

Ю. В. БОЛОТИН, В. А. САВИН

О ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА КАЛИБРОВКИ БИНС МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В СРАВНЕНИИ С ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ КРАМЕРА–РАО

Рассматривается калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) на простом поворотном стенде (ПС) с использованием показаний только ее датчиков. В этих условиях БИНС является автономной. Известен алгоритм такой калибровки на основе обобщенного фильтра Калмана, предложенный Н.А. Парусниковым, – весьма гибкий и при определенных допущениях близкий к оптимальному. Некоторые трудности его применения связаны с линеаризацией задачи, требующей знания начального приближения оцениваемых параметров. В качестве альтернативы предлагается алгоритм, основанный на преобразовании Фурье и последующем переходе к анализу спектров данных, после чего задача калибровки становится чисто алгебраической – без проблем, связанных со сходимостью. Обсуждается точность алгоритма и степень его неоптимальности в сравнении с теоретической границей Крамера–Рао.

Ключевые слова: бесплатформенная инерциальная навигационная система, калибровка, метод преобразования Фурье, граница Крамера–Рао.

Введение

Задача калибровки инерциального измерительного блока (ИБ) БИНС проще всего решается на двух- или трехосных стендах, позволяющих определять ориентацию блока с высокой точностью [1, 2]. Алгоритмы калибровки для таких стендов, как правило, состоят из нескольких последовательных операций – в статике и во вращении. Другой вариант – калибровка на так называемых грубых стендах с одной степенью свободы, где внешняя информация об осуществляемом движении отсутствует [3, 4]. Здесь применяются динамические уравнения, а основной аппарат оценивания – обобщенный фильтр Калмана (ОФК) [3]. Алгоритм ОФК имеет массу преимуществ и, пожалуй, единственный недостаток – необходимость знания начального приближения оцениваемых параметров.

Известна также серия алгоритмов для калибровки низкоточных ИБ без специального оборудования [5–7]. Они, как правило, не обеспечивают высокого качества калибровки масштабных коэффициентов для датчиков угловой скорости (ДУС), так как угловые скорости, которые можно задать, малы [7]. Кроме того, эти методы, как и алгоритм ОФК, обычно требуют априорной информации.

Болотин Юрий Владимирович. Доктор физико-математических наук, профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва).

Савин Владимир Александрович. Инженер-конструктор, ПАО АК «Рубин» (Москва).

В статье обсуждается подход к калибровке, описанный в [8] и основанный на использовании ПС с одной неподвижной осью вращения. Ни направление оси в пространстве, ни угловая скорость ее вращения заранее не известны. Не требуется, чтобы вращение ПС было равномерным (допускаются биения величины угловой скорости), но желательно, чтобы он не совершал конических движений. ИБ устанавливается на вал в несколько (не менее трех) положений с разной, достаточно произвольной, ориентацией осей чувствительности ИБ, затем вал приводится в движение и делает несколько десятков оборотов. Во всех последующих экспериментах в качестве ПС используется бытовой шуруповерт.

Предлагаемый алгоритм обработки данных основан на преобразовании Фурье (ПФ), которое позволяет быстро и эффективно сжать большой объем информации, преобразовав ее в спектральную область, после чего в частотной области задача калибровки распадается на две статические задачи небольшой размерности – калибровку акселерометров и ДУС. Калибровка блока акселерометров сводится к модификации известной задачи аппроксимации данных в трехмерном пространстве эллипсоидом [7], причем соответствующий алгоритм не требует начального приближения и его сходимости гарантирована. Одновременно строится приборная система координат (СК), и вычисляется величина и направление вектора угловой скорости вращения ПС в приборных осях. После этого задача калибровки ДУС становится также чисто алгебраической.

В статье в предположении о гауссовом характере шумов в БИНС оценивается точность алгоритма на основе ПФ сопоставлением дисперсий оценок искомых параметров калибровки, полученных с его использованием, с нижней границей для них, определяемой неравенством Крамера–Рао. Если система линейна или близка к таковой, то, как хорошо известно, эта граница может быть найдена с использованием метода максимума правдоподобия или, что эквивалентно при сделанных предположениях, фильтра Калмана. Вместо этого в рассматриваемой нелинейной задаче используется ОФК, что, по мнению авторов, не должно сильно влиять на оценку точности. В соответствии с указанным подходом точность алгоритма сопоставляется с теоретически достижимой при разных объемах априорной информации. Затем предлагаемый алгоритм сравнивается с алгоритмом Н. А. Парусникова на основе ОФК, где параметры калибровки и движения включаются в общий вектор состояния.

Оба подхода рассматриваются только для тех условий, когда они применимы. Предполагается, что в процессе экспериментов угловая скорость вращения ПС близка к постоянной и описывается линейным стохастическим уравнением.

Структура статьи следующая. Сначала вводятся калибровочные соотношения, описывается методика калибровки и предлагаемый метод вычислений. Далее приводится пример эксперимента и результаты калибровки микромеханического ИБ. Наконец, обсуждается методика оценки точности предлагаемого алгоритма и проводится сравнение его точности с теоретически достижимой, а также с точностью алгоритма, основанного на ОФК.

Модели калибровки

Пусть при калибровке ИБ устанавливается на вал ПС с одной степенью свободы в нескольких положениях с номерами $p = 1, \dots, P$ и вал приводится во вращение в тече-

ние времени $0 < t < T_p$. Положения ИБ могут быть почти произвольными, требований к ориентации посадочной плоскости не предъявляется. Введем следующие СК, где точка O лежит на оси вала:

1) $Os_1s_2s_3$ – СК, связанная с ПС и неподвижная относительно Земли; орт s_1 направлен по оси вращения вала, составляющей с горизонтом угол $0 \leq \alpha < \pi/2$; орт s_3 лежит в вертикальной плоскости, орт s_2 – в горизонтальной;

2) $Oe_1e_2e_3$ – СК, связанная с валом; орт e_1 направлен по оси вращения вала; направление осей $e_2 = e_{2p}$, $e_3 = e_{3p}$, $p = 1, \dots, P$ относительно вала различно в разных экспериментах;

3) $Mz_1z_2z_3$ – приборная СК, где M – чувствительная масса (ЧМ) акселерометра, всегда неподвижная относительно вала, но по-разному ориентированная в различных экспериментах. Отклонение ЧМ от оси вала допустимо: оно приводит к добавлению членов, описывающих центробежные силы, которые учитываются алгоритмом.

