

УДК 527.62
EDN NDJGTQ

В. В. БОГОМОЛОВ, В. Г. КАРАУЛОВ

СРАВНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ И НЕРЕКУРРЕНТНЫХ БАЙЕСОВСКИХ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ С АЛГОРИТМОМ ОПТИМИЗАЦИИ НА ФАКТОР-ГРАФАХ В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ ПО ТОЧЕЧНЫМ ОРИЕНТИРАМ

Выполнен сравнительный анализ алгоритмов коррекции показаний навигационной системы автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА) с использованием измерений дальностей до гидроакустических маяков при их неблагоприятном расположении относительно АНПА. Рассмотрены: рекуррентный итерационный фильтр Калмана, итерационный сглаживающий пачечный линеаризованный фильтр, а также алгоритм, основанный на их комбинированном применении, и алгоритм, построенный с использованием методов оптимизации на фактор-графах.

Ключевые слова: фильтр Калмана, оптимизация на фактор-графах, нерекуррентная фильтрация, счисление пути, апостериорная плотность.

Введение

Системы счисления пути, применяемые в автономных необитаемых подводных аппаратах (АНПА), накапливают погрешности местоопределения во времени. При их коррекции нередко используются измерения дальностей до точечных ориентиров, таких, например, как гидроакустические маяки [1–7]. В настоящей работе рассматривается нелинейная задача коррекции показаний системы счисления АНПА по измерениям расстояний до маяков с применением метода длинной базы [1].

На результаты такой коррекции влияют различные факторы, в том числе: количество приемников и гидроакустических маяков, их взаимное расположение, а также алгоритмы, задействуемые при обработке измерений. При решении рассматриваемой задачи широкое распространение получили основанные на линеаризации рекуррентные и нерекуррентные алгоритмы калмановского типа [8, 10]. Особый практический интерес представляет возможность получить приемлемое решение в неблагоприятных с точки зрения взаимного расположения маяков и АНПА условиях, когда трудно использовать рекуррентные алгоритмы калмановского типа. В подобном случае основанные на линеаризации нерекуррентные алгоритмы, где обрабатываются одновременно все измерения, накопленные к текущему моменту времени, обладают большими преимуществами [10]. В то же время известно, что их недостатком является значительная вычислительная сложность. Для ее снижения в работе [9] предложен рекуррентный итерационный сглаживающий пачечный лине-

Богомоллов Владимир Валентинович. Начальник сектора, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»; Университет ИТМО (С.-Петербург).

Караулов Владислав Германович. Инженер-программист, аспирант, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»; Университет ИТМО.

аризованный фильтр (РИС-ПЛФ), основанный на комбинированном использовании рекуррентной и нерекуррентной схем обработки измерений, обладающий всеми достоинствами нерекуррентных алгоритмов и при этом экономичный с точки зрения объема вычислений.

Еще один подход к построению малозатратных в вычислительном отношении нерекуррентных алгоритмов для решения нелинейных задач предполагает использование методов оптимизации на фактор-графах (таков, например, алгоритм iSAM2) [10–14].

Цель настоящей работы – провести сравнительный анализ рекуррентного итерационного фильтра Калмана (ИФК), итерационного сглаживающего пачечного линейного фильтра (ИС-ПЛФ) [10], алгоритма, основанного на их комбинированном применении (РИС-ПЛФ) [9, 10], и алгоритма iSAM2 [9, 14].

Работа имеет следующую структуру. В первом разделе в рамках байесовского подхода формулируется постановка задачи коррекции показаний навигационной системы АНПА по измерениям дальностей до гидроакустических маяков и кратко описываются рассматриваемые алгоритмы решения. Во втором разделе обсуждается алгоритм оптимизации на графах. Раздел 3 содержит результаты имитационного моделирования, а в заключении приведены основные выводы.

1. Постановка задачи

Сформулируем задачу в рамках байесовского подхода, для чего введем модель динамики изменения оцениваемого вектора состояния во времени и соответствующую модель измерений [15, 16].

