

А. М. ЛЕСТЕВ

О КОМБИНАЦИОННЫХ РЕЗОНАНСАХ В ДИНАМИКЕ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ

Приведены результаты исследований динамики чувствительных элементов (ЧЭ) микромеханических гироскопов (ММГ) при поступательных и угловых колебаниях основания. На основе нелинейных дифференциальных уравнений движения ЧЭ ММГ установлена возможность развития комбинационных резонансов. Дано объяснение экспериментально обнаруженным явлениям возбуждения интенсивных колебаний ЧЭ ММГ в окрестностях частот комбинационных резонансов.

Введение

При вибрационных испытаниях микромеханических гироскопов обнаруживается возбуждение интенсивных колебаний чувствительных элементов (ЧЭ) ММГ в области частот вибрационного воздействия, не содержащихся в спектре собственных частот ЧЭ на упругом подвесе, а близких к частотам, кратным собственным частотам и частотам комбинационных резонансов. В частности, в публикациях [1, 2] отмечалось, что при частоте гармонического вибрационного воздействия, равной разности частот первичных и вторичных колебаний RR-ММГ наблюдалось резонансное увеличение амплитуды вторичных колебаний ЧЭ. Аналогичные результаты получены в ОАО «Гирооптика» при вибрационных испытаниях LL-ММГ. Отмеченные явления не могут получить объяснения в рамках линейной теории колебаний. В данной статье приведены результаты исследований динамики ЧЭ ММГ на основе нелинейных дифференциальных уравнений движения, рассмотрены характерные комбинационные резонансы в динамике ЧЭ ММГ, дано объяснение экспериментально обнаруженным явлениям, установлена возможность развития комбинационных резонансов.

Отметим, что нелинейные резонансные явления в динамике микромеханических систем рассматривались в публикациях [3–6]. Комбинационные резонансы и пространственная неустойчивость движения твердых тел на упругих подвесах исследовались в работах В. О. Кононенко, Р.Ф. Ганиева, систематическое изложение результатов которых дано в монографии [7].

Уравнения движения

Рассматриваемая в статье конструкция ММГ относится к гироскопам RR- типа [8–10] дполагается, что корпус ММГ установлен на основании, совершающем поступательные и угловые колебания. Движения основания задаются проекциями V_{ox}, V_{oy}, V_{oz} ($V_{ox} = -V_x^0 \sin \lambda_x t, (x, y, z)$) скорости начала координат

Лестев Александр Михайлович. Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ОАО «Гирооптика» (С.-Петербург). Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

нат $оху$ связанной с основанием, и проекциями $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ ($\Omega_x = -\Omega_x^0 \sin v_x t, (x, y, z)$) угловой скорости основания на эти оси. С ротором ММГ связывается система координат $ох_1у_1z_1$, ось x_1 которой направлена вдоль оси чувствительности прибора, ось z_1 – вдоль оси, перпендикулярной плоскости ротора. Положение ротора ММГ относительно корпуса прибора определяется координатами x, y, z центра масс ротора и α, β и γ ; α – угол поворота ротора вокруг оси x , β – угол поворота ротора относительно оси y_1 вторичных колебаний, γ – угол поворота ротора относительно оси z_1 первичных колебаний ($\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$). Имея целью выявить влияние факторов, обусловленных нелинейными слагаемыми в дифференциальных уравнениях движения ЧЭ, примем, что центр масс ротора совпадает с центром жесткости упругого подвеса ЧЭ. Обозначив через m массу ЧЭ ММГ и через J_{x1}, J_{y1}, J_{z1} моменты инерции ротора, дифференциальные уравнения движения ЧЭ запишем в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + n_\alpha^2 \alpha &= -\dot{\Omega}_x(t) - 2h_\alpha \dot{\alpha} + Q_\alpha, \quad \ddot{\beta} + n_\beta^2 \beta = -\dot{\Omega}_y(t) - 2h_\beta \dot{\beta} + Q_\beta, \\ \ddot{x} + n_x^2 x &= -\dot{V}_{ox}(t) - 2h_x \dot{x} + Q_x, \quad \ddot{y} + n_y^2 y = -\dot{V}_{oy}(t) - 2h_y \dot{y} + Q_y, \\ \ddot{z} + n_z^2 z &= -\dot{V}_{oz}(t) - 2h_z \dot{z} + Q_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где,