Ниже, если не оговорено противоположное, все векторы заданы проекциями на оси приборной СК. Необработанные измерения акселерометров $\mathbf{a}(t)$ и ДУС $\mathbf{w}(t)$ связаны с удельной силой $\mathbf{f}(t)$, действующей на ЧМ, и абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$ ИБ калибровочными соотношениями (два равенства слева) и эквивалентными им обратными соотношениями (два справа) [2, 4, 7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= S_f \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}_f + \delta \mathbf{f}(t), & \mathbf{a}(t) &= S_a \mathbf{f}(t) + \mathbf{b}_a + \delta \mathbf{a}(t), \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= S_\omega \mathbf{w}(t) + \mathbf{b}_\omega + \delta \boldsymbol{\omega}(t); & \mathbf{w}(t) &= S_w \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{b}_w + \delta \mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь S_f , S_ω – матрицы масштабов и перекосов; $\mathbf{b}_f$, $\mathbf{b}_\omega$ – векторы смещений; $\delta \mathbf{f}$, $\delta \boldsymbol{\omega}$ – немоделируемые погрешности измерений (случайные шумы, температурные зависимости, чувствительность гироскопов к линейному ускорению и т.п.). Параметры в обратных калибровочных соотношениях определены формулами

$$\begin{aligned} S_a &= S_f^{-1}, \quad \mathbf{b}_a = -S_a \mathbf{b}_f, \quad \delta \mathbf{a} = -S_a \delta \mathbf{f}, \quad S_w = S_\omega^{-1}, \\ \mathbf{b}_w &= -S_w \mathbf{b}_\omega, \quad \delta \mathbf{w} = -S_w \delta \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Цель калибровки – найти постоянные 3×3 -матрицы S_f , S_ω и 3×1 -векторы $\mathbf{b}_f$, $\mathbf{b}_\omega$ или, что эквивалентно, вычислить S_a , S_w и $\mathbf{b}_a$, $\mathbf{b}_w$.

В каждом из экспериментов-вращений с номером $p = 1, \dots, P$ вал ПС, а вместе с ним орт e_{2p} , вращается вокруг оси Oe_{1p} и составляет с направленным по горизонтали ортом s_2 угол $\theta_p(t)$, меняющийся по закону

$$\theta_p(t) = v_p t + \gamma_p + \delta \theta_p(t), \quad 0 < t < T_p.$$

Здесь T_p – длительность вращения; v_p – угловая скорость вращения вала; γ_p – фазовый сдвиг; $\delta \theta_p(t)$ – возмущение, вызванное несовершенством привода.

Для краткости в данной статье при теоретическом анализе член $\delta \theta_p(t)$ не учитывается (необходимые поправки можно ввести, анализируя спектры угловой скорости и удельной силы).

Ниже для удобства вычислений будем считать, что $\gamma_p = 0$. Это достигается при помощи поворота ортов $\mathbf{e}_{2p}, \mathbf{e}_{3p}$ вокруг оси вращения $\mathbf{e}_{1p}$ таким образом, чтобы в момент $t = 0$ ось $\mathbf{e}_{2p}$ была горизонтальна. Удельная сила, действующая на ЧМ, и угловая скорость ИБ определяются формулами

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{g}_p(t) + \boldsymbol{\omega}_p^\times \boldsymbol{\omega}_p^\times \mathbf{p}_p, \quad \boldsymbol{\omega}_p(t) = \mathbf{u}_p(t) + v_p \mathbf{e}_{1p}.$$

Здесь и ниже $\boldsymbol{\omega}_p^\times$ – кососимметрическая матрица, реализующая векторное произведение; $\mathbf{g}_p(t), \mathbf{u}_p(t)$ – векторы ускорения силы тяжести и угловой скорости вращения Земли в приборной СК; $\mathbf{p}_p$ – постоянный вектор смещения ЧМ от оси вала.

Разложив $\mathbf{f}_p(t)$ по ортам $\mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p}, \mathbf{e}_{3p}$ СК вала и обозначив проекции удельной силы тяжести на оси $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3$ как g_1, g_3 , а проекции угловой скорости вращения Земли на оси $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ – как u_1, u_2, u_3 , при $p = 1, \dots, P$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p(t) &= g_1 \mathbf{e}_{1p} + g_2 [\mathbf{e}_{2p} \sin(\omega_p t) + \mathbf{e}_{3p} \cos(\omega_p t)] - \omega_p^2 [\mathbf{e}_{2p} \rho_{2p} + \mathbf{e}_{3p} \rho_{2p}], \\ \boldsymbol{\omega}_p(t) &= [u_1 + v_p] \mathbf{e}_{1p} + [u_2 \cos(\omega_p t) + u_3 \sin(\omega_p t)] \mathbf{e}_{2p} + \\ &\quad + [-u_2 \sin(\omega_p t) + u_3 \cos(\omega_p t)] \mathbf{e}_{3p}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что в эксперименте, помимо вращений, существуют Q участков неподвижности $q = 1, \dots, Q$. Если выбрать положение оси $\mathbf{e}_{2q}$ горизонтальным, выражения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_q(t) &= g_1 \mathbf{e}_{1q} + g_2 \mathbf{e}_{3q}, \\ \boldsymbol{\omega}_q(t) &= u_1 \mathbf{e}_{1q} + u_2 \mathbf{e}_{2q} + u_3 \mathbf{e}_{3q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Калибровка акселерометров методом преобразования Фурье

При теоретическом анализе задачи будем полагать, что все функции реализованы на бесконечном интервале непрерывного времени. Если функция абсолютно интегрируема, то для нее определено ПФ [9]

$$\mathbf{f}_p(t) \rightarrow \mathbf{F}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \mathbf{f}_p(t) dt,$$