Предполагается, что АНПА оборудован относительным лагом, который измеряет продольную и поперечную составляющие скорости, а также курсоуказателем (например, магнитным компасом).

Введем следующие переменные: x_i – шестимерный вектор состояния системы, содержащий в каждый момент времени i неизвестные горизонтальные координаты АНПА (x_i^0, y_i^0) в локальной прямоугольной системе координат с географической ориентацией осей; ΔK_i – погрешность курсоуказателя; $(\Delta U_i^x, \Delta U_i^y)$ – погрешность знания составляющих скорости течения в географической системе координат; δ_i – общая для всех маяков погрешность, возникающая из-за разности шкал времени маяков и АНПА.

Запишем линейное уравнение, описывающее динамику изменения вектора состояния x_i АНПА во времени в виде [8]:

$$x_i = F_i x_{i-1} + \Gamma w_i + u_i, \quad (1)$$

где

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & [\tilde{V}_i^x \cos(\tilde{K}_i) - \tilde{V}_i^y \sin(\tilde{K}_i)] \Delta t & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & [-\tilde{V}_i^x \sin(\tilde{K}_i) - \tilde{V}_i^y \cos(\tilde{K}_i)] \Delta t & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha_{v_x} \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha_{v_y} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— матрица, опре-} \\ \text{деляющая дина-} \\ \text{мику изменения} \\ \text{вектора состоя-} \\ \text{ния;} \end{array}$$

$$u_i = \begin{bmatrix} \left[\tilde{V}_i^x \sin(\tilde{K}_i) + \tilde{V}_i^y \cos(\tilde{K}_i) + \tilde{U}_i^x \right] \Delta t \\ \left[\tilde{V}_i^x \cos(\tilde{K}_i) - \tilde{V}_i^y \sin(\tilde{K}_i) + \tilde{U}_i^y \right] \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{— вектор входных воздействий, формируе-} \\ \text{мый по данным системы счисления;}$$

$\tilde{U}_i^x, \tilde{U}_i^y$ – вырабатываемые системой счисления значения составляющих скорости течения в географической системе координат с погрешностями $\Delta U_i^x, \Delta U_i^y$, описываемыми стационарными марковскими процессами первого порядка со среднеквадратическим отклонением (СКО) $\sigma_{\Delta U}$ и интервалом корреляции $\tau_{\Delta U}$;

$\tilde{K}_i$ – показания курсоуказателя с погрешностью ΔK , описываемые стационарным марковским процессом первого порядка с СКО $\sigma_{\Delta K}$ и интервалом корреляции $\tau_{\Delta K}$;

$\tilde{V}_i^x, \tilde{V}_i^y$ – продольная и поперечная составляющие скорости, полученные от лага, с инструментальными погрешностями в виде белого шума; СКО при осреднении на единичном интервале определяется как $\sigma_{\Delta V}$;

$\Delta t = t_i - t_{i-1}$;

$$\alpha = \frac{1}{\tau_{\Delta K}} \text{ и } \alpha_{v_i} = \frac{1}{\tau_{\Delta U}};$$

w_i – пятимерный порождающий центрированный белый гауссовский шум с известной матрицей ковариации $Q_i = \text{diag}\left((\sigma_{\Delta V} \Delta t)^2 \quad (\sigma_{\Delta V} \Delta t)^2 \quad 1/\Delta t \quad 1/\Delta t \quad 1/\Delta t\right)$;

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_{2 \times 2} & O_{2 \times 1} & O_{2 \times 2} \\ O_{1 \times 2} & \sqrt{2\alpha\sigma_K^2} \Delta t \times E_{1 \times 1} & O_{1 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 1} & \sqrt{2\alpha_{v_i}\sigma_{\Delta U}^2} \Delta t \times E_{2 \times 2} \\ O_{1 \times 2} & O_{1 \times 1} & O_{1 \times 2} \end{bmatrix} \quad \text{— матрица порождающих шумов,} \\ \text{где } E \text{ — единичная матрица, } O \text{ — ну-} \\ \text{левая матрица.}$$

Считаем, что $\tilde{K}_i, \tilde{V}_i^x, \tilde{V}_i^y, \tilde{U}_i^x, \tilde{U}_i^y$ приведены к моментам получения гидроакустических измерений с использованием при необходимости осреднения, интерполяции или экстраполяции.

При формировании измерений используются так называемые маяки-пингеры, излучающие сигналы регулярно. Могут применяться как донные маяки, излучающие сигналы по запросу АНПА, так и маяки, установленные на поверхностных буях, которые могут вырабатывать сигналы постоянно, пополняя запас электроэнергии от солнечных батарей. Донные маяки, у которых запас электроэнергии невелик, вырабатывают сигналы ограниченное время – после запроса от АНПА. Синхронизация шкал времени маяков на поверхностных буях обычно не вызывает проблем, поскольку они могут быть оборудованы приемниками спутниковой навигации. Шкала времени каждого маяка может быть с высокой точностью синхронизирована с универсальной шкалой времени UTC или часами одной из глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) с помощью синхроимпульса, вырабатываемого

ГНСС-приемником. Синхронизация шкал донных маяков выполняется путем обмена сигналами между ними [17].

Заметим, что в вектор состояния x_i входят непосредственно координаты местоположения АНПА в отличие от классических задач комплексирования навигационных данных, когда привлекаются разности координат (инерциальных или основанных на счислении), выработанных навигационной системой подвижного объекта, и координат, поступающих от корректирующей системы [8]. В таких задачах в вектор состояния включаются погрешности координат от навигационной системы подвижного объекта, но не сами координаты. В рассматриваемой нами задаче оценивания местоположения АНПА счисление координат запускается с момента начала решения.

Предполагается, что в общем случае в дискретные моменты времени t_i аппаратура АНПА получает измерения дальностей до n_i гидроакустических маяков:

$$y_i = h(x_i) + I_i \delta_i + v_i, \quad (2)$$

где y_i – n_i -мерный вектор измерений дистанции до маяков;

$h(x_i) = [d_i^1(x_i) \ d_i^2(x_i) \ \dots \ d_i^{n_i}(x_i)]$ – нелинейная n_i -мерная функция;

$d_i^j(x_i) = \sqrt{(x_i^j - x_i^0)^2 + (y_i^j - y_i^0)^2 + (z_i^j - z_i^0)^2}$ – расстояние между АНПА и j -м маяком;

$j = \overline{1 \dots n_i}$ – номер маяка;

(x_i^j, y_i^j) – известные горизонтальные координаты маяков;

(z_i^j, z_i^0) – известные глубины установки маяков и положения АНПА;

I_i – n_i -мерный вектор, состоящий из единиц;

v_i – n_i -мерный вектор, содержащий некоррелированные для разных маяков погрешности измерений дальностей в виде белого шума с известной матрицей ковариации R_p , диагональные элементы которой равны σ_v^2 ;

δ_i – общая для всех маяков погрешность, возникающая из-за разности шкал времени маяков и АНПА и описываемая как случайное смещение с СКО σ_δ .

Цель решения задачи – оценить вектор состояния x_i по набору измерений y_i в момент времени t_i .

Для решения будем использовать ИФК и ИС-ПЛФ, основанные на линеаризации функции $h(x_i)$ [9, 10, 18, 19].

ИФК синтезируется как рекуррентный относительно измерений алгоритм, в котором они обрабатываются последовательно, при этом каждое измерение после многократной итерационной обработки на текущем шаге больше не привлекается [20].

Для построения такого алгоритма вводится вектор состояния $X_k = (x_0, \dots, x_k)^T$, который содержит значения x_i для всех моментов времени $i = \overline{0 \dots k}$, и вектор измерений $Y_k = (y_1, \dots, y_k)^T$. Задача нереккуррентного оценивания в рамках байесовского подхода может быть сформулирована как получение оценки вектора X_k , максимизирующей апостериорную плотность распределения вероятностей для него [9, 10, 18, 20]:

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= \arg \max_{X_k} p(X_k | Y_k) = \arg \max_{X_k} p(Y_k | X_k) p(X_k) = \\ &= \arg \max_{X_k} p(x_0) \prod_{i=1}^k p(y_i | x_i) p(x_i | x_{i-1}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $p(x_0)$ – априорная функция плотности распределения вероятностей (ФПРВ) вектора состояния x_0 ; $p(y_i | x_i)$ – функция правдоподобия; $p(x_i | x_{i-1})$ – переходная ФПРВ вектора состояния x .

Предположим, что случайные величины, входящие в (3), имеют гауссовский характер. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} p(x_i | x_{i-1}) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}x_i - F_i x_{i-1} - u_{i\tilde{Q}_i}^2\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - F_i x_{i-1} - u_i)^T (\tilde{Q}_i)^{-1} (x_i - F_i x_{i-1} - u_i)\right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p(y_i | x_i) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}y_i - h(x_i) - \delta_{iR_i}^2\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(y_i - h(x_i) - \delta_i)^T R_i^{-1} (y_i - h(x_i) - \delta_i)\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{Q}_i = \Gamma Q_i \Gamma^T + \alpha E_{6 \times 6}$ – добавление $\alpha E_{6 \times 6}$ согласно методу регуляризации Тихонова [21], которое требуется для решения вырожденных систем (коэффициент α выбирается эвристически).

Априорная ФПРВ вектора состояния также считается гауссовской, т.е.:

$$p(x_0) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|x_0 - \mu\|_{P_0}^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x_0 - \mu)^T P_0^{-1} (x_0 - \mu)\right), \quad (6)$$

где P_0 , μ – априорные матрица ковариаций и математическое ожидание для вектора состояния x_0 в начальный момент времени.

В выражениях (4)–(6) символ $\|\cdot\|$ обозначает расстояние Махаланобиса [22], которое определяется как

$$\|e\|_{\Sigma} = \sqrt{e^T \Sigma^{-1} e}.$$

Подставив (4)–(6) в (3) и взяв логарифм, получим:

$$\hat{X}_k = \arg \min_{X_k} \left[x_0 - \mu_{P_0}^2 + \sum_{i=1}^k \left[y_i - h(x_i) - \delta_{iR_i}^2 + x_i - F_i x_{i-1} - u_{i\tilde{Q}_i}^2 \right] \right], \quad (7)$$

или

$$\hat{X}_k = \arg \min_{X_k} p(X_k),$$

где

$$J(X_k) = \left[\begin{aligned} &(x_0 - \mu)^T P_0^{-1} (x_0 - \mu) + \\ &+ \sum_{i=1}^k \left[(y_i - h(x_i) - \delta_i)^T R_i^{-1} (y_i - h(x_i) - \delta_i) + \right. \\ &\left. + (x_i - F_i x_{i-1} - u_i)^T (\tilde{Q}_i)^{-1} (x_i - F_i x_{i-1} - u_i) \right] \end{aligned} \right]. \quad (8)$$

Таким образом, нахождение оценок X_k сводится к минимизации критерия (8).

ИС-ПЛФ на каждом шаге итерационно обрабатывает вектор Y_k всех накопленных измерений $y_1, \dots, y_k$, учитываемых одновременно в составе вектора Y_k [10, 20].

Алгоритм РИС-ПЛФ аналогично ИС-ПЛФ на каждом шаге итерационно обрабатывает пачку всех накопленных измерений, однако измерения $y_1, \dots, y_k$ внутри пачки обрабатываются с применением рекуррентных процедур, что существенно уменьшает вычислительную сложность процесса оценивания [10, 20].

2. Решение с использованием оптимизации на фактор-графах

Алгоритм iSAM2 является нереккуррентным, в нем для снижения объема вычислений используются методы оптимизации на фактор-графах. Запишем получение оценки (7) в обозначениях, принятых в этих методах [11–13]:

$$\hat{X}_k = \arg \min_{X_k} \left[\|f_0^{prior}\|_{P_0}^2 + \sum_{i=1}^k \left[\|f_i^{model}\|_{\tilde{Q}_i}^2 + \|f_i^{dist}\|_{R_i}^2 \right] \right]. \quad (9)$$

Здесь заданы следующие факторы:

$f_0^{prior} = x_0 - \mu$ – фактор априорной информации;

$f_i^{model} = x_i - F_{i-1}x_{i-1} - u_i$ – фактор динамики изменения вектора состояния;

$f_i^{dist} = y_i - h(x_i) - \delta_i$ – фактор измерения расстояния.

Рассматриваемый алгоритм iSAM2 [14] является улучшенной версией алгоритма Incremental SAM (iSAM) [23], созданного путем доработки алгоритма square root SAM [24]. В связи с этим предварительно стоит описать эти два алгоритма.

Square root SAM – нереккуррентный алгоритм, обрабатывающий в каждый момент времени всю накопленную с момента своего запуска информацию, а также минимизирующий критерий (8). По сути это аналог ИС-ПЛФ, построенный с привлечением методов оптимизации на фактор-графах.

Критерий (8) после линейризации можно представить в квадратичной форме [14, 23–24], а оценка вычисляется как

$$\hat{X}_k = \arg \min_{X_k} \|AX_k - b\|^2, \quad (10)$$

где $b = [b_0 \ b_1 \dots \ b_i \dots]$ – вектор, в который входят разности текущего измерения и значений функций $h(x)$ в точке линейризации; A – разреженная матрица, ненулевыми элементами которой являются якобианы функций измерений и функции динамики.

Поиск оценки (10) заключается в решении переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$AX_k = b, \quad (11)$$

которое может быть вычислительно эффективно найдено с применением факторизации матрицы A , например с помощью QR-факторизации [24]. Столбцы полученной после такой факторизации верхней треугольной матрицы R фактически соответствуют неизвестным, а ненулевые элементы отражают условные зависимости между переменными после процедуры «устранения» (англ. – elimination) [14, 23].

Таким образом, нахождение оценки в виде (9) сводится к процедуре, аналогичной решению СЛАУ (11), причем добавление новой информации обязывает заново факторизовать матрицу A . Очевидно, что этот алгоритм не может работать в реальном

времени из-за постоянной факторизации растущей матрицы A и, как следствие, повышения вычислительной сложности.

iSAM – это улучшенная версия алгоритма square root SAM, где полная факторизация всей матрицы A происходит только в двух случаях: при появлении петли (т.е. АНПА, чьи координаты оцениваются, вернулся в точку, в которой уже до этого находился, и этот факт становится известным) или по прошествии какого-то произвольно заданного числа шагов.

Чтобы избежать полной факторизации матрицы A предлагается добавлять новые измерения непосредственно в верхнюю треугольную матрицу R (в QR -разложении матрицы A) [23, 24]. Однако при этом элементы матрицы R требуют пересчета при уточнении точки линеаризации, что снижает эффективность алгоритма.

iSAM2 лишен этого недостатка благодаря использованию так называемой адаптивной (повторной) релинеаризации, проводимой только для наиболее изменившихся оценок компонент вектора состояния (отслеживается изменение оценок каждой переменной относительно точки линеаризации, в которой рассчитывался якобиан). Процедура осуществляется с помощью графических моделей, таких как байесовское дерево и соответствующая ему сеть [14]. В силу этого отсутствует необходимость пересчитывать все элементы матрицы R при каждом новом измерении.

3. Результаты моделирования

Исследуемые алгоритмы – рекуррентный ИФК, ИС-ПЛФ [10, 20], РИС-ПЛФ [9, 18] и *iSAM2* [14] – были промоделированы с использованием 1000 реализаций случайных погрешностей дальномерных измерений, данных курсоуказателя и лага.

Значения погрешностей: СКО шумов измерений дальностей $\sigma_v = 10$ м; СКО априорного знания координат – 150 м; СКО шума измерений лага $\sigma_{\Delta V} = 0,1$ м/с; СКО медленноменяющихся погрешностей определения курса $\sigma_{\Delta K} = 5^\circ$; СКО знания составляющих скорости течения $\sigma_{\Delta U} = 0,25$ м/с (интервалы корреляции этих составляющих $\tau_{\Delta U} = \tau_{\Delta K} = 3600$ с); общая для всех маяков СКО, возникающее из-за разности шкал времени маяков и АНПА, $\sigma_\delta = 20$ м.

АНПА двигался по траектории, показанной на рис. 1, со скоростью 5 м/с при фиксированном местоположении точечных ориентиров. Дискретность поступления измерений $\Delta t_i = 1$ с. Гидроакустические измерения моделировались только при условии, что расстояние от маяка до АНПА не превышает 1 км.

В результате моделирования были вычислены действительные (по реализации-

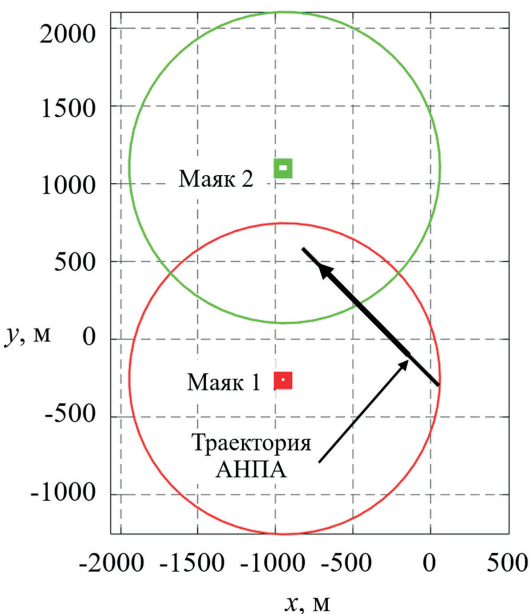


Рис. 1. Траектория движения АНПА и расположение гидроакустических маяков с линиями возможного положения АНПА в виде окружностей

ям погрешностей оценок) и расчетные среднеквадратические погрешности (СКП) [26] оценок координат (рис. 2), выработанных рекуррентным ИФК, ИС-ПЛФ, РИС-ПЛФ и iSAM2.

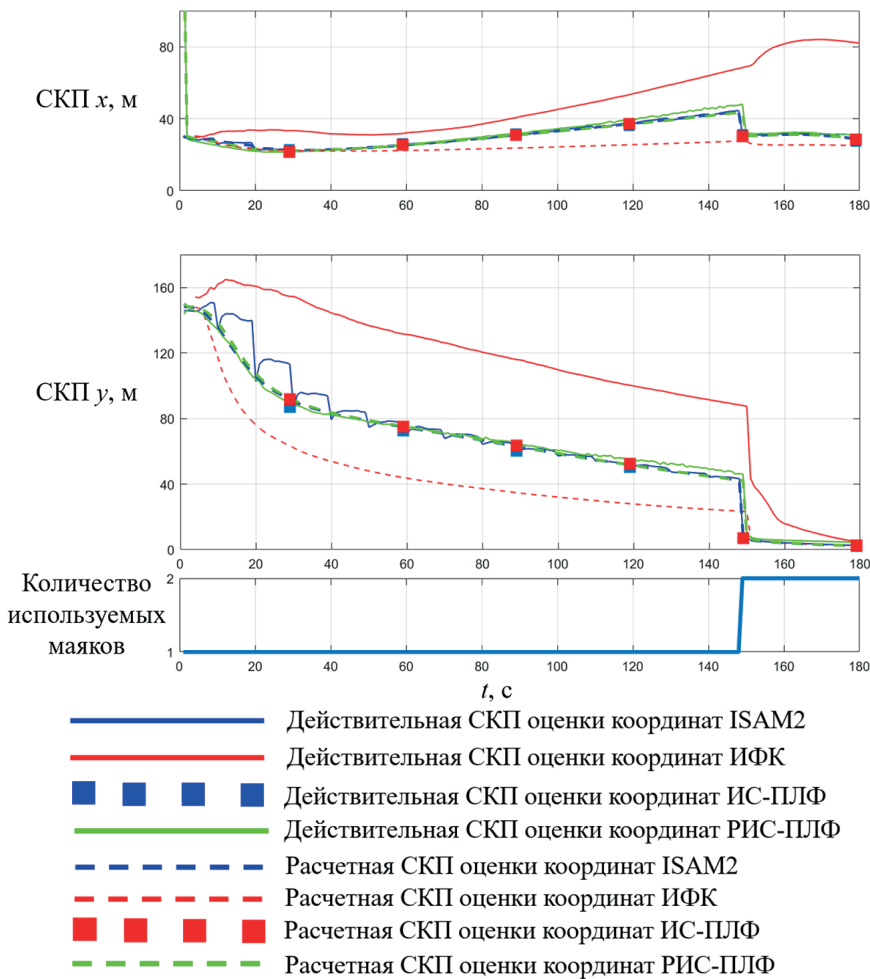


Рис. 2. Результаты моделирования для четырех алгоритмов

При решении задачи нерекуррентного оценивания с помощью iSAM2 использовалась библиотека с открытым исходным кодом GTSAM (Georgia Tech Smoothing and Mapping) [27].

В начальный момент времени в зоне видимости одного гидроакустического маяка оцениваются не координаты АНПА по отдельности, а его расстояние до маяка (если не принимать во внимание априорную информацию, то линия возможного местоположения АНПА представляет собой окружность, центр которой совпадает с координатами маяка). В связи с этим до момента получения измерений от двух маяков из-за неопределенности действительная и расчетная СКП рекуррентного ИФК не совпадают [26]. При входе в зону видимости двух маяков появляется неоднозначность, и оценка ИФК может принять ложное значение, что, как видно из рис. 2, приводит к резкому росту погрешности по координате x_0 . Если удастся преодолеть неопределенность, то результаты рекуррентного ИФК и ИС-ПЛФ совпадают.

Из графиков видно, что расчетная СКП рекуррентного ИФК неадекватно передает реальное значение погрешности. При этом у остальных алгоритмов расхождения между расчетной и действительной СКП заметны, но не существенны, что свидетельствует о состоятельности алгоритмов [26]. Стоит заметить, что РИС-ПЛФ и iSAM2 имеют на начальном этапе переходный процесс, вызванный многоэкстремальностью апостериорной плотности, однако это не влияет на дальнейшую работоспособность алгоритмов в силу их нерекуррентного характера.

Результаты, полученные с помощью ИС-ПЛФ, РИС-ПЛФ и алгоритма оптимизации на фактор-графе, близки по точности, при этом iSAM2 демонстрирует наибольшее быстродействие. Отметим, что пилообразный график СКП у iSAM2 в начальный момент времени связан с накоплением информации и адаптивной релинеаризацией, о которой было сказано выше. Результаты вычислений РИС-ПЛФ, рекуррентного ИФК и ИС-ПЛФ приведены для случая, когда измерения обрабатывались с использованием трех итераций.

По итогам моделирования выявлено, что iSAM2 и РИС-ПЛФ (при расчетах на фиксированном интервале, который выбирается согласно возможностям бортового вычислителя АНПА) подходят для работы в реальном времени, в то время как ИС-ПЛФ неэффективен из-за большого объема вычислений.

Отметим, что при увеличении уровня априорной неопределенности координат АНПА с проблемой неоднозначности решения и, как следствие, неэффективной линеаризацией измерений придется столкнуться не только при использовании рекуррентного ИФК. Для разрешения неоднозначности может применяться экономичный алгоритм, представленный в [28, 29]. Он запускается при появлении одновременных дальномерных измерений от двух маяков и позволяет в едином фильтре рекуррентно обрабатывать текущие и сохраненные до запуска данные. Возможно также привлечение алгоритма [30] с обработкой накопленной информации на основе процедуры сглаживания в фиксированной точке. Для скорейшего получения решения требуется применение методов одномаяковой навигации [31].

Заключение

Проведен сравнительный анализ алгоритмов коррекции показаний системычисления местоположения АНПА с использованием измерений дальностей до гидроакустических маяков в неблагоприятