

А. А. МАСЛОВ, Д. А. МАСЛОВ, И. В. МЕРКУРЬЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА ГИРОСКОПА ПРИ НАЛИЧИИ ПОЗИЦИОННОГО И СОПУТСТВУЮЩЕГО ЕМУ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Проведено исследование динамики резонатора при комбинированном возбуждении колебаний, возникающем в результате одновременного действия возбуждения позиционного и сопутствующего ему параметрического. Волновая картина колебаний исследовалась с помощью асимптотического метода усреднения Крылова – Боголюбова. Исследована устойчивость стационарного режима колебаний резонатора и получена формула для определения угловой скорости основания.

Введение

В настоящее время волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации, применяемых в составе навигационных систем подвижных объектов [1]. В основе функционирования ВТГ лежит физический принцип, заключающийся в инертных свойствах упругих волн колебаний в осесимметричном теле [2, 3].

Рассмотрим позиционное возбуждение электрическими силами. Для этого на электроды управления кроме постоянного опорного напряжения подается еще и переменное. Такое возбуждение может использоваться для создания начальной стоячей волны в резонаторе и для работы гироскопа в режиме датчика угловой скорости. При использовании позиционного возбуждения появляется сопутствующее ему параметрическое возбуждение колебаний, которым при малых амплитудах управляющего напряжения можно пренебречь [4]. Позиционное возбуждение колебаний кольцевого резонатора ВТГ изучено в работах [2, 5]. Комбинированное возбуждение, появляющееся при подаче на электрод переменного напряжения с постоянной составляющей и наличии непостоянства зазора между электродом и кольцом, рассмотрено в книге [2]. В данной статье исследуется влияние на позиционное возбуждение колебаний резонатора сопутствующего ему параметрического возбуждения.

Уравнения малых вынужденных колебаний резонатора

Рассмотрим тонкий упругий цилиндрический резонатор (рис. 1), один край которого свободен, а другой жестко прикреплен к подвижному основанию. Для описания деформаций резонатора введем ортогональную систему координат $\xi\eta\zeta$, связанную с меридианами и параллелями его срединной поверхности.

Маслов Александр Анатольевич. Кандидат технических наук, доцент Московского энергетического института (технический университет).

Маслов Дмитрий Александрович. Студент 5-го курса Московского энергетического института.

Меркурьев Игорь Владимирович. Доктор технических наук, заведующий кафедрой Московского энергетического института.

Пусть $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ – вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности оболочки в осях $\xi\eta\zeta$. Колебания упругой цилиндрической оболочки 1 на основании 2 возбуждаются электродами управления 3. Электроды съема информации расположены вблизи свободной кромки резонатора с внутренней стороны цилиндра.

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Oxyz$, ось z направим по оси симметрии резонатора. Предположим, что оболочка как целое вращается вокруг своей оси симметрии z с угловой скоростью Ω , которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с характерной расчетной частотой колебаний резонатора.

В качестве криволинейных координат примем нормализованную (отнесенную к радиусу резонатора) длину образующей α ($0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = L/R$) и угол в окружном направлении θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

При работе гироскопа используется вторая основная форма колебаний тонкой цилиндрической оболочки резонатора. Функция нормального прогиба резонатора согласно [5] может быть записана следующим образом:

$$w = -4\psi(\alpha)f_* \cos 2\theta + 4\psi(\alpha)g_* \sin 2\theta, \quad (1)$$

где $-4\psi(\alpha)f_*$ и $4\psi(\alpha)g_*$ – обобщенные координаты основной формы колебаний, равные радиальному смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом в 45° ; $\psi(\alpha) = 1.067 \cos(1.312\alpha) - 1.067 \operatorname{ch}(2.355\alpha) - 1.795 \sin(1.312\alpha) + \operatorname{sh}(2.356\alpha)$ – функция второй основной формы колебаний; f_*, g_* – функции времени, соответствующие второй форме колебаний.

