  $n^{\Sigma}$  [1].

## 2. Тенденции развития алгоритмов решения задачи навигации по ГФП

Обсудим далее те предложения, которые появились в последнее время при построении алгоритмов навигации по ГФП. Как отмечалось в первой части статьи, эти предложения в полной мере отражали тенденции, проявляющиеся в области построения алгоритмов нелинейной фильтрации. Здесь можно выделить два основных направления.

Одно из них связано с предположением о гауссовском характере апостериорной плотности  $f(x_i / Y_i)$ , создающем основу для построения алгоритмов калмановского типа.

Помимо упомянутых в первой части работы [1] обобщенного и итерационного фильтров Калмана, а также фильтров второго порядка был предложен ряд новых фильтров калмановского типа [2–19], основанных на ансцентном (unscented) преобразовании [5], интерполяционной формуле Стирлинга [2], аппроксимации Гаусса – Эрмита [13], а также на кубатурных формулах [15]. Наиболее известный из них – это так называемый ансцентный калмановский фильтр (Unscented Kalman Filter), нередко называемый фильтром без вычисления производных. Использование таких фильтров в задаче навигации по ГФП рассматривается в [8, 12, 14]. Однако их применение не всегда обеспечивает эффективное решение задачи [12, 14].

В свете обсуждаемой задачи особый интерес представляет второе направление развития алгоритмов нелинейной фильтрации, связанное с активным использованием метода Монте-Карло [3, 7, 10, 19–37].

Суть этого метода заключается в аппроксимации плотности с помощью соотношения (11), в котором  $x_i^j$ ,  $j = \overline{1, L}$ , – набор реализаций некоторых независимых случайных векторов. В частности, при использовании простейшей разновидности метода Монте-Карло при неизменности во времени вектора состояния, т.е. при  $x_i = \left( (x_i^{\text{HC}})^T, (x_i^{\Sigma})^T \right)^T = x$ , веса определяются в виде приведенного соотношения (36) из [1], однако узлы  $x^j$  формируются путем моделирования в соответствии с априорной плотностью  $f(x)$ , а  $\tilde{\mu}_0^j = 1/L$ . При использовании этой разновидности метода Монте-Карло при изменчивом векторе  $x_i$  соотношения для весов не изменятся, а отличие будет заключаться в том, что выборка  $x_i^j$  формируется на каждом шаге в соответствии с переходной плотностью  $f(x_i / x_{i-1}^j)$ .

Одно из достоинств метода Монте-Карло состоит в том, что при его использовании можно реализовать рекуррентную процедуру построения аппроксимации (11). Под рекуррентной здесь понимается такая процедура, в которой аппроксимация плотности в виде (11) на  $i$ -м шаге формируется с использованием выборки  $x_{i-1}^j$ , а веса вычисляются с учетом данных с предыдущего шага.

За последние десятилетия этот метод получил бурное развитие, и его модификации стали называться последовательными методами Монте-Карло (Sequential Monte Carlo methods) [23] или фильтрами частиц (particle filters) [33]. Отме-

тим некоторые основные приемы, применяемые при использовании метода Монте-Карло, повышающие его эффективность и могущие быть полезны также в задачах навигации по ГФП.

Во-первых, при построении аппроксимации в виде (11) важным представляется выбор используемого набора реализаций  $x_i^j$ . Эти реализации целесообразно формировать в области, где значения апостериорной плотности существенно отличны от нуля. Для достижения этого широко используется метод существенной выборки (Importance Sampling), направленный именно на такое формирование реализаций [23, 33]. Прием, обеспечивающий использование существенной выборки и рекуррентные процедуры формирования реализаций и вычисления весов при построении методов Монте-Карло, в англоязычной литературе получил наименование последовательной существенной выборки (Sequential Importance Sampling) [23, 33].

При реализации последовательных методов Монте-Карло возникает проблема вырождения алгоритма, которая проявляется в том, что с увеличением времени всего один вес будет иметь значение, близкое к единице, а остальные – близкие к нулю [23]. Указанный недостаток частично преодолевается за счет применения процедуры, получившей в литературе название последовательной существенной перевыборки (Sequential Importance Resampling) или бутстрэп (bootstrap)-процедуры [21, 23, 25]. Применительно к рассматриваемой задаче суть бутстрэп-процедуры заключается в том, что на множестве  $x_i^j$  ( $j = \overline{1, L}$ ) в соответствии с дискретным распределением вида (11) формируется новый набор реализаций  $\tilde{x}_i^j$ ,  $j = \overline{1, L}$ , что позволяет вместо (11) использовать следующую аппроксимацию:

$$f(x_i / Y_i) \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \delta(x_i - \tilde{x}_i^j). \quad (13)$$

Различные алгоритмы формирования выборок  $\tilde{x}_i^j$ ,  $j = \overline{1, L}$ , соответствующие дискретному распределению при наличии весов  $\mu_i^j$  и реализаций  $x_i^j$ , обсуждаются в работе [23]. Важно подчеркнуть, что значения  $\tilde{x}_i^j$  выбираются из ранее сформированного множества  $x_i^j$ ,  $j = \overline{1, L}$ , что сохраняет возможность рекуррентного формирования реализаций  $x_i^j$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и, как следствие, возможность построения рекуррентного алгоритма в целом. Соответствующий вклад реализаций, входящих в (11), (13), достигается здесь за счет того, что они воспроизводятся (клонировуются) при перевыборке чаще, чем те, у которых веса меньше. Иллюстрация этой процедуры приведена на рис. 1. Здесь на рис. 1, а представлен пример апостериорной плотности в задаче навигации по полю рельефа местности; на рис. 1, б серым цветом выделена выборка до проведения процедуры перевыборки, а черным – после ее применения; на рис. 1, в показаны изолинии апостериорной плотности на фоне выборки до перевыборки и на рис. 1, г – те же изолинии на фоне выборки, полученной после проведения перевыборки. Видно, что данная процедура позволяет «перераспределить» имеющуюся выборку в ту область, где апостериорная плотность существенно отлична от нуля, что и определяет ее эффективность.

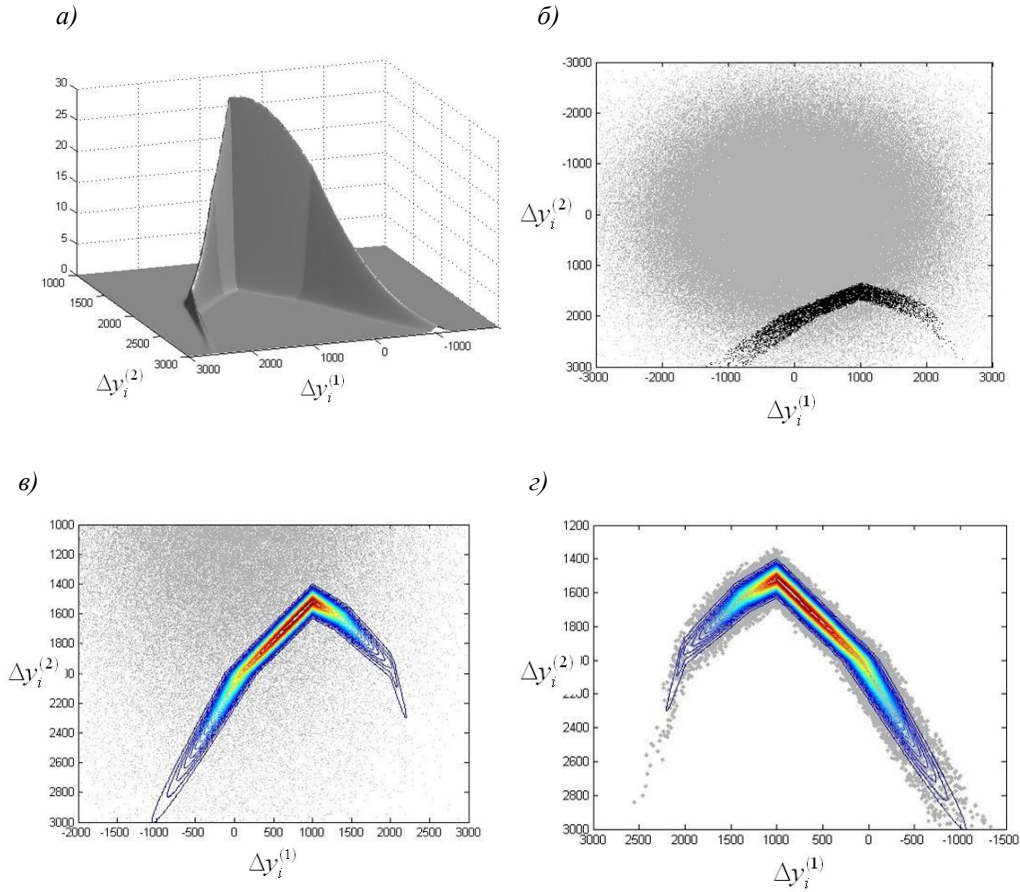


Рис. 1. Иллюстрация применения процедуры перевыбоки

Очень важная особенность последовательных методов Монте-Карло заключается в том, что в полном объеме удастся использовать преимущества, порожденные возможностью представления апостериорной плотности в виде (12). Это объясняется тем, что при использовании метода Монте-Карло могут с учетом этого представления строиться алгоритмы не только для случая квазидетерминированных моделей для вектора  $x_i^{\text{HC}}$ , но и при его описании в виде марковских последовательностей общего вида. Иными словами, удастся перенести идеи метода разделения, описанные в работах [38–40], на более общий случай. Процедура, направленная на упрощение алгоритмов за счет представления (12), в англоязычной литературе обычно называется Rao-Blackwellisation [23]. В русскоязычной литературе эта процедура называется методом аналитического интегрирования по части переменных [41–43].

Отмеченная особенность позволяет, в частности, упрощать алгоритмы для нередко используемых при обработке навигационной информации моделей вида [37]:

$$\begin{aligned}\Delta y_i^{\text{HC}} &= \Phi_i^{11} \Delta y_{i-1}^{\text{HC}} + \Phi_i^{12} \Delta V_{i-1}^{\text{HC}} + \Gamma_i^1 w_i^1, \\ \Delta V_i^{\text{HC}} &= \Phi_i^{21} \Delta y_{i-1}^{\text{HC}} + \Phi_i^{22} \left( \Delta y_{i-1}^{\text{HC}} \right) \Delta V_{i-1}^{\text{HC}} + \Gamma_i^2 w_i^2, \\ y_i &= s_i \left( \Delta y_i^{\text{HC}} \right) + H_i \left( \Delta y_i^{\text{HC}} \right) x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}, \quad i = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

где  $\Delta y_i^{\text{HC}} = [\Delta y_i^{(1)}, \Delta y_i^{(2)}]^T$ ,  $\Delta V_i^{\text{HC}} = [\Delta V_i^{(1)}, \Delta V_i^{(2)}]^T$  – погрешности координат и скорости,  $x_i^\Sigma$  описывается моделью (4),  $\Phi_i^{11}, \Phi_i^{12}, \Phi_i^{21}, \Gamma_i^1, \Gamma_i^2$  – известные матрицы,  $\Phi_i^{22}(\bullet), H_i(\bullet), s_i(\bullet)$  – известные функции, а  $w_i^1, w_i^2, v_i^\Sigma$  – центрированные белозумные гауссовские последовательности.

Более общий случай моделей такого вида рассмотрен в работах [24, 29, 31]. Возможность реализации процедуры аналитического интегрирования по части переменных применительно к модели такого вида обусловлена тем, что выборка  $\Delta y_i^{\text{HC}j}$  по  $i = 1, 2, \dots$  для каждого  $j$  формируется рекуррентно. Таким образом, для каждого  $j$  можно построить фильтр Калмана, с помощью которого определяются параметры гауссовской плотности  $f(x_i^\Sigma, \Delta V_i^{\text{HC}} / \Delta y_{1:i}^{\text{HC}j}, Y_i)$ , где  $\Delta y_{1:i}^{\text{HC}j}$  – вектор, включающий  $\Delta y_i^{\text{HC}j}$  для всех значений  $i = 1, 2, \dots$ . Важно подчеркнуть, что при использовании метода точечных масс реализовать идею частичного аналитического интегрирования применительно к такого рода моделям в общем случае не удастся [32].

Применению алгоритмов, основанных на различных модификациях последовательных методов Монте-Карло, в задачах навигации по ГФП посвящены, в частности, работы [22, 24, 26–28, 30–32, 34]. Особо здесь следует выделить работы, направленные на применение процедур аналитического интегрирования по части переменных [22, 23, 27, 31].

### 3. Проблемы и актуальные задачи построения алгоритмического обеспечения

При обсуждении проблем и некоторых актуальных вопросов, касающихся построения алгоритмического обеспечения в рассматриваемой задаче, целесообразно выделить два аспекта.

Один из них связан с проблемой идентификации моделей погрешностей используемых измерителей, включая погрешности карты. В постановке задачи, приведенной в разделе 1, предполагается, что модели, определяющие погрешности НС и суммарные погрешности измерителя и карты, известны. Очевидно, что как сами алгоритмы, так и соответствующие им характеристики точности в значительной степени зависят от вида и параметров этих моделей. Этот вопрос особенно актуален для случая, когда задача навигации по ГФП имеет протяженный во времени характер и необходимо корректно учитывать временные свойства погрешностей. Если принять во внимание неопределенности в указанных моделях, то постановку задачи (3)–(5) следует записать в виде:

$$x_i^{\text{HC}} = \Phi_i^{\text{HC}}(\theta^{\text{HC}})x_{i-1}^{\text{HC}} + \Gamma_i^{\text{HC}}(\theta^{\text{HC}})w_i^{\text{HC}}, \quad (14)$$

$$x_i^\Sigma = \Phi_i^\Sigma(\theta^\Sigma)x_{i-1}^\Sigma + \Gamma_i^\Sigma(\theta^\Sigma)w_i^\Sigma, \quad (15)$$

$$y_i = s_i(H_i^{\text{HC}}x_i^{\text{HC}}) + H_i^\Sigma(\theta^\Sigma)x_i^\Sigma + \Psi_i^\Sigma(\theta^\Sigma)v_i^\Sigma, \quad (16)$$

где  $\theta^{\text{HC}}, \theta^\Sigma$  – набор постоянных неизвестных параметров, конкретизирующих модель погрешностей НС и суммарных погрешностей карты и внешнего датчика. Ясно, что такую задачу решить в полном объеме в реальном масштабе вре-

мени весьма затруднительно, поскольку размерность составного вектора состояния существенно возрастает за счет появления подвекторов  $\theta^{\text{HC}}$ ,  $\theta^{\Sigma}$ . Более того, делать это не всегда целесообразно, поскольку задачу идентификации (определения параметров  $\theta^{\text{HC}}$ ,  $\theta^{\Sigma}$ ) разумно решать до момента непосредственного проведения коррекции с использованием данных карты, располагая результатами испытаний измерительных средств, а также результатами, полученными во время съемки полей, если речь идет о погрешностях карты. Поступая таким образом, в частности, при идентификации погрешностей НС, уравнения (14), (16) следует заменить уравнениями вида:

$$x_i^{\text{HC}} = \Phi_i^{\text{HC}}(\theta^{\text{HC}})x_{i-1}^{\text{HC}} + \Gamma_i^{\text{HC}}(\theta^{\text{HC}})w_i^{\text{HC}}, \quad (17)$$

$$\tilde{y}_i = \tilde{H}_i^{\text{HC}}x_i^{\text{HC}} + \tilde{\Psi}_i^{\text{HC}}(\theta^{\text{HC}})\tilde{v}_i^{\text{HC}}, \quad (18)$$

где  $\tilde{y}_i$ ,  $\tilde{v}_i^{\text{HC}}$  – измерения и их погрешности, полученные при проведении испытаний системы или датчика;  $\tilde{H}_i^{\text{HC}}$  – матрица, определяющая связь измерений с вектором состояния;  $\tilde{\Psi}_i^{\text{HC}}(\theta^{\text{HC}})$  – матрица, определяющая свойства флуктуационных составляющих этих измерений, порожденных, как правило, погрешностями списывания. При идентификации суммарных погрешностей карты и измерителя можно записать аналогичные уравнения [44]. Располагая представленными измерениями, нетрудно сформулировать задачу идентификации так, как это описано, например, в работах [36, 45–53], и заранее получить модель как самой НС, так и суммарных погрешностей карты и измерителя [44, 52].

Сделаем несколько комментариев. В первую очередь заметим, что сформулированная постановка задачи идентификации представляет собой задачу нелинейной фильтрации и в принципе все методы, изложенные выше и в [1], в полной мере могут быть использованы при решении этой задачи. Здесь важен учет возможности представления плотности по типу (12), т.е.

$$f(x_i^{\text{HC}}, \theta^{\text{HC}} / Y_i) = f(x_i^{\text{HC}} / \theta^{\text{HC}}, Y_i) f(\theta^{\text{HC}} / Y_i),$$

что при решении задачи (17), (18) позволяет существенно упростить разрабатываемые алгоритмы. Заметим, что здесь, так же как и ранее, полезным при анализе эффективности оказывается использование нижней границы точности по Рао – Крамеру. Алгоритмы ее вычисления применительно к такого рода задаче обладают особенностями, которые рассмотрены в работе [54]. Кроме того, такая постановка может быть легко обобщена на случай определения не только параметров модели, но и ее структуры. В этом случае приходится решать совместную нелинейную задачу распознавания гипотез и фильтрации [45, 49].

Наконец, отметим, что существует принципиальная возможность решать задачи типа (17)–(18) в реальном времени, имея в виду, что некоторые параметры требуют уточнения непосредственно в ходе решения задачи навигации по ГФП, например параметры, определяющие:

- характер течения или ветровых возмущений, влияющих на модель погрешностей НС;
- изменчивость временных вариаций, определяющих уровень погрешностей измерения при использовании магнитного поля;
- изменчивость самого геофизического поля и т.п. [55–57].

Другой аспект, на который целесообразно обратить внимание, связан с самой постановкой задачи. В рамках приведенной постановки задачи навигации по ГФП предполагается, что оцениванию подлежат погрешности одной системы, в



качестве которой здесь выступает корректируемая НС, на фоне погрешностей средства коррекции, т.е. суммарных погрешностей карты и измерителя. Этот подход является традиционным при обработке навигационной информации. В англоязычной литературе такой прием используется при построении complementary filters [58, 59], и в линейном случае он соответствует так называемой инвариантной постановке [41, 60, 61].

При обсуждении иной схемы построения важно вспомнить о так называемом принципе распределения информации, согласно которому все имеющиеся измерения можно разбить на две группы [62]. Одна из них рассматривается непосредственно как измерения в задаче фильтрации, а другая – как входные сигналы. После того как такое разделение выполнено, задача фильтрации фактически сводится к оцениванию не самих искомых параметров, а одних погрешностей на фоне других. Поясним это на простом примере одномерной задачи оценивания координат подвижного объекта, обратившись к измерениям (1) и (2) и полагая для простоты, что все величины скалярные, а функция  $\phi^k(X_i) = \phi(X_i)$ , т.е. карта, известна точно. Итак, согласно обычному подходу, вместо непосредственного решения задачи оценивания  $X_i$  по этим измерениям  $y_i^{\text{HC}} = X_i + \Delta y_i^{\text{HC}}$ ,  $y_i = \phi(X_i) + \Delta y_i$ , где  $\Delta y_i$  – погрешности внешнего датчика, переходим к другой задаче – оценивания  $\Delta y_i^{\text{HC}}$  по измерениям

$$y_i = \phi(y_i^{\text{HC}} - \Delta y_i^{\text{HC}}) + \Delta y_i,$$

в которых  $y_i^{\text{HC}}$  трактуется не как измерение, а как входной сигнал. Заметим, что при решении задачи навигации по ГФП такой прием наиболее распространен. Важное достоинство такой постановки заключается в том, что не требуется введение модели для самого оцениваемого параметра, в данном случае таковым является координата  $X_i$ . В то же время это достоинство одновременно и недостаток, который легко пояснить следующим образом. Предположим для простоты, что  $\phi(X_i) = X_i$ . В этом случае измерение фактически сводится к разностному измерению  $\Delta y_i = y_i - y_i^{\text{HC}} = -\Delta y_i^{\text{HC}} + \Delta y_i$ . Иными словами, погрешности  $\Delta y_i^{\text{HC}}$  оцениваются на фоне погрешностей  $\Delta y_i$ . К примеру, если обе эти погрешности носят высокочастотный характер, то эффект при решении такой задачи фильтрации будет минимальным. Если же учесть предполагаемый характер траектории или модель самого объекта, позволяющие отразить факт достаточно медленного изменения сигнала  $X_i$ , то указанные высокочастотные свойства будут очень полезны с точки зрения повышения точности оценивания. Именно это обстоятельство и определило интерес к задачам, в которых модель объекта используется как дополнительный источник информации [55, 61, 63, 64].

Из сказанного следует, что в качестве перспективной постановки задачи целесообразно рассматривать постановку, в которой к уравнениям, описывающим погрешности (5), (6), добавляется уравнение для подвектора  $x_i^{\text{ПО}}$ , описывающего сами навигационные параметры подвижного объекта (ПО)  $X_i = H^{\text{ПО}} x_i^{\text{ПО}}$ :

$$x_i^{\text{ПО}} = \Phi_i^{\text{ПО}}(x_{i-1}^{\text{ПО}}) + \Gamma_i^{\text{ПО}} w_i^{\text{ПО}}, \quad (19)$$

а измерения (1), (2) записываются как:

$$y_i = \phi^k \left( H^{\text{по}} x_i^{\text{по}} \right) + H_i^{\Sigma} x_i^{\Sigma} + v_i^{\Sigma}, \quad (20)$$

$$y_i^{\text{НС}} = H^{\text{по}} x_i^{\text{по}} + H_i^{\text{НС}} x_i^{\text{НС}} + v_i^{\text{НС}}, \quad (21)$$

где  $\Phi_i^{\text{по}}(\bullet)$ ,  $\Gamma_i^{\text{по}}$ ,  $H_i^{\text{по}}$  – известные функция и матрицы соответственно, а  $w_i^{\text{по}}$  – центрированная бел шумная последовательность с известной функцией плотности.

Сложность решения этой задачи обусловлена не только расширением размерности оцениваемого вектора состояния, что для нелинейной задачи само по себе является проблемой, но и тем обстоятельством, что функция  $\Phi_i^{\text{по}}(x_{i-1}^{\text{по}})$  может быть нелинейной относительно подвектора  $x_i^{\text{по}}$  [55, 61, 64]. Тем не менее именно это направление представляется перспективным на пути повышения эффективности применения систем навигации по ГФП.

Помимо отмеченных обстоятельств можно указать и на другие аспекты обсуждаемой задачи, которые могут быть в принципе учтены при ее рассмотрении в рамках теории нелинейной фильтрации, но не обсуждались в настоящей статье ввиду ее ограниченного объема. В частности, это вопросы комплексной обработки информации от нескольких полей, наличие выбросов в измерениях и погрешностей мультипликативного или негауссовского характера, выбор наиболее информативных траекторий. Важно также подчеркнуть, что успешное применение методов нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям в значительной степени заложило хорошие основы их применения для решения задачи навигации внутри помещений по картам мощностей сигналов [65] и так называемой задачи одновременного картографирования и локализации (SLAM – Simultaneous Localization and Mapping) [66–68], которую можно рассматривать как некое обобщение задачи навигации по ГФП.

### Заключение

Сформулированы некоторые направления развития алгоритмического обеспечения задачи навигации по геофизическим полям. Показано, что повышение эффективности разрабатываемых алгоритмов для решения этой задачи в полной мере связано с прогрессом в области разработки алгоритмов нелинейной фильтрации. Обсуждены проблемы и некоторые актуальные задачи построения алгоритмического обеспечения. Основными из них являются решение задачи в рамках неинвариантной постановки, предполагающей привлечение информации о модели движения объекта, и идентификация моделей используемых измерительных систем и конкретизирующих их параметров. Отмечено, что для эффективного решения этих проблем с успехом могут быть использованы также методы нелинейной фильтрации.

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект No14-29-00160).*

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 1. Обзор алгоритмов//Гирокоспия и навигация. - 2015. - № 3 (90). - С. 102-125.

2. **Nørgaard M., Poulsen N.K., and Ravn O.**, New developments in state estimation for nonlinear systems// Automatica, 2000, 36(11), pp. 1627-1638.
3. **Chen Z.**, Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond, 2003, [http://www.dsi.unifi.it/users/chisci/dfic/Nonlinear\\_filtering\\_Chen.pdf](http://www.dsi.unifi.it/users/chisci/dfic/Nonlinear_filtering_Chen.pdf), 69 p.
4. **Li X.R. and Jilkov V.P.**, A survey of maneuvering target tracking: Approximation techniques for nonlinear filtering // Proc. SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, 2004, pp. 537-550.
5. **Julier S.J. and Uhlmann J.K.** Unscented filtering and nonlinear estimation// Proc. IEEE, 2004, vol. 92(3), pp. 401-422.
6. **Li X.R.** Recursibility, batch and recursive forms of optimal linear estimation and filtering // Proc. of the Workshop on Multisensor Target Tracking: A Tribute to Oliver E. Drummond, 2004, pp. 99-111.
7. **Daum F.** Nonlinear filters: Beyond the Kalman filter // IEEE Aerospace and Electronic Systems, 2005, vol. 20(8), pp. 57-71.
8. **Metzger J., Wisotzky K., Wendel J., and Trömmner G.F.**, Sigma-point filter for terrain referenced navigation // Proc. of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, San Francisco, CA, August 2005.
9. **Lefebvre T., Bruyninckx, H., and de Schutter J.**, Nonlinear Kalman Filtering for Force-Controlled Robot Tasks, 2005, Berlin: Springer, 265 p.
10. **Simon D.** Optimal State Estimation. Kalman, H<sub>∞</sub>, and Nonlinear approaches, A John Wiley & Sons, Inc., 2006, 550 p.
11. **Степанов О.А.** Линейный оптимальный алгоритм в нелинейных задачах обработки навигационной информации// Гироскопия и навигация. - 2006.- N 4.- С. 11-20.
12. **Ånonsen K.B. and Hallingstad O.**, Sigma point Kalman filter for underwater terrain-based navigation, Control Applications in Marine Systems, 2007, vol. 7, Part 1, pp. 106-110.
13. **Arasaratnam I., Haykin S., and Elliott R.J.**, Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature, Proc. IEEE, 2007, vol. 95, no. 5, pp. 953-977.
14. **Stepanov O.A., Toropov A.B., and Amosov O.S.** Comparison of Kalman-type algorithms in nonlinear navigation problems for autonomous vehicles// 6-th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, 2007, pp. 493-498.
15. **Arasaratnam I. and Haykin S.** Cubature Kalman filters// IEEE Trans. on Automatic Control, 2009, vol. 54, no. 6, pp. 1254-1269.
16. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Линейные оптимальные алгоритмы в задачах оценивания с нелинейными измерениями. Связь с алгоритмами калмановского типа // Известия ТулГУ. Технический вестник. - 2012. - № 7. - С. 172-189.
17. **Dunik J., Šimandl M., and Straka O.**, Unscented Kalman filter: Aspects and adaptive setting of scaling parameter//IEEE Trans. on Automatic Control, 2012, 57(9), pp. 2411-2416.
18. **Stano P., Lendek Z., Braaksma J., Babuska R., de Keizer C. and den Dekker A.J.** Parametric Bayesian filters for nonlinear stochastic dynamical systems: A survey// IEEE Trans. on Cybernetics, 2013, vol. 43, no. 6, pp. 1607- 1624.
19. **Степанов О.А.** Основные подходы и методы решения прикладных задач обработки измерительной информации//Материалы XVI Конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». - СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», - 2014. - С. 12-35.
20. **Зарицкий В.С. Светник В.Б., Шимелевич Л.И.** Метод Монте-Карло в задачах оптимальной обработки информации // Автоматика и телемеханика. - 1975. - № 12. - С. 95-103.
21. **Gordon N.J., Salmond D.J., and Smith A.F.M.**, Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation// IEEE Proceedings, Pt. F, 1993, vol. 140, no. 2, pp. 107-113.
22. **Stepanov O.A., Ivanov A.M., and Korenevski M.L.** Monte Carlo methods for a special nonlinear filtering problem// 11th IFAC International Workshop Control Applications of Optimization, 2000, vol. 1, pp. 347-353.
23. **Doucet A., de Freitas N. and Gordon N.J.** Sequential Monte Carlo Methods in Practice, New York: Springer-Verlag, 2001. 581 p.
24. **Gustafsson F., Gunnarsson F., Bergman N., Forssell U., Jansson J., Karlsson R., and Nordlund P.-J.**, Particle filters for positioning, navigation and tracking// IEEE Trans. on Signal Processing, 2002, vol. 50, no. 2, pp. 425-437.
25. **Arulampalam M.S., Maskell S., and Gordon N.**, Tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking// IEEE Trans. on Signal Processing, 2002, vol. 50, no. 2, pp. 174-188.
26. **Metzger J. and Trömmner G.F.**, Studies on four terrain referenced navigation techniques. //Symposium Gyro Technology, 2002, pp. 15.0-15.9.
27. **Karlsson R. and Gustafsson F.**, Particle filter for underwater terrain navigation: Technical report, Report no.: LiTH-ISY-R-2530. Submitted to Statistical Signal Processing workshop 2003, <http://www.control.isy.liu.se/publications>. 7 p.
28. **Flament A., Fleury G., and Davoust M.-E.**, Particle filter and Gaussian-mixture filter efficiency

- evaluation for terrain-aided navigation // Proc. XII European Signal Processing Conference, 2004, pp. 605-608.
29. **Schön T., Gustaffson F., and Nordlund P.-J.**, Marginalized particle filters for linear/nonlinear state-space models // IEEE Trans. on Signal Processing, 2005, vol. 53, no. 7, pp. 2279-2289.
  30. **Ånonsen K.B. and Hallingstad O.**, Terrain aided underwater navigation using point mass and particle filters // PLANS IEEE, 2006, pp. 1027-1035.
  31. **Gustafsson F.**, Particle filter theory and practice with positioning applications // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, vol. 25, no. 7, 2010, pp. 53-82.
  32. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Сопоставление метода сеток и методов Монте-Карло в задаче корреляционно-экстремальной навигации // XVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. - 2010. - С. 308-311 (на английском и русском языках).
  33. **Doucet A. and Johansen A.M.**, A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later, In: The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering. Oxford Handbooks in Mathematics, Oxford: Oxford University Press, 2011, pp. 656-705.
  34. **Степанов, О.А., Торопов А.Б.** Применение методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования по части переменных в задаче коррекции навигационной системы // XX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. - 2013. - С. 252-255.
  35. **Берковский Н.А., Степанов О.А.** Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. - 2013. - № 3, т. 52. - С. 3-14.
  36. **Särkkä, S.** Bayesian Filtering and Smoothing/ S. Särkkä. - Cambridge University Press. -2013. - P.252
  37. **Степанов О.А., Торопов А.Б.** Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. - 2014. - С. 3324-3337.
  38. **Magill D.T.**, Optimal adaptive estimation sampled stochastic processes, IEEE Trans. on Automatic Control, Oct.1965, vol. AC-10, no. 4, pp. 434-439.
  39. **Lainiotis D.G.**, Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaptation. IEEE Trans. Automatic Control, Apr. 1971, vol. 16, pp. 160-170.
  40. **Лайниотис Д.Г.** Разделение – единый метод построения адаптивных систем // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. - 1976.- Т. 64, N8. - I. Оценивание - С.8-27, II. Управление - С. 74-94.
  41. **Степанов О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации/ О.А. Степанов. - СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 1998. - 369 с.
  42. **Соболь И.М.** Численные методы Монте-Карло/ И. М. Соболь. - М.: Наук, гл. редакция физ.-мат. литературы, 1973. - 312 с.
  43. **Ермаков С.М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы/С.М. Ермаков. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1971. - 471 с.
  44. **Степанов О.А., Моторин А.В., Васильев В.А., Торопов А.Б.** Применение методов нелинейной фильтрации в задачах построения моделей ошибок измерителей и погрешностей карты // Материалы XXIX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. - СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». - 2014. - С. 293-302.
  45. **Белоглазов И.Н., Казарин С.Н.** Стереоскопические навигационные системы. //Известия РАН. Теория и системы управления. - 1997. - N 6. - С. 15-37.
  46. **Белоглазов И.Н., Казарин С.Н.** Совместное оптимальное оценивание, идентификация и проверка гипотез в дискретных динамических системах. //Известия РАН. Теория и системы управления. - 1998. - N4. - С 69-73.
  47. **Розов А.К.** Нелинейная фильтрация сигналов. - М.: Политехника, 2002.- 372 с.
  48. **Белоглазов И.Н., Казарин С.Н.** Стереоскопические системы навигации и наблюдения // Гироскопия и навигация. - 2000. - N2 (29). - С. 70-87.
  49. **Дмитриев С.П., Степанов О.А.** Многоальтернативная фильтрация в задачах обработки навигационной информации // Радиотехника. - 2004. - N7. - С. 11-17.
  50. **Степанов О.А., Соколов А.И., Долнакова А.С.** Анализ потенциальной точности оценивания параметров случайных процессов в задачах обработки навигационной информации.// О.А. Степанов, А.И. Соколов, А.С. Долнакова/ Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН. - 2014. - С. 3324-3337.
  51. **Степанов О.А., Моторин А.В.** Сравнение методов идентификации моделей ошибок датчиков, основанных на вариациях Аллана и алгоритмах нелинейной фильтрации // XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам - СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2014 - С. 98-103.

52. Степанов О.А., Соколов А.В., Торопов А.Б., Васильев В.А., Краснов А.А. Выбор информативных траекторий в задаче корреляционно-экстремальной навигации с учетом погрешностей карты и измерителей // Материалы XXIX конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н.Острякова. - СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2014. - С. 217-225.
53. Stepanov O.A. and Motorin A.V., Designing an error model for navigation sensors using the Bayesian approach // IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI), Sept 14-16, 2015. San Diego, CA, USA, pp. 54-58.
54. Степанов О.А., Васильев В.А. Предельно достижимая точность оценивания по Рао-Крамеру в задачах нелинейной фильтрации при наличии порождающих шумов и ошибок измерения, зависящих от оцениваемых параметров. // Автоматика и телемеханика. Известия Академии наук. - 2016. - №1.
55. Koifman M. and Bar-Itzhack I., Inertial navigation system aided by aircraft dynamics // IEEE Trans. on Control Systems Technology 1999, 7 (4), pp. 487-493.
56. Canciani A.J. and Raquet J.F., Absolute positioning using the Earth's magnetic anomaly field // Proc. Institute of Navigation 2015 International Technical Meeting, 2015, pp. 265-278.
57. Stepanov O.A., Koshaev D.A., and Motorin A.V., Designing models for signals and errors of sensors in airborne gravimetry using nonlinear filtering methods // Proc. Institute of Navigation 2015 International Technical , 2015, pp. 279-284.
58. Brown R.G., Integrated navigation systems and Kalman filtering: A perspective// Navigation, USA, 1972-1973, vol.19, no. 4, pp. 355-362.
59. Brown R.G. and Hwang P.Y.C. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering. 2nd ed., Wiley, New York, 1992.
60. Мансур М. Э., Степанов О.А. Комплементарный фильтр в задачах комплексной обработки избыточных измерений. // Труды Всероссийской научной конференции по проблемам управления в технических системах. - 2015. - С. 380-384.
61. Дмитриев С.П., Степанов О.А. Неинвариантные алгоритмы обработки информации инерциальных навигационных систем //Гироскопия и навигация. - 2000. - N1(30). - С. 24-38.
62. Красовский, А.А. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем/ А. А. Красовский, И. Н. Белоглазов, Г.П. Чигин. - М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1979. - 448 с.
63. Дмитриев С.П., Кошаев Д.А. Оценивание непрерывного сигнала с учетом ограничений // Автоматика и телемеханика. - 2011. - N 7. - С. 116-133.
64. Crocoll P., Seibold J., Scholz G., and Trömmner G.F., Model-aided navigation for a quadrotor helicopter: A novel navigation system and first experimental results// Journal of the Institute of Navigation, vol. 61, no 4, 2014, pp. 253-271.
65. Honkavirta V., Perälä T., Ali-Löytty S., and Piché R., A comparative survey of WLAN location fingerprinting methods, Proc. 6th Workshop on Positioning, Navigation and Communication 2009 (WPNC'09). Hannover, Germany, March 2009, pp. 243-251.
66. Feder H.J.S., Leonard J.J., and Smith C.M., Adaptive mobile robot navigation and mapping// Int. J. of Robotics Research, Special Issue on Field and Service Robotics, July 1999, vol. 18, no. 7, pp. 650-668.
67. Törnqvist D., Schön Th. B., Karlsson R., and Gustafsson F., Particle filter SLAM with high dimensional vehicle model // Journal of Intelligent and Robotic Systems, August 2009, 55(4-5), pp. 249-266.
68. Ho B. et al., Autonomous navigation for autonomous underwater vehicles based on information filters and active sensing // Sensors, 2011, no. 11, pp. 10958-10980.

**Stepanov O.A., Toropov A.B.** (Concern CSRI Elektropribor, JSC).

Nonlinear filtering for map-aided navigation. Part 2. Development trends // Гироскопия и Навигация. 2015. № 4(91). P. 147-159.

**Abstract.** This paper deals with the problem of map-aided navigation. Based on the previous overview of nonlinear filtering algorithms for this problem solution, current trends in the development of such algorithms are discussed. Some new lines in identification of error models and the use of information on the probable vehicle motion are considered.

**Key words:** map-aided navigation, nonlinear filtering algorithms, identification

Материал поступил 05.06.15