в противном случае ПФ для нее – это обобщенная функция [9], в частности ПФ для константы – дельта-функция $\delta(\omega)$. Выполним ПФ применительно к (1), обозначая результат заглавными буквами – $\mathbf{a}_p(t) \rightarrow 2\pi \mathbf{A}_p(\omega)$ и т.д.:

$$\mathbf{F}_p(\omega) = S_f \mathbf{A}_p(\omega) + \mathbf{b}_f \delta(\omega) + \delta \mathbf{F}_p(\omega), \quad p = 1, \dots, P. \quad (4)$$

Осуществив аналогично ПФ для (2) с учетом известных выражений для тригонометрических функций [9], получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p(\omega) &= [g_1 \mathbf{e}_{1p} - v_p^2 (\mathbf{e}_{2p} \rho_{2p} + \mathbf{e}_{3p} \rho_{2p})] \delta(\omega) + \\ &\quad + \frac{g_2}{2} [i \mathbf{e}_{2p} + \mathbf{e}_{3p}] \delta(\omega - v_p) + \frac{g_2}{2} [-i \mathbf{e}_{2p} + \mathbf{e}_{3p}] \delta(\omega + v_p). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4), (5) видно, что $\mathbf{A}_p(\omega)$ имеют пиковые значения $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{R}_p \pm i\mathbf{I}_p$ при $\omega = 0, \pm\nu_p$ (точнее, пики интегралов ПФ в малой окрестности соответствующих частот):

$$\mathbf{A}_p(\omega) \approx \mathbf{Q}_p \delta(\omega) + \mathbf{R}_p [\delta(\omega - \nu_p) + \delta(\omega + \nu_p)] + i\mathbf{I}_p [\delta(\omega - \nu_p) - \delta(\omega + \nu_p)]. \quad (6)$$

Собрав вместе коэффициенты при дельта-функциях в (4)–(6), получим

$$\begin{aligned} S_f \mathbf{Q}_p + \mathbf{b}_f &= g_1 \mathbf{e}_{1p} + g_2 \mathbf{e}_{3p} - \omega_p^2 (\mathbf{e}_{2p} \rho_{2p} + \mathbf{e}_{3p} \rho_{2p}), \\ S_f \mathbf{R}_p &= g_2 \mathbf{e}_{3p}, \quad S_f \mathbf{I}_p = g_2 \mathbf{e}_{2p}, \quad p = 1, \dots, P. \end{aligned} \quad (7)$$

На участках, где акселерометры неподвижны, аналогично можно записать:

$$S_f \mathbf{Q}_q + \mathbf{b}_f = g_1 \mathbf{e}_{1q} + g_2 \mathbf{e}_{3q}, \quad q = 1, \dots, Q. \quad (8)$$

Из системы (7), (8), взяв скалярные произведения, исключим неизвестные q_1 , $\mathbf{e}_{1p}$, $\mathbf{e}_{1q}$, q_2 , $\mathbf{e}_{3p}$, $\mathbf{e}_{3q}$, $\mathbf{e}_{2p}$ и представим в виде так называемых инвариантных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q^T S_f^T S_f \mathbf{Q}_q + 2\mathbf{Q}_q^T S_f^T \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_f^T \mathbf{b}_f &= g^2, \quad q = 1, \dots, Q; \\ \mathbf{I}_p^T S_f^T S_f \mathbf{R}_p = 0, \quad \mathbf{I}_p^T S_f^T S_f \mathbf{I}_p - \mathbf{R}_p^T S_f^T S_f \mathbf{R}_p &= 0, \quad p = 1, \dots, P. \end{aligned} \quad (9)$$

Положим, что

$$M = S_f^T S_f, \quad m_0 = \mathbf{b}_f^T \mathbf{b}_f, \quad \mathbf{m} = S_f^T \mathbf{b}_f,$$

$$M = S_f^T S_f, \quad m_0 = \mathbf{b}_f^T \mathbf{b}_f, \quad \mathbf{m} = S_f^T \mathbf{b}_f,$$

тогда получим из (9)

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{Q}_q^T \tilde{M} \mathbf{Q}_q + 2\tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{Q}_q, \quad q = 1, \dots, Q; \\ 0 &= \mathbf{I}_p^T \tilde{M} \mathbf{R}_p, \quad 0 = \mathbf{I}_p^T \tilde{M} \mathbf{I}_p - \mathbf{R}_p^T \tilde{M} \mathbf{R}_p = 0, \quad p = 1, \dots, P. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) сводится к модификации задачи аппроксимации данных эллипсоидом [5, 7].

Решив (10) относительно $\tilde{M}, \tilde{\mathbf{m}}$ методом наименьших квадратов (МНК), можно найти:

$$M = \frac{g^2}{1 + \tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{M}^{-1} \tilde{\mathbf{m}}} \tilde{M}, \quad \mathbf{m} = \frac{g^2}{1 + \tilde{\mathbf{m}}^T \tilde{M}^{-1} \tilde{\mathbf{m}}} \tilde{\mathbf{m}}.$$

Далее с помощью разложения Холецкого $M = S_f^T S_f$ вычисляются S_f^T , затем S_p , $\mathbf{b}_f$ и $\mathbf{b}_f = S_f^{-T} \mathbf{m}$ и из формул (7) определяются орты $\mathbf{e}_{1p}$, $\mathbf{e}_{2p}$, $\mathbf{e}_{3p}$.

При $Q = 3$ система линейных уравнений (10) относительно $\tilde{M}, \tilde{\mathbf{m}}$ имеет ложное тривиальное решение $\tilde{M} = 0$, так что для однозначной разрешимости задачи калибровки необходимо $Q \geq 4$.

Заметим, что при записи инвариантных соотношений (9) ради линейности полученной задачи мы не использовали существенную часть уравнений, что несомненно снижает точность калибровки. Решение (7), (8) без перехода к (9) – нелинейная задача, требующая отдельного исследования.

Калибровка ДУС методом преобразования Фурье

При калибровке акселерометров определены направления осей вала $\mathbf{e}_{1p}, \mathbf{e}_{2p}, \mathbf{e}_{3p}$ в приборной СК и установлены частоты ν_p как точки максимума амплитуды спектра показаний акселерометров. Выполнив, как и ранее, ПФ показаний ДУС в (1) и обозначив результат ПФ заглавными буквами $\mathbf{w}_p(t) \rightarrow \mathbf{W}_p(\omega)$, получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_p(\omega) &= S_\omega \mathbf{W}_p(\omega) + \mathbf{b}_\omega \delta(\omega) + \delta \boldsymbol{\Omega}_p(\omega), \quad p = 1, \dots, P; \\ 0 &= S_\omega \mathbf{W}_q(\omega) + \mathbf{b}_\omega \delta(\omega) + \delta \boldsymbol{\Omega}_q(\omega), \quad q = 1, \dots, Q.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь, как и выше, видно, что $\mathbf{W}_p(\omega)$ имеет пики при частотах $\omega = 0, \omega = \pm \nu_p$, которые запишем как $\mathbf{Q}_p, \mathbf{R}_p \pm i\mathbf{I}_p$ соответственно. Из соотношений (11) получаем систему уравнений относительно амплитуд ПФ:

$$\begin{aligned}(u_1 + \nu_p)\mathbf{e}_{1p} &= S_\omega \mathbf{Q}_p + \mathbf{b}_\omega, \quad p = 1, \dots, P; \\ u_2 \mathbf{e}_{2p} + u_3 \mathbf{e}_{3p} &= S_\omega \mathbf{R}_p, \quad u_2 \mathbf{e}_{3p} - u_3 \mathbf{e}_{2p} = S_\omega \mathbf{R}_p.\end{aligned}\quad (12)$$

$$u_1 \mathbf{e}_{1q} + u_2 \mathbf{e}_{2q} + u_3 \mathbf{e}_{3q} = S_\omega \mathbf{Q}_q + \mathbf{b}_\omega, \quad q = 1, \dots, Q. \quad (13)$$

В (13) неизвестны векторы $\mathbf{e}_{1q}, \mathbf{e}_{2q}, \mathbf{e}_{3q}$. Предположим, однако, что каждому неподвижному положению с номером q соответствует некоторое вращение с номером p , при котором блок остается закрепленным на оси ПС таким же образом. Тогда вектор оси ПС в приборной СК известен: $\mathbf{e}_{1q} = \mathbf{e}_{1p}$. Умножив уравнение (13) скалярно на $\mathbf{e}_{1q}$, получим скалярное уравнение

$$u_3 = \mathbf{e}_{3q}^T S_\omega \mathbf{Q}_q + \mathbf{e}_{3q}^T \mathbf{b}_\omega, \quad q = 1, \dots, Q. \quad (14)$$

Тем самым (12), (13) превращаются в линейные уравнения относительно $S_\omega, \mathbf{b}_\omega, u_1, u_2, u_3$, из которых определяются калибровочные параметры ДУС. Для уточнения решения используется ограничение $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2$, где угловая скорость Земли u известна. При калибровке низкоточных ДУС можно положить $u = 0$, и уравнения еще больше упрощаются.

Особенности вычисления преобразования Фурье

В последующих расчетах вращения имеют конечную длительность $T_p, p = 1, \dots, P$, а участки неподвижности – конечную длительность $T_q, q = 1, \dots, Q$. Ввиду этого реально спектр $\mathbf{f}_p(t)$ вычисляется не на бесконечном, а на конечном интервале, обычно с привлечением временного взвешивания $\mathbf{f}_p(t) \rightarrow \mathbf{f}_p(t)h(t), t \in [0, T_p]$. Хорошо из-

вестно, что это приводит к так называемому «растеканию» спектра (англ. – spectral leakage): вместо спектра функции $\mathbf{f}_p(t)$ получается свертка $\mathbf{F}_p(\omega)$ с ПФ $H(\omega)$ весовой функции окна $h(t)$ [9]. Выбор формы окна $h(t)$ зависит от задачи. Если необходимо максимальное разрешение спектра, оптимально использование прямоугольного окна, ПФ которого является функция $\text{sinc}(\omega)$ – быстро осциллирующая, но имеющая наименьшую ширину центрального максимума. Если требуется отсутствие ложных максимумов, используются окна с минимальными осцилляциями $H(\omega)$. В рассматриваемой нами задаче важно учесть еще два обстоятельства. Во-первых, нужно точно определить частоту максимума пика спектра, а также его вещественную и мнимую части. Во-вторых, при применении дискретного ПФ (ДПФ) получаемый спектр дискретен с интервалом дискретизации $\Delta\omega = 2\pi / T_p$, т.е. является выборкой непрерывного спектра. Чтобы вычисление точки максимума дискретного спектра позволяло найти точку максимума непрерывного спектра, функция $H(\omega)$ должна быть предельно гладкой в нуле, пусть даже с потерей разрешения. В данной работе используется окно Ханна, которое в определенной мере удовлетворяет поставленным требованиям. Для повышения частоты дискретизации сигнал дополняется слева и справа нулями. Если таким образом увеличить длительность сигнала в n раз, то интервал дискретизации уменьшится в n раз – до $\Delta\omega = 2\pi / nT_p$. Заметим, что при применении описанной методики пик спектра гармонического сигнала, равный $a\delta(\omega - \nu_p)$, превращается в $aH(\omega - \nu_p) / n$, т.е. все пики умножаются на один и тот же коэффициент. Таким образом, теоретический анализ сигналов в непрерывном времени распространяется и на данные в дискретном времени, вычисленные на конечном интервале.

Результаты экспериментов с микромеханической БИНС

Опишем практическое применение метода ПФ. Эксперимент проводился с коммерчески доступным микромеханическим ИБ x-IMU [10]. Представлены результаты испытаний с частотой записи 256 Гц. Угловая скорость вращения применявшегося шуруповерта была нестабильна, что несомненно снижало точность калибровки. На рис. 1 приведен фрагмент графика показаний акселерометров при вращении.

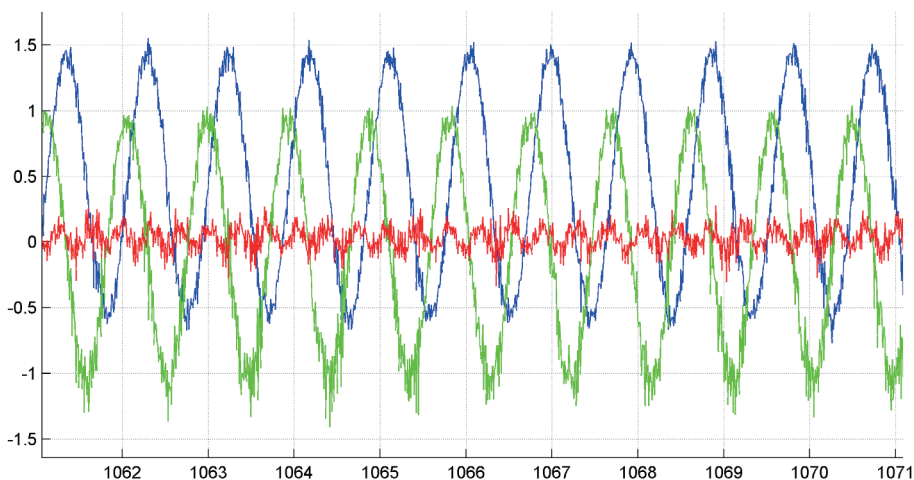


Рис. 1. Необработанные показания акселерометров в долях силы тяжести при вращении (по оси абсцисс отложено время, с). Амплитуда больше единицы вызвана центробежными силами

На рис. 2 представлен график ПФ (промасштабированные данные ДПФ) показаний акселерометров, выделены максимумы ДПФ, по которым найдены частоты вращения. Стоит отметить «сглаживание» максимума, вызванное упомянутым ранее эффектом растекания спектра, определенного по конечной выборке [8]. Чтобы минимизировать этот эффект при вычислении ДПФ, было задействовано временное окно, а чтобы увеличить частотное разрешение – данные дополнены нулями. Из анализа графика следует, что точность определения частоты вращения составляет порядка 0,001 рад/с. На рис. 3 приведен график ДПФ показаний ДУС.

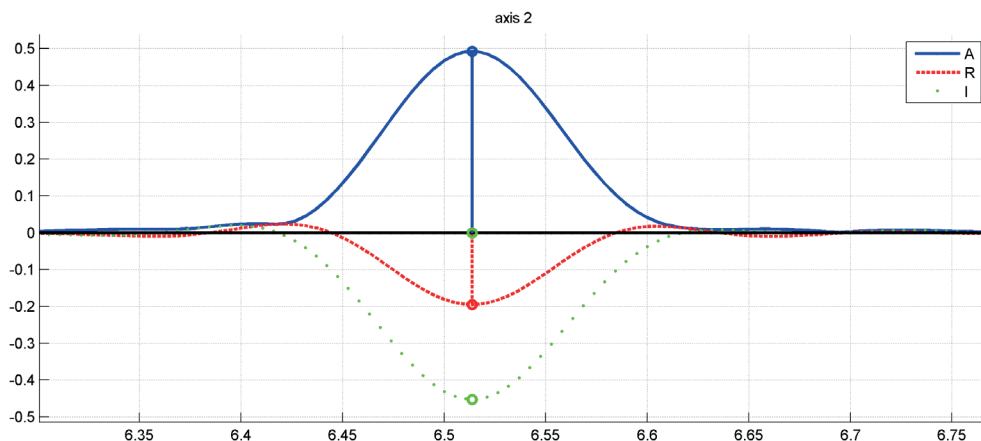


Рис. 2. Фрагмент спектра показаний акселерометров вблизи частоты вращения вала:
A – абсолютная величина; *R* и *I* – вещественная и мнимая части спектра по одному из каналов.
 Приведена оценка частоты вращения (6,52 рад/с)

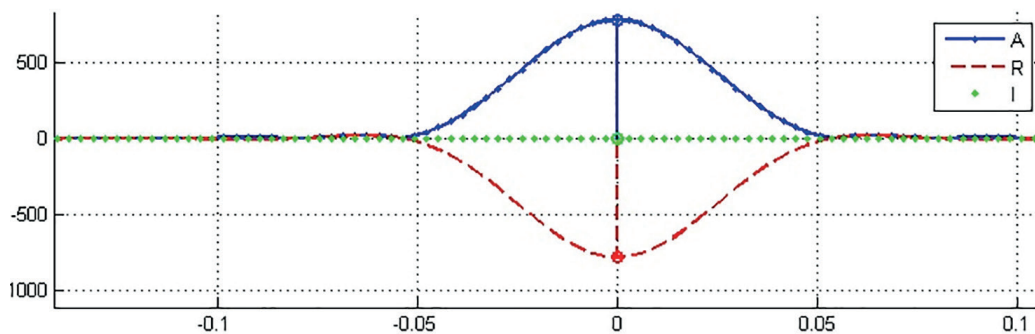


Рис. 3. Фрагмент спектра показаний ДУС при вращении вблизи нулевой частоты:
A – абсолютная величина; *R* и *I* – вещественная и мнимая части спектра по одному из каналов.
 Заметны небольшие волны, вызванные боковыми лепестками ПФ окна Ханна

Ниже приведены полученные калибровочные матрицы акселерометров и ДУС. Их отличие от паспортных данных находится в пределах точностей датчиков, что говорит о приемлемой точности предлагаемой методики. Относительная погрешность определения калибровочных параметров, по косвенным оценкам, составляет порядка 0,1% по масштабным коэффициентам и углам перекоса.

$$S_f = \begin{bmatrix} 1,0028 & -0,0008 & -0,0019 \\ 0 & 1,0024 & -0,0002 \\ 0 & 0 & 1,0033 \end{bmatrix}, S_\omega = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0009 & -0,0017 \\ 0,0005 & 0,9987 & -0,0022 \\ -0,0079 & -0,0011 & 0,9998 \end{bmatrix}.$$

Калибровочная матрица акселерометров треугольная, поскольку, как указано выше, приборная СК строится путем разложения Холецкого симметричной матрицы или, иными словами, путем ортогонализации Грама–Шмидта осей чувствительности акселерометров. Результаты расчета смещений датчиков здесь не приводятся, поскольку они не информативны: для микромеханических датчиков они сильно отличаются от паспортных данных. Проверка качества калибровки в режиме навигации выходит за рамки статьи и заменена здесь теоретическим анализом точности.

Анализ точности алгоритма на основе ПФ путем сравнения с CRB

Результаты единичных экспериментов не могут служить обоснованием точности алгоритма, поэтому далее полученные результаты проверяются путем численного анализа. Прежде чем перейти к обсуждению точности решения задачи калибровки, опишем оценки погрешности неслучайной величины $\theta \in \mathbb{R}^n$, если есть измерение $y \in \mathbb{R}^N$ – случайная величина и известна условная плотность вероятности $p(y|\theta)$ при заданном θ . Требуется оценить $\tilde{\theta} = \mathcal{F}(y)$, критерий точности – среднеквадратическая погрешность оценки:

$$\text{trace } P_{\Delta\theta} \rightarrow \min, \quad P_{\Delta\theta} = E[\Delta\theta\Delta\theta^T], \quad \Delta\theta = \theta - \tilde{\theta}.$$

В общем случае построение оптимального алгоритма получения такой оценки – задача нетривиальная. Если ее не удастся решить, важно ответить на вопрос, насколько созданный алгоритм неоптимален. Введем информационную матрицу Фишера

$$\Phi(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log p(y|\theta)\right)^T \frac{\partial}{\partial\theta} \log p(y|\theta)\right].$$

Теорема Крамера–Рао [11] утверждает, что для любого несмещенного алгоритма оценивания верно матричное неравенство $P_{\Delta\theta} \geq P_{\text{CRB}} = \Phi^{-1}(\theta)$, понимаемое как неравенство квадратичных форм. Величина P_{CRB} для дисперсии погрешности оценки называется нижней границей Крамера–Рао (Cramer–Rao Bound – CRB). Алгоритм оценивания считается эффективным, если $P_{\Delta\theta} = P_{\text{CRB}}$. Часто в качестве приближенного алгоритма оценивания используется метод максимума правдоподобия (ММП): $p(y|\theta) \rightarrow \max_{\theta}$. При достаточно слабых предположениях о $p(y|\theta)$ ММП является асимптотически несмещенным и асимптотически эффективным при $N \rightarrow \infty$ [11].

Рассмотрим частную задачу оценивания θ по измерениям $y = A\theta - \delta y$ в предположении нормальности распределения $p(\delta y) \sim N(0, R)$. Тогда ММП сводится к МНК $\|y - A\theta\|_R \rightarrow \min$ с введенным обозначением $\|x\|_R^2 = x^T R^{-1} x$, который является эффективным, так как дисперсия погрешности оценки $P_{\Delta\theta} = (A^T R^{-1} A)^{-1}$ совпадает с нижней границей Крамера–Рао P_{CRB} .

В линейной задаче динамического оценивания имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k q_k, \quad E[q_k] = 0, \quad E[q_k q_j^T] = Q_k \delta_{kj}, \\ y_k &= H_k x_k + r_k, \quad E[r_k] = 0, \quad E[r_k r_j^T] = R_k \delta_{kj}, \quad k = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

В предположении, что возмущения q_k, r_k – нормально распределенные случайные величины, оптимальный алгоритм оценивания искомых параметров строится на основе фильтра Калмана, посредством которого вычисляются рекуррентно условные математические ожидания $x_{k|k-1}, x_{k|k}$ и условные матрицы дисперсии погрешности их оценки $P_{k|k-1}, P_{k|k}$ для $k = 1, \dots, N$. Хорошо известно [11], что фильтр Калмана для оценки x_N при введенных выше соотношениях эквивалентен МНК: необходимо минимизировать по всем x_k квадратичную форму

$$\|x_0\|_{P_0}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{G_k Q_k G_k^T}^2 + \sum_{k=0}^N \|y_k - H_k x_k\|_{R_k}^2 \rightarrow \min.$$

При этом нижняя граница Крамера–Рао для дисперсии погрешности оценки x_N есть $P_{N|N}$. Важно отметить, что в калмановской фильтрации x_k – случайный процесс, в то время как в МНК x_k – детерминированная неизвестная последовательность.

Круг линейных задач весьма ограничен, поэтому на практике обычно применяется ОФК, получаемый линеаризацией задачи в окрестности расчетной траектории. Если отклонения расчетной траектории от истинной малы, можно предполагать, что оценка CRB, полученная при помощи ОФК, близка к точному значению CRB. Это предположение используется в данной работе.

Перейдем к задаче калибровки БИНС на вращающемся ПС. Введем дополнительно географическую с.к. $On_1n_2n_3$: ось n_1 направлена на восток, ось n_3 – вверх. Чтобы построить CRB, надо по возможности учесть всю информацию, имеющуюся при проведении эксперимента. В задаче калибровки, помимо измерений акселерометров и гироскопов, есть данные о неподвижности стенда в экспериментах $q = 1, \dots, Q$ и о характере его вращения $p = 1, \dots, P$. Данные о вращении ПС формализовать довольно трудно, но примем, что угловая скорость ПС относительно Земли – это сумма $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$, где Ω_0 – константа, Ω_1 – случайный процесс $\dot{\Omega}_1 = -\Lambda \Omega_1 + q_\Omega$ (Λ – постоянная матрица, q_Ω – белый шум).

Для эксперимента с использованием стенда-шуруповерта модель процесса построена с привлечением алгоритмов стохастической идентификации. При вычислениях модель масштабируется для учета разной степени неравномерности вращения ПС.

Сначала рассмотрим режим вращения. Вектором состояния задачи оценивания в нем служит набор $C, \Omega_0, \Omega_1, S_a, b_a, S_w, b_w$, где C – ортогональная матрица перехода от приборной СК к географической. Уравнения идеальной работы для задачи калибровки запишем с использованием обратных калибровочных соотношений из (1):

$$\begin{aligned} \dot{S}_a &= 0, \quad \dot{b}_a = 0, \quad \dot{S}_w = 0, \quad \dot{b}_w = 0, \\ \dot{\Omega}_0 &= 0, \quad \dot{\Omega}_1 = -\Lambda \Omega_1 + q_\Omega, \quad \dot{C} = (\Omega_0 + \Omega_1)^\times C. \end{aligned}$$

При этом расчетные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{S}'_a &= 0, \quad \dot{b}'_a = 0, \quad \dot{S}'_w = 0, \quad \dot{b}'_w = 0, \\ \dot{\Omega}'_0 &= 0, \quad \dot{\Omega}'_1 = -\Lambda \Omega'_1, \quad \dot{C}' = (\Omega'_0 + \Omega'_1)^\times C'. \end{aligned} \tag{15}$$

Для режимов вращения данные акселерометров и гироскопов Y_f , Y_ω и расчетные измерения Y'_f, Y'_ω можно записать как

$$\begin{aligned} Y_f &= \mathbf{a}, \quad Y_\omega = \mathbf{w}, \\ Y'_f &= -S'_a C' \mathbf{g}_n + \mathbf{b}'_a, \quad Y'_\omega = S'_w [C'(\boldsymbol{\Omega}'_1 + \boldsymbol{\Omega}'_2 + \mathbf{u}_n)] + \mathbf{b}'_w. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{g}_n, \mathbf{u}_n$ – известные удельная сила тяжести и угловая скорость Земли в географической СК. В режимах неподвижности переменные Ω_0, Ω_1 в (15), (16) полагаются равными нулю.

Соотношения (15), (16) служат основой для построения ОФК и, соответственно, вычисления нижней границы точности оценки Крамера–Рао. Конкретную реализацию ОФК здесь не приводим, она вполне стандартна и выполняется в дискретном времени, причем удобно использовать информационную форму фильтра Калмана. Ограничимся несколькими замечаниями:

1) при каждой стоянке и каждом вращении параметры $C', \boldsymbol{\Omega}'_0, \boldsymbol{\Omega}'_1$ и их ковариации инициализируются заново, а калибровочные параметры и их ковариационные матрицы берутся из результатов предыдущего эксперимента;

2) азимутальная ориентация плохо наблюдаема, что не противоречит возможности применения ОФК и хорошей оцениваемости калибровочных параметров;

3) в алгоритме калибровки, предложенном Н. А. Парусниковым [4], не задействуется информация о характере вращения, поэтому использовать уравнение вращения в виде $\dot{C}' = (\boldsymbol{\Omega}'_0 + \boldsymbol{\Omega}'_1)^\times C'$ невозможно и вместо него в [4] (в других обозначениях) применяется уравнение Пуассона $\dot{C} = \mathbf{u}_n^\times C - C(S_\omega \mathbf{w} + \mathbf{b}_\omega)$. В исследуемом здесь случае такой вариант требует рассматривать Ω как измерение, что приводит к коррелированности шумов в измерениях и динамики движения и усложняет реализацию ОФК. Правдоподобно и подтверждается расчетами, что используемый в настоящей статье вариант асимптотически стремится к алгоритму Парусникова при увеличении шума $\mathbf{q}_\Omega$ в модели вращения ПС.

Численный анализ точности проводился методом Монте-Карло. Погрешность калибровки акселерометров и ДУС характеризовалась нормой Фробениуса разности истинной и вычисленной калибровочных матриц. Для построения модели вращения взяты данные реального эксперимента; при помощи методов теории идентификации построена авторегрессионная модель, возбуждаемая белым шумом.

Сначала оценивалась зависимость погрешности оценивания от степени неравномерности вращения, т.е. от интенсивности σ_Ω белого шума $\mathbf{q}_\Omega$. Интенсивность белого шума гироскопов взята равной $\sigma_\omega = 10^{-5}$ рад/с/ $\sqrt{\text{Гц}}$, белого шума акселерометров – $\sigma_f = 10^{-5}$ м/с²/ $\sqrt{\text{Гц}}$. Длительность вращений составляла 320 с. В табл. 1, 2 приведены погрешности оценки калибровочной матрицы акселерометров и ДУС в зависимости от степени неравномерности вращения σ_Ω .

Далее определялась зависимость погрешности калибровки от длительности вращения при фиксированных $\sigma_\omega = 10^{-5}$ рад/с/ $\sqrt{\text{Гц}}$, $\sigma_f = 10^{-5}$ м/с²/ $\sqrt{\text{Гц}}$, $\sigma_\Omega = 10^{-2}$ рад/с/ $\sqrt{\text{Гц}}$. Результаты для акселерометров и ДУС представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 1

Зависимость погрешности оценки элементов калибровочной матрицы S_f акселерометров от степени неравномерности вращения вала σ_Ω

σ_Ω	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
ПФ	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	0,0049
ОФК	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$
CRB	$2,9 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-9}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2

Зависимость погрешности оценки элементов калибровочной матрицы S_ω гироскопов от степени неравномерности вращения вала σ_Ω

σ_Ω	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
ПФ	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$
ОФК	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$
CRB	$6,8 \cdot 10^{-10}$	$6,2 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3

Зависимость погрешности оценки элементов калибровочной матрицы S_f акселерометров от длительности вращения

T, c	10	20	40	80	160	320
ПФ	1,0130	0,00228	0,000108	$2,26 \cdot 10^{-5}$	$2,44 \cdot 10^{-6}$	$6,53 \cdot 10^{-6}$
ОФК	$5,47 \cdot 10^{-7}$	$3,86 \cdot 10^{-7}$	$2,74 \cdot 10^{-7}$	$1,93 \cdot 10^{-7}$	$1,37 \cdot 10^{-7}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$
CRB	$5,53 \cdot 10^{-7}$	$3,90 \cdot 10^{-7}$	$2,77 \cdot 10^{-7}$	$1,95 \cdot 10^{-7}$	$1,38 \cdot 10^{-7}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$

Таблица 4

Зависимость погрешности оценки элементов калибровочной матрицы S_ω ДУС от длительности вращения

T, c	10	20	40	80	160	320
ПФ	0,0227	0,000379	$2,71 \cdot 10^{-5}$	$4,11 \cdot 10^{-6}$	$3,27 \cdot 10^{-6}$	$1,76 \cdot 10^{-6}$
ОФК	$6,04 \cdot 10^{-7}$	$4,20 \cdot 10^{-7}$	$2,94 \cdot 10^{-7}$	$2,10 \cdot 10^{-7}$	$1,49 \cdot 10^{-7}$	$1,06 \cdot 10^{-7}$
CRB	$5,88 \cdot 10^{-7}$	$4,07 \cdot 10^{-7}$	$2,86 \cdot 10^{-7}$	$2,01 \cdot 10^{-7}$	$1,43 \cdot 10^{-7}$	$1,01 \cdot 10^{-7}$

Видно, что при равномерном вращении вала метод ПФ почти не уступает ОФК в точности, но оба они далеки от CRB. При неравномерном вращении метод ПФ существенно хуже ОФК, который, наоборот, близок к CRB. Точность метода ПФ сильно зависит от длительности вращений, в то время как для ОФК и CRB эта зависимость намного слабее. Однако преимуществами метода ПФ перед ОФК являются гарантированная сходимость и отсутствие необходимости настраивать параметры.

Заключение

Предложенный алгоритм калибровки методом ПФ проверен на микроэлектромеханических ИБ низкой точности. Точность алгоритма вполне приемлема, хотя сильно за-

висит от длительности вращений, что объясняется эффектом растекания спектра при ДПФ. Проведен также численный анализ погрешности методов ПФ и Н. А. Парусникова на основе ОФК. При равномерном вращении вала метод ПФ и ОФК показывают близкие результаты, но оба уступают CRB. При неравномерном вращении метод ПФ значительно хуже ОФК, приближающегося к CRB. Это естественно, так как ПФ в отличие от ОФК предполагает равномерное вращение. Алгоритм на основе ПФ демонстрирует гарантированную сходимость и не требует настройки параметров. Вероятно, его можно использовать при построении начального приближения для ОФК.

Отметим, что проведенный анализ является неполным: не изучено влияние постоянных конических биений вала, которые, без сомнения, ухудшают результаты. Кроме того, рассмотренная калибровочная модель является упрощенной и пригодна, скорее всего, только для микромеханических датчиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянцева Г.И., Блажнов Б.А., Драницына Е.В., Степанов А.П. О калибровке измерительного модуля прецизионной БИНС и построении связанного с ним ортогонального трехгранника // Гиропрокопия и навигация. 2016. Т. 1 (92). С. 36–48. DOI 10.17285/0869-7035.2016.24.1.036-048.
2. Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В. Алгоритмы калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гиропрокопия и навигация. 2008. № 3 (62). С. 3–27.
3. Вавилова Н.Б., Сазонов И.Ю. Калибровка бескарданной инерциальной навигационной системы в сборе на грубых стендах с одной степенью свободы // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2012. Т. 1. № 4. С. 64–66.
4. Козлов А.В., Сазонов И.Ю., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А. Калибровка инерциальных навигационных систем на грубых стендах с учетом разнесения чувствительных масс ньютонометров // XX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2013. С. 104–107.
5. Браславский Д.А., Поликовский Е.Ф., Якубович А.М. Способ калибровки трехосного блока акселерометра. Заявка на авторское свидетельство № 2422425/23 с приоритетом от 24.11.1976.
6. Bolotin, Yu.V., Derevyankin, A.V., Matasov, A.I., Iteration Scheme for Accelerometer Unit Calibration by a Guaranteed Approach // *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 354–365.
7. Tedaldi, D., Pretto, A., Menegatti, E., A robust and easy to implement method for IMU calibration without external equipment // *Proceedings – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2014, pp. 3042–3049, <https://doi.org/10.1109/ICRA.2014.6907297/>
8. Bolotin, Y., Savin, V., Turntable IMU calibration algorithm based on the Fourier transform technique // *MDPI Sensors*, 2023, 23(2):1045, <https://doi.org/10.3390/s23021045/>
9. Зорич В.А. Математический анализ. М.: Физматлит, 1984. 544 с.
10. x-io Technologies: <https://x-io.co.uk/x-IMU/>
11. Bar-Shalom, Y., Li, X., Kirubarajan, T., Estimation with applications to tracking and navigation. N.Y.: Wiley, Interscience, 2001.

Bolotin Yu.V., Savin V. A. (Lomonosov Moscow State University, Rubin Aviation Corporation, PJSC). On the Accuracy of the SINS Calibration Algorithm Based on the Fourier Transform. Comparison with the Cramer–Rao Bound. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2025, vol. 33, no. 4 (131), pp. 64–77.

Abstract. Calibration of a strapdown inertial navigation system (SINS) on a simple turntable is considered. SINS calibration is carried out in the autonomous mode, relying only on the SINS sensors. One of the well-known algorithms for calibration in this scenario is

the algorithm based on the extended Kalman filter proposed by N.A. Parusnikov. The algorithm is accurate enough, so that under certain assumptions, it is close to optimal. Some difficulties in its application are due to linearization of the problem, which requires the knowledge of initial approximation of the parameters to be calibrated. As an alternative, an algorithm based on the Fourier transform and subsequent transition to data spectrum analysis is proposed, after which the calibration algorithm becomes purely algebraic and does not involve any convergence problems. The accuracy of the proposed algorithm, as well as its nonoptimality are discussed through the comparison with the theoretical Cramer–Rao bound.

Key words: SINS, calibration, Fourier transform, Cramer–Rao bound.

Материал поступил 27.08.2025.