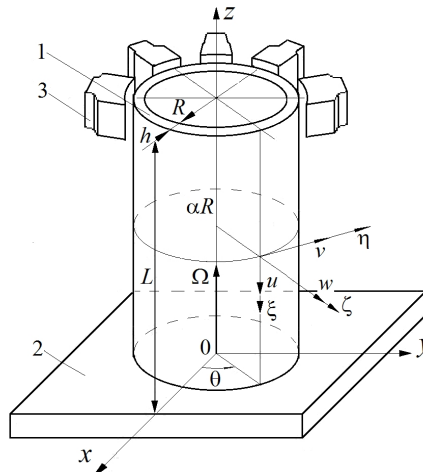


Рис. 1. Расчетная схема ВТГ

В дальнейших исследованиях будем применять динамическую модель основной формы колебаний электромеханической системы, представляющей собой резонатор с 16-ю электродами управления [6]:

$$\begin{aligned} m\ddot{f}_* + kf_* - F_1 &= 0, \\ m\ddot{g}_* + kg_* - F_2 &= 0, \\ q_i &= U_i C_i \quad (i = 1, \dots, 16), \end{aligned} \quad (2)$$

где m – приведенная масса цилиндрического резонатора, соответствующая основной форме колебаний; k – приведенная жесткость, соответствующая основной форме колебаний, $k = m\omega_2^2$ (ω_2 – частота колебаний); F_1 и F_2 – силы, зависящие от напряжений U_i , приложенных к i -м электродам, расположенным под углом $\theta_i = \pi(i-1)/8$ к отсчетной оси; q_i – заряд на конденсаторе, образованный силовым электродом и резонатором; C_i – мгновенная емкость, зависящая от нормального прогиба резонатора w_i

$$C_i = \varepsilon_0 S / (d - w_i) = C_0 / (1 - w_i / d), \quad (3)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; S – площадь электрода; d – зазор между недеформированным резонатором и электродами.

Энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} \frac{q_i^2}{C_i}. \quad (4)$$

Предполагается, что перекрестное влияние конденсаторов отсутствует.

Подставляя (1) в (3), а затем (3) в (4) и дифференцируя энергию электрического поля (4) по f_* и g_* , найдем пондеромоторные силы, действующие на резонатор:

$$F_1 = \frac{-4\psi(\alpha_1)}{2dC_0} \sum_{i=1}^{16} q_i^2 \cos 2\theta_i; \quad F_2 = \frac{4\psi(\alpha_1)}{2dC_0} \sum_{i=1}^{16} q_i^2 \sin 2\theta_i. \quad (5)$$

С помощью электродов управления создается переменное во времени силовое поле, неизменно ориентированное относительно основания гироскопа. Предположим, что собственные частоты резонатора по второй основной собственной форме колебаний совмещены и поэтому электростатической балансировки резонатора не требуется. Разность потенциалов между силовыми электродами и резонатором зададим следующим образом:

$$U_1 = U_9 = U_0(1 + u \cos \omega_0 t), \quad U_5 = U_{13} = U_0(1 - u \cos \omega_0 t); \quad (6)$$

$$U_i = U_0 \sqrt{1 + 0.5u^2} \quad (i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16),$$

где U_0 – постоянное опорное напряжение; u – нормализованная амплитуда напряжения для возбуждения второй основной моды колебаний резонатора; ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора.

В этом случае пондеромоторные силы, создаваемые 1, 9 и 5, 13 электродами пропорциональны следующим выражениям:

$$U_0^2 + 0.5U_0^2 u^2 + 2U_0^2 u \cos \omega_0 t + 0.5U_0^2 u^2 \cos 2\omega_0 t;$$

$$U_0^2 + 0.5U_0^2 u^2 - 2U_0^2 u \cos \omega_0 t + 0.5U_0^2 u^2 \cos 2\omega_0 t$$

соответственно.

Таким образом, для возбуждения второй основной формы колебаний резонатора используется позиционное возбуждение и сопутствующее параметрическое возбуждение.

Способ задания разности потенциалов отличается от предложенного в работе [4] тем, что на некоторые электроды подается постоянное опорное напряжение, необходимое для сохранения равновесности резонатора. Кроме того, амплитуда нормализованного напряжения u не является малой ($0 < u \leq 1$).

Подставляя (1) в (3), а затем в третье уравнение системы (2), найдем выражение для заряда на i -м конденсаторе

$$q_i = U_i C_0 \left(\frac{-4\psi(\alpha_1) f^*}{d} \cos 2\theta_i + \frac{4\psi(\alpha_1) g^*}{d} \sin 2\theta_i \right). \quad (7)$$

Определяя силы F_1 и F_2 , подставляем в (5) значения зарядов q_i , полученных из (6) и (7), опуская нелинейные слагаемые по обобщенным координатам

$$F_1 = -\tilde{\varepsilon}[(2+u^2)f + u \cos \mu \tau + 0.5u^2 f \cos 2\mu \tau], \quad F_2 = \tilde{\varepsilon}(2+u^2)g, \quad (8)$$

где $\tilde{\varepsilon} = 16\psi_2^2 \alpha_1 U_0^2 C_0 / d$; $f = -4\psi(\alpha_1) f^* / d$ и $g = 4\psi(\alpha_1) g^* / d$ – безразмерные обобщенные координаты основной формы колебаний.

Подставляя (8) в первое и второе уравнения системы (1), вводя безразмерное время $\tau = \omega_2 t$, а также учитывая демпфирование колебаний и угловую скорость вращения основания, получаем уравнения динамики резонатора:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= -\gamma \dot{f} + v_s \dot{g} + \tilde{\varepsilon}[(2+u^2)f + u \cos \mu \tau + 0.5u^2 f \cos 2\mu \tau]; \\ \ddot{g} + g &= -\gamma \dot{g} - v_s \dot{f} + \tilde{\varepsilon}(2+u^2)g, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{\varepsilon} = 128\psi_2^2(\alpha_1)U_0^2C_0 / (md^2\omega_2^2)$ – безразмерный коэффициент, характеризующий малость электрических сил, действующих на резонатор; v – безразмерная угловая скорость; γ – безразмерный коэффициент демпфирования колебаний.

В случае мягкого резонансного возбуждения имеем $\mu = \omega_0 / \omega_2 = 1 + \tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}$ – относительная частотная настройка между частотой возбуждения ω_0 и характерной частотой резонатора ω_2 . Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ .

При $u_0 = 0$ система уравнений описывает динамику резонатора при подаче на управляющие электроды опорного напряжения. Из уравнений (9) следует, что опорное напряжение вызывает снижение частоты собственных колебаний. Эти выводы согласуются с результатом, полученным в [6].

Для того чтобы в дальнейшем не учитывать слагаемые $\tilde{\varepsilon}(2+u^2)f$ и $\tilde{\varepsilon}(2+u^2)g$, указывающие на незначительное изменение частоты колебаний резонатора, изменим безразмерное время в $\sqrt{1 - \tilde{\varepsilon}(2+u^2)}$ раз и запишем систему (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= -\gamma \dot{f} + v \dot{g} + \tilde{\varepsilon}(u \cos \mu \tau + 0.5u^2 f \cos 2\mu \tau), \\ \ddot{g} + g &= -\gamma \dot{g} - v \dot{f}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) описывают случай комбинированного возбуждения. Первое слагаемое в квадратных скобках характеризует позиционное возбуждение резонатора, второе – параметрическое. Значения малых параметров $\tilde{\varepsilon}$, γ , v_s и $\tilde{\Delta}$ имеют порядок $10^{-5} - 10^{-7}$. Это обеспечивает высокую точность приближенных осредненных результатов.

Осреднение уравнений движения

К возмущенной системе (10) применим метод усреднения Крылова – Боголюбова. Для этого приведем ее к стандартному виду посредством перехода от переменных $f, g, \dot{f}, \dot{g}$ к оскулирующим переменным q_1, p_1, q_2, p_2 :

$$\begin{aligned} f &= p_1 \sin \mu \tau + q_1 \cos \mu \tau, & \dot{f} &= \mu(p_1 \cos \mu \tau - q_1 \sin \mu \tau), \\ g &= p_2 \sin \mu \tau + q_2 \cos \mu \tau, & \dot{g} &= \mu(p_2 \cos \mu \tau - q_2 \sin \mu \tau). \end{aligned}$$

Уравнения движения в медленных переменных q_1, p_1, q_2, p_2 в первом приближении метода осреднения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= (4q_2 v - 4q_1 \gamma + (\tilde{\varepsilon} u^2 - 8\tilde{\Delta}) p_1) / 8, & \dot{q}_2 &= (-q_1 v - q_2 \gamma - 2p_2 \tilde{\Delta}) / 2, \\ \dot{p}_1 &= (4p_2 v - 4p_1 \gamma + (\tilde{\varepsilon} u^2 + 8\tilde{\Delta}) q_1 + 4\tilde{\varepsilon} u) / 8, & \dot{p}_2 &= (-p_1 v - p_2 \gamma + 2q_2 \tilde{\Delta}) / 2. \end{aligned}$$

Заменяя безразмерные переменные

$$\tilde{\varepsilon} = 4\varepsilon, \tilde{\Delta} = \Delta / 2 \quad (11)$$

и уменьшая масштаб времени вдвое, приведем систему к виду:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 v - q_1 \gamma + (\varepsilon u^2 - \Delta) p_1, & \dot{q}_2 &= -q_1 v - q_2 \gamma - p_2 \Delta, \\ \dot{p}_1 &= p_2 v - p_1 \gamma + (\varepsilon u^2 + \Delta) q_1 + 4\varepsilon u, & \dot{p}_2 &= -p_1 v - p_2 \gamma + q_2 \Delta. \end{aligned} \quad (12)$$

Для приложений важно исследование устойчивости стационарных режимов колебаний резонатора.

Стационарные режимы колебаний резонатора

Приравняв правые части системы (12) к нулю, получим систему линейных уравнений относительно медленных переменных:

$$\begin{aligned} q_2 v - q_1 \gamma + (\varepsilon u^2 - \Delta) p_1 &= 0, & -q_1 v - q_2 \gamma - p_2 \Delta &= 0, \\ p_2 v - p_1 \gamma + (\varepsilon u^2 + \Delta) q_1 &= -4\varepsilon u, & -p_1 v - p_2 \gamma + q_2 \Delta &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) линейная неоднородная. Она имеет единственное нетривиальное решение, если ее определитель W отличен от нуля, т.е.

$$W = v^4 + 2v^2(\gamma^2 - \Delta^2) + (\gamma^2 + \Delta^2)(\gamma^2 + \Delta^2 - u^4 \varepsilon^2) \neq 0.$$

Найдем стационарный режим:

$$q_1 = 4\varepsilon u \left((\varepsilon u^2 - \Delta)(\gamma^2 + \Delta^2) + \Delta v^2 \right) / W, \quad q_2 = -4\varepsilon u \gamma (\varepsilon u^2 - 2\Delta) v / W;$$

$$p_1 = 4\varepsilon u \gamma (\gamma^2 + \Delta^2 + v^2) / W, \quad p_2 = -4\varepsilon u v (\gamma^2 + \varepsilon \Delta u^2 - \Delta^2 + v^2) / W.$$

Вычислим амплитуды колебаний

$$A = \sqrt{q_1^2 + p_1^2} = \sqrt{\gamma^2 + \Delta^2} Q / W, \quad B = \sqrt{q_2^2 + p_2^2} = v Q / W, \quad (14)$$

где $Q = 4\varepsilon u \sqrt{(\gamma^2 + \Delta^2 - 2\varepsilon u^2 \Delta + \varepsilon^2 u^4)(\gamma^2 + \Delta^2) + 2(\gamma^2 + \varepsilon u^2 \Delta - \Delta^2)v^2 + v^4}$.

Из (14) следует, что на подвижном основании отношение амплитуд колебаний пропорционально угловой скорости основания:

$$v = B \sqrt{\gamma^2 + \Delta^2} / A, \quad (15)$$

т. е. гироскоп является датчиком угловой скорости.

Отметим, что формула (15) совпадает с выражением определения угловой скорости, полученным в работе [5] при рассмотрении уравнений (10) без слагаемого, характеризующего параметрическое возбуждение колебаний.

Исследование устойчивости стационарных колебаний

Исследуем систему (12)

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (16)$$

где $a_1 = 4\gamma$, $a_2 = 2\Delta^2 + 2v^2 + 6\gamma^2 - u^4\varepsilon^2$, $a_3 = 2\gamma(2\Delta^2 + 2v^2 + 2\gamma^2 - u^4\varepsilon^2)$;

$$a_4 = \Delta^4 - 2\Delta^2v^2 + v^4 + 2\Delta^2\gamma^2 + \gamma^4 + 2v^2\gamma^2 - u^4(\Delta^2\varepsilon^2 + \gamma^2\varepsilon^2).$$

Корни этого уравнения комплексные. Если на комплексной плоскости переменной λ корни уравнения (16) λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) лежат в левой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то решения системы (12) будут асимптотически устойчивыми и с течением времени будут стремиться к стационарному режиму. Согласно алгебраическому критерию устойчивости Ляпунова–Шипара, для того чтобы многочлен (16) имел все корни с отрицательными действительными частями, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты полинома были положительными $a_j > 0$ и, кроме того, выполнялось неравенство $\Delta_3 = a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0$.

Учитывая, что первые коэффициенты $a_0 = 1$ и $a_1 = 4\gamma$ всегда положительны, и что условие $a_2 > 0$ выполняется при выполнении неравенства $a_3 > 0$, представим условия устойчивости в виде системы трех неравенств:

$$\begin{aligned} 2 + 2\Delta_1^2 + 2v_1^2 - \varepsilon_1^2 &> 0, & 1 + 2v_1^2 + 2\Delta_1^2 - \varepsilon_1^2 + v_1^4 - 2v_1^2\Delta_1^2 - \varepsilon_1^2\Delta_1^2 + \Delta_1^4 &> 0; \\ 16 + 16v_1^2 + 16\Delta_1^2 - 8\varepsilon_1^2 - 4v_1^2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^4 + 16v_1^2\Delta_1^2 &> 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta_1 = \Delta/\gamma$, $\varepsilon_1 = u^2\varepsilon/\gamma$, $v_1 = v/\gamma$.

С л у ч а й 1. Рассмотрим случай неподвижного основания ($v_1 = 0$). Из неравенств (17) после подстановки в них $v_1 = 0$ следует, что они выполняются при условии

$$\varepsilon_1^2 - \Delta_1^2 < 1, \quad (18)$$

которое является условием асимптотической устойчивости колебаний.

Так как $\varepsilon_1 > 0$, то границей является верхняя ветвь гиперболы $\varepsilon_1^2 - \Delta_1^2 = 1$.

При $\Delta_1 = 0$ получим минимальную величину $\varepsilon_1 = 1$ возбуждения параметрического резонанса. Область неустойчивости показана на рис. 2, а.

Амплитудно-частотная характеристика $A(\Delta)$ имеет вид

$$A = \sqrt{q_1^2 + p_1^2} = 4u\varepsilon\sqrt{(u^2\varepsilon - \Delta)^2 + \gamma^2} / (\gamma^2 + \Delta^2 - u^4\varepsilon^2).$$

На неподвижном основании ($v = 0$) в резонансном случае ($\Delta = 0$) имеем стационарное значение амплитуды колебаний

$$A = \frac{4\varepsilon_1}{u} \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} / (1 - \varepsilon_1^2), \quad (19)$$

которое незначительно отличается от максимального.

С л у ч а й 2. Проведем исследование стационарных режимов колебания резонатора ВТГ на подвижном основании ($v_1 \neq 0$) при точной настройке в резонанс ($\Delta_1 = 0$).

Из неравенств (17) после подстановки в них $\Delta_1 = 0$ следует, что они выполняются, если

$$\varepsilon_1 < v_1^2 + 1, \quad \varepsilon_1 < 2, \quad (20)$$

что соответствует условию устойчивости колебаний.

Границей области являются парабола $\varepsilon_1 = 1 + v_1^2$ при $|v_1| \leq 1$ и прямая $\varepsilon_1 = 2$ при $|v_1| > 1$.

Построим область неустойчивости (рис. 2, б) в параметрах v_1, ε_1 .

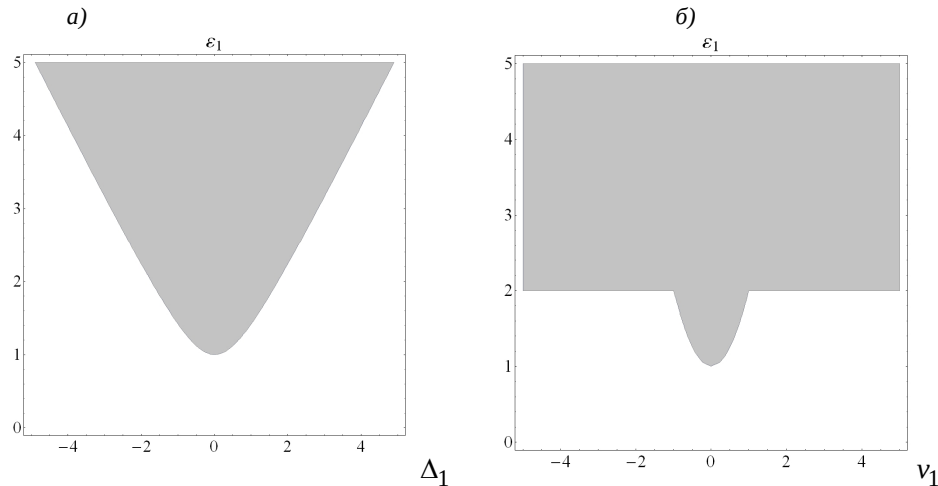


Рис. 2. Области неустойчивости: а) при $v_1 = 0$; б) при $\Delta_1 = 0$

С л у ч а й 3. Исследуем решения системы (12) на устойчивость на подвижном основании ($v_1 \neq 0$) вблизи резонанса ($\Delta_1 \neq 0$). Решение системы асимптотически устойчиво, если выполняется система неравенств (17). Уравнение $f_1(\varepsilon_1, \Delta_1, v_1) = 2 + 2\Delta_1^2 + 2v_1^2 - \varepsilon_1^2 = 0$ границы первого неравенства системы (17) описывает в неявном виде при фиксированном значении v_1 функцию $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta_1)$. Исследуя эту функцию на экстремум, найдем минимальное значение функции, достигаемое при $\Delta_1 = 0$ и равное $\varepsilon_{1\min}^{(1)} = \sqrt{2}\sqrt{1+v_1^2}$. Уравнение границы третьего неравенства системы (17) имеет минимальное значение $\varepsilon_{1\min}^{(3)} = 2$ при $\Delta_1 = 0$. Уравнение границы второго неравенства системы (17) достигает $\varepsilon_{1\max}^{(2)} = 1 + v_1^2$ при $\Delta_1 = 0$, а $\varepsilon_{1\min}^{(2)} = \sqrt{2}\sqrt{-v_1^2 + \sqrt{4v_1^2 + v_1^4}}$ при $\Delta_1 = \pm\sqrt{\sqrt{4v_1^2 + v_1^4} - 1}$.

Таким образом, граница области неустойчивости имеет при значениях нормализованной угловой скорости от нуля до единицы ($0 < v_1 \leq 1$) два минимума $\varepsilon_{1\min}^{(2)}$ и один максимум $\varepsilon_{1\max}^{(2)}$. При угловой скорости, равной единице (рис. 3, а),

граница области имеет один максимум, равный $\varepsilon_{1\max}^{(2)} = \varepsilon_{1\min}^{(3)} = \varepsilon_{1\min}^{(1)} = 2$ при $\Delta_1 = 0$, и два минимума $\varepsilon_{1\min}^{(2)} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}$ при $\Delta_1 = \pm\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

При увеличении угловой скорости ($v_1 > 1$), например равной двум (рис. 3, б), граница области неустойчивости имеет три минимума: один $\varepsilon_{1\min}^{(3)} = 2$ при $\Delta_1 = 0$ и два, равных $\varepsilon_{1\min}^{(2)} = \sqrt{2}\sqrt{-v_1^2 + \sqrt{4v_1^2 + v_1^4}}$ при $\Delta_1 = \pm\sqrt{4v_1^2 + v_1^4} - 1$. При дальнейшем увеличении скорости имеем $\varepsilon_{1\min}^{(3)} = 2$ при $\Delta_1 = 0$ и два равных минимума $\varepsilon_{1\min}^{(2)} \rightarrow 2$ при $\Delta_1 \rightarrow +v_1$ и $\Delta_1 \rightarrow -v_1$.

На рис. 3 изображены границы области неустойчивости при $v_1 = 1$ и $v_1 = 2$ соответственно.

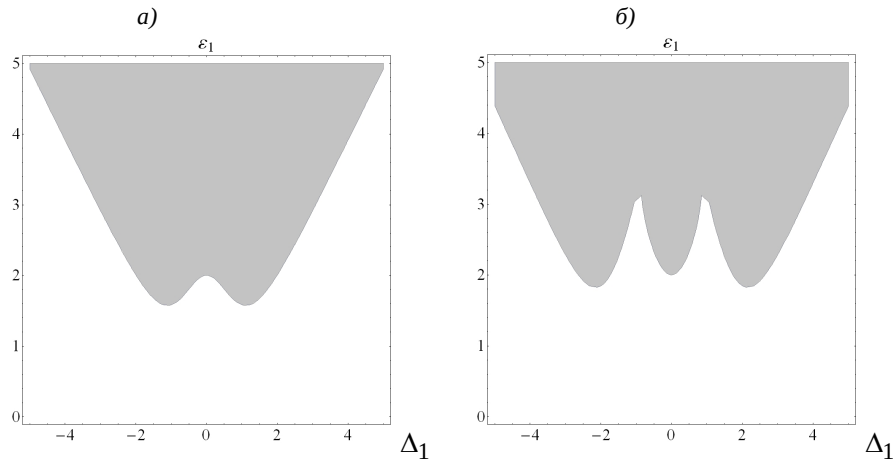


Рис. 3. Области неустойчивости: а) при $v_1 = 1$, б) при $v_1 = 2$

Отметим, что нижняя граница области неустойчивости достигается при определенном значении ε_1 , которое прямо пропорционально квадрату напряжения U_0^2 и обратно пропорционально коэффициенту демпфирования γ . Наименьшее значение ε_1 , при котором достигается область неустойчивости, равно единице. От величины этого же параметра ε_1 зависит амплитуда вынужденных колебаний. Обычно при линейных колебаниях амплитуда A не превышает одной-двух десятых зазора. Для поддержания такой амплитуды при $u = 1$ необходимо, как это следует из (19), чтобы $\varepsilon_1 = 0.0247 \div 0.0473$. Следовательно, при сделанных предположениях и рассмотренном способе задания разности потенциалов на управляющих электродах стационарный режим колебаний резонатора асимптотически устойчив.

Заключение

Показано, что при использовании позиционного возбуждения, появляется сопутствующее ему параметрическое возбуждение колебаний. Получены условия устойчивости стационарного режима колебаний и формула для определения угловой скорости основания ВТГ при комбинированном возбуждении колебаний. Показано, что закон формирования напряжения электродов, предложен-

ный в [4], можно применять не только при малых амплитудах управляющих сигналов, но и при больших. Возникающее при этом параметрическое возбуждение не вызывает неустойчивые колебания и не меняет формулу для определения угловой скорости основания ВТГ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-08-01255).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пешехонов, В.Г.** Гироскопы начала XXI века //Гироскопия и навигация.- 2003.- № 4.- С.5–18.
2. **Журавлев, В.Ф.** Волновой твердотельный гироскоп / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. - М.: Наука, 1985. –125 с.
3. **Журавлев, В.Ф.** Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ.- 1993.- №3.- С.15–26.
4. **Мартыненко, Ю.Г.** Динамика кольцевого микромеханического гироскопа в режиме вынужденных колебаний / Ю.Г. Мартыненко, И.В. Меркурьев, В.В. Подалков // Гироскопия и навигация.- 2009.- №3.- С. 10–23.
5. **Меркурьев, И.В.** Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов / И.В. Меркурьев, В.В. Подалков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 228 с.
6. **Журавлев, В.Ф.** Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа / В.Ф. Журавлев, Д.Д. Линч // Изв. РАН. МТТ.-1995.- №5.- С. 12–24.

Abstract. We consider a cylindrical cavity wave solid-state gyroscope (Fig. 1) with the combined excitation resulting from the simultaneous action of parametric and positional excitation. The gyro electromechanical model is proposed V.F. Zhuravlev [6] and presented in the form of equations (2). Oscillation wave pattern is investigated using Krylov-Bogolyubov asymptotic averaging method. Stability of steady-state oscillation mode is studied, and the formula for foundation angular velocity is derived.

Key words: Wave solid gyro, combined excitation of oscillations, stability conditions

Материал поступил 11.04.14