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{1}{J_{x1}} \frac{d}{dt} \left\{ -J_{x1} \left[(\dot{\beta} + \Omega_y) \gamma - \beta \Omega_z \right] + J_{y1} \left[(\dot{\beta} + \Omega_y) \gamma - J_{z1} (\dot{\gamma} + \Omega_z) \gamma - m \left[(\dot{z} + V_{0z}) y - (\dot{y} + V_{0y}) z \right] \right\} + \right. \\ &+ \frac{1}{J_{x1}} \left[J_{y1} \left[(\dot{\beta} + \Omega_y) \Omega_z - J_{z1} (\dot{\gamma} + \Omega_z) \Omega_y \right], \right. \\ Q_\beta &= \frac{1}{J_{y1}} \frac{d}{dt} \left\{ -J_{y1} \left[(\dot{\alpha} + \Omega_x) \gamma - \alpha \Omega_z \right] + J_{x1} \left[(\dot{\alpha} + \Omega_x) \gamma - m \left[(\dot{x} + V_{0x}) z - (\dot{z} + V_{0z}) x \right] \right\} + \right. \\ &+ \frac{1}{J_{y1}} \left[-J_{x1} \left[(\dot{\alpha} + \Omega_x) \Omega_z + J_{z1} (\dot{\alpha} + \Omega_x) (\dot{\gamma} + \Omega_z) \right], \right. \\ Q_x &= \frac{d}{dt} \left[(\dot{\beta} + \Omega_y) z - (\dot{\gamma} + \Omega_z) y \right] + \left[(\dot{y} + V_{0y}) (\dot{\gamma} + \Omega_z) - (\dot{z} + V_{0z}) (\dot{\beta} + \Omega_y) \right], \\ Q_y &= \frac{d}{dt} \left[(\dot{\gamma} + \Omega_z) x - (\dot{\alpha} + \Omega_x) z \right] + \left[(\dot{z} + V_{0z}) (\dot{\alpha} + \Omega_x) - (\dot{x} + V_{0x}) (\dot{\gamma} + \Omega_z) \right], \\ Q_z &= \frac{d}{dt} \left[(\dot{\gamma} + \Omega_z) y - (\dot{\beta} + \Omega_y) z \right] + \left[(\dot{x} + V_{0x}) (\dot{\beta} + \Omega_y) - (\dot{y} + V_{0y}) (\dot{\alpha} + \Omega_x) \right], \\ n_\alpha^2 &= c_\alpha / J_{x1}, n_\beta^2 = c_\beta / J_{y1}, \dots, \\ n_z^2 &= c_z / m, 2h_\alpha = \mu_\alpha / J_{x1}, 2h_\beta = \mu_\beta / J_{y1}, \dots, 2h_z = \mu_z / m \end{aligned}$$

В уравнениях (1) $c_\alpha, c_\beta, \dots, c_z, \mu_\alpha, \mu_\beta, \dots, \mu_z$ – коэффициенты жесткости упругого подвеса ЧЭ и коэффициенты демпфирования.

Параметры реальных конструкций ЧЭ ММГ удовлетворяют неравенствам $n_\alpha > \omega, 1 - \frac{\omega}{n_\alpha} \ll 1, n_\alpha \approx n_\beta$ и $n_x, n_y, n_z > n_\alpha, n_\beta$. Учитывая указанные соотношения между параметрами ЧЭ ММГ, рассмотрим характерные комбинационные

резонансы в условиях поступательных, угловых, а также поступательных и угловых колебаний основания.

Поступательные колебания основания

Анализ уравнений (1) показывает, что при поступательных колебаниях основания вдоль оси $z(V_z(t) = -V_z^0 \sin \lambda_z t)$ условия комбинационных резонансов осуществляются при выполнении соотношений: $n_x - n_\alpha \approx \lambda_z$, $n_y - n_\alpha \approx \lambda_z$, $n_x - n_\beta \approx \lambda_z$, $n_y - n_\beta \approx \lambda_z$. Вводя расстройки частот в соответствии с равенствами $n_\alpha = n_1 + \varepsilon_\alpha$, $n_\beta = n_1 + \varepsilon_\beta$, $n_x = n_2 + \varepsilon_x$, $n_y = n_2 + \varepsilon_y$, резонансное соотношение частот представим в виде $n_2 - n_1 = \lambda_z$. Решение уравнений (1) найдем, используя метод медленно меняющихся коэффициентов [11] в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_\alpha \cos n_1 t + b_\alpha \sin n_1 t, \quad \beta = a_\beta \cos n_1 t + b_\beta \sin n_1 t, \\ x &= a_x \cos n_2 t + b_x \sin n_2 t, \quad y = a_y \cos n_2 t + b_y \sin n_2 t, \\ z &= a_z \cos n_2 t + b_z \sin n_2 t + q_z \cos \lambda_z t, \quad (q_z = V_z^0 \lambda_z (n_2^2 - \lambda_z^2)^{-1}), \end{aligned} \quad (2)$$

где переменные $a_\alpha(t), b_\alpha(t), \dots, b_z(t)$ удовлетворяют системе уравнений, правые части которых получены усреднением по времени:

$$\begin{aligned} \dot{a}_\alpha &= -h_\alpha a_\alpha + \varepsilon_\alpha b_\alpha + A_\alpha b_y, & \dot{a}_\beta &= -h_\beta a_\beta + \varepsilon_\beta b_\beta + A_\beta b_x, \\ \dot{b}_\alpha &= -\varepsilon_\alpha a_\alpha - h_\alpha b_\alpha - A_\alpha a_y, & \dot{b}_\beta &= -\varepsilon_\beta a_\beta - h_\beta b_\beta - A_\beta a_x, \\ \dot{a}_y &= -h_y a_y + \varepsilon_y b_y + A_y b_\alpha, & \dot{a}_x &= -h_x a_x + \varepsilon_x b_x + A_x b_\beta, \\ \dot{b}_y &= -\varepsilon_y a_y - h_y b_y - A_y a_\alpha, & \dot{b}_x &= -\varepsilon_x a_x - h_x b_x - A_x a_\beta, \\ \dot{a}_z &= -h_z a_z, & \dot{b}_z &= -h_z b_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{1}{4} \frac{m}{J_{x1}} V_z^0 \frac{n_z^2 + \lambda_z n_2}{n_z^2 - \lambda_z^2}, \quad A_\beta = -\frac{1}{4} \frac{m}{J_{y1}} V_z^0 \frac{n_z^2 + \lambda_z n_2}{n_z^2 - \lambda_z^2}, \\ A_y &= \frac{1}{4} \frac{n_1}{n_2} V_z^0 \left(1 + \frac{(2\lambda_z + n_1)\lambda_z}{n_z^2 - \lambda_z^2}\right), \quad A_x = -A_y. \end{aligned}$$

Условия устойчивости нулевого решения системы (3), соответствующего колебаниям ЧЭ ММГ вдоль оси z ($z = q_z \sin \lambda_z t$), записываются с использованием критерия Гурвица. Числовые расчеты при значениях параметров ММГ, близких к приведенным в публикациях [1, 2, 9], свидетельствуют о возможности нарушения условий устойчивости Гурвица. В этом случае стационарное движение ЧЭ ММГ ($z = q_z \sin \lambda_z t$), неустойчиво и возбуждаются колебания координат α, β, x и y (комбинационный резонанс). Отмеченное явление получило название пространственной неустойчивости колебаний твердого тела на упругом подвесе [7]. Неустойчивость выражается в резкой перестройке режима вынужденных колебаний вдоль оси z и возбуждении интенсивных колебаний координат α, β, x и y . Физическая причина пространственной неустойчивости

состоит в нелинейных слагаемых в дифференциальных уравнениях (1). Возбуждение комбинационного резонанса приводит к нарушению нормального режима функционирования прибора.

Аналогичные результаты получены при исследовании комбинационного резонанса типа $n_2 + n_1 = \lambda_z$.

Угловые колебания основания

При угловых колебаниях основания вокруг осей x и y

$$\Omega_x(t) = -\Omega_x^0 \sin vt, \quad \Omega_y(t) = -\Omega_y^0 \sin vt$$

резонансные соотношения имеют вид $n_\alpha - \omega \approx v$, $n_\beta - \omega \approx v$. (Частота колебаний основания близка к разности частот первичных и вторичных колебаний ЧЭ ММГ). Полагая $n_\alpha - n = \varepsilon_\alpha$, $n_\beta - n = \varepsilon_\beta$, рассматриваемое резонансное соотношение представим в виде $n - \omega = v$. Как и в предыдущем случае, решение уравнений (1) найдем, используя метод медленно меняющихся коэффициентов в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_\alpha \cos nt + b_\alpha \sin nt + q_\alpha \cos vt, & q_\alpha &= v\Omega_x^0(n^2 - v^2)^{-1}, \\ \beta &= a_\beta \cos nt + b_\beta \sin nt + q_\beta \cos vt, & q_\beta &= v\Omega_y^0(n^2 - v^2)^{-1}, \\ x &= a_x \cos n_x t + b_x \sin n_x t, & (x, y, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь переменные $a_\alpha(t), b_\alpha(t), a_\beta(t), \dots, b_z(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_\alpha &= -h_\alpha a_\alpha + \varepsilon_\alpha b_\alpha + A'_\alpha, & \dot{a}_\beta &= -h_\beta a_\beta + \varepsilon_\beta b_\beta + A'_\beta, \\ \dot{b}_\alpha &= -\varepsilon_\alpha a_\alpha - h_\alpha b_\alpha, & \dot{b}_\beta &= -\varepsilon_\beta a_\beta - h_\beta b_\beta \\ \dot{a}_x &= -h_x a_x, & \dot{b}_x &= -h_x b_x, & (x, y, z), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A'_\alpha &= -\frac{\gamma_0 \Omega_y^0}{4nJ_{x1}} \left\{ \omega J_{x1} \left[1 + \frac{v}{n+v} \left(1 + \frac{v}{\omega} \right) + (J_{x1} - J_{y1}) \frac{(\omega^2 + v^2)v}{(n+v)\omega} \right] \right\}, \\ A'_\beta &= -\frac{\gamma_0 \Omega_x^0}{4nJ_{y1}} \left(1 + \frac{v^2}{\omega(n+v)} \right) \left[\omega(J_{z1} + J_{y1} - J_{x1}) + v(J_{y1} - J_{x1}) \right]. \end{aligned}$$

Решение уравнений (5) $a_\alpha^* = A'_\alpha(h_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha^2)^{-1}$, $a_\beta^* = A'_\beta(h_\beta^2 + \varepsilon_\beta^2)^{-1}$ соответствует устойчивым бигармоническим колебаниям ЧЭ ММГ относительно осей x_1 и y_1 с частотами, близкими к частоте ω первичных колебаний ЧЭ и частоте v колебаний основания. Амплитуды колебаний ЧЭ с частотой v пренебрежимо малы (сотые доли угловой секунды), а амплитуды колебаний ЧЭ с частотой ω относительно оси вторичных колебаний в условиях рассматриваемого комбинационного резонанса могут соответствовать значению измеряемой угловой скорости порядка диапазона измерений, что делает прибор неработоспособным. Резонансные колебания ЧЭ ММГ вокруг оси y_1 вторичных колебаний с частотой, близкой к частоте первичных колебаний, могут быть возбуждены угловыми колебаниями основания относительно оси x при выполнении соотношения

$n_\beta - \omega \approx \nu$. Развитие комбинационного резонанса в этом случае может служить объяснением обнаруженного при экспериментальных исследованиях RR-ММГ на вибростендах резонансного усиления колебаний ЧЭ при частоте вибрационного воздействия, равной разности частот первичных и вторичных колебаний [1, 2].

Поступательные и угловые колебания основания

Если колебания основания вдоль оси сопровождаются угловыми колебаниями относительно осей x и y ($\Omega_x(t) = -\Omega_x^0 \sin \nu t$, $\Omega_y(t) = -\Omega_y^0 \sin \nu t$), условия комбинационных резонансов осуществляются при выполнении соотношений:

$$n_x - n_\alpha = \lambda_z, \quad n_y - n_\alpha = \lambda_z, \quad n_x - n_\beta = \lambda_z, \quad n_y - n_\beta = \lambda_z, \quad n_\alpha - \omega \approx \nu, \quad n_\beta - \omega \approx \nu.$$

Введение расстроек частот $n_\alpha = n_1 + \varepsilon_\alpha$, $n_\beta = n_1 + \varepsilon_\beta$, $n_x = n_1 + \varepsilon_x$, $n_y = n_1 + \varepsilon_y$ позволяет представить резонансные соотношения в виде $n_1 - \omega = \nu$, $n_2 - n_1 = \lambda_z$. Решение уравнений (1) аналогично предыдущим случаям находится в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_\alpha \cos n_1 t + b_\alpha \sin n_1 t + q_\alpha \cos \nu t, \\ \beta &= a_\beta \cos n_1 t + b_\beta \sin n_1 t + q_\beta \cos \nu t, \\ x &= a_x \cos n_x t + b_x \sin n_x t, \quad y = a_y \cos n_y t + b_y \sin n_y t, \\ z &= a_z \cos n_z t + b_z \sin n_z t + q_z \cos \lambda_z t, \end{aligned} \quad (6)$$

где q_α, q_β и q_z определяются выражениями (2) и (4), а переменные $a_\alpha(t), b_\alpha(t), \dots, b_z(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_\alpha &= -h_\alpha a_\alpha + \varepsilon_\alpha b_\alpha + A_\alpha b_y + A'_\alpha, & \dot{a}_\beta &= -h_\beta a_\beta + \varepsilon_\beta b_\beta + A_\beta b_x + A'_\beta, \\ \dot{b}_\alpha &= -\varepsilon_\alpha a_\alpha - h_\alpha b_\alpha - A_\alpha a_y, & \dot{b}_\beta &= -\varepsilon_\beta a_\beta - h_\beta b_\beta - A_\beta a_x, \\ \dot{a}_y &= -h_y a_y + \varepsilon_y b_y + A_y b_\alpha, & \dot{a}_x &= -h_x a_x + \varepsilon_x b_x + A_x b_\beta, \\ \dot{b}_y &= -\varepsilon_y a_y - h_y b_y + A_y b_\alpha, & \dot{b}_x &= -\varepsilon_x a_x - h_x b_x + A_x b_\beta, \\ \dot{a}_z &= -h_z a_z, & \dot{b}_z &= -h_z b_z, \end{aligned} \quad (7)$$

В рассматриваемом случае частное решение уравнений (7), соответствующее колебаниям ЧЭ ММГ в направлении оси z с частотой λ_z и бигармоническим угловым колебаниям ЧЭ вокруг осей x_I и y_I с частотами n_1 и ν , в зависимости от параметров прибора и параметров колебаний основания может быть устойчивым (при выполнении неравенств Гурвица) или неустойчивым (условия устойчивости Гурвица не выполнены). В первом случае амплитуды колебаний ЧЭ ММГ вокруг осей x_I и y_I с частотой n_1 ограничены, но достигают значений, нарушающих нормальный режим функционирования прибора. Во втором случае отказ прибора наступает вследствие развития пространственной неустойчивости колебаний ЧЭ ММГ.

Выводы

Полученные результаты могут найти применение при анализе вибрационных исследований ММГ. Понимание физической сущности нелинейных резонансных явлений, выявление условий возбуждения комбинационных резонансов и пространственной неустойчивости колебаний ЧЭ ММГ при вибрационных воздействиях может способствовать решению актуальной проблемы повышения вибростойкости приборов этого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евстифеев, М.И., Ковалев, А.С., Лычев, Д.И., Унтилов, А.А., Шадрин, Ю.В. Исследование поведения чувствительного элемента микромеханического гироскопа на вибрирующем основании / М.И. Евстифеев, и [др.]// Материалы VII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением». - СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2006. - С.168-174.
2. Исследование динамики микромеханического гироскопа при механических воздействиях /М.И. Евстифеев [и др.]//Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО, 2011. - №4. - С.72-76.
3. Zhang W. Baskaran R. Turner K.L. Effect of cubic nonlinearity on autoparametrically amplified resonant MEMS mass sensor // Sensors and actuators, 2002, №102, p. 139-150.
4. Zhang W. Baskaran R. Turner K.L. Tuning the dynamic behavior of parametric resonance in a micromechanical oscillator // Applied physics letters, 2003, V. 82, №1, p. 130-132.
5. Лестев М.А. Нелинейный параметрический резонанс в динамике микромеханического гироскопа // Изв. вузов. Приборостроение, - 2004 - №2. - С. 36-42.
6. Sudipto K.D., Aluru N.R. Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures // J. Micromech. Syst., 2005, V. 15, №2, p. 355-369.
7. Ганиев, Р.Ф., Кононенко, В.О. Колебания твердых тел. - М.: Наука, 1976. - 432 с.
8. Connelly, I., Gilmore, I., Greiff, P., Konrepenis, A., Weinberg, M. Microclutromechanical instrument and System development at Draper Laboratory/ N.Barbour. - СПб.: 3rd St.Petersburg International conf. on gyroscopic technology and navigation, Part1. SPb, CSRI «Electropribor», 1996. - P. 3-10.
9. Попова И.В., Лестев А.М., Луковатый, Ю.С., Семенов, А.А., Зюзин, С.В., Пятыхев, Е.Н., Шабров, А.А. Микромеханические датчики и системы. Практические результаты и перспективы развития / И.В. Попова, и [др.]// Гироскопия и навигация, 2006, №1(52), с.29-34.
10. Пешехонов, В.Г. Некрасов, Я.А. Пфлюгер, П., Кергерис, Ц., Хаддара, Х., Эльсайед А. Результаты испытаний установочной партии микромеханических гироскопов RR-типа // Гироскопия и навигация. - 2011. - №1(72). - С.37-48.
11. Бутенин, И.В., Неймарк, Ю.И., Фуфаев, Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1987. - 384 с.

Abstract. Results of studies of the dynamics of micromechanical gyroscopes sensing elements in linear and angular vibrations of the base are given. Based on nonlinear differential equations of sensing elements motion the possibility of combination resonances development is determined. Experimentally discovered phenomena of excitation of sensing elements violent vibrations close to the frequencies of combination resonances are explained.

Key words: micromechanical gyroscopes, nonlinear differential equations, combination resonances

Материал поступил 23.05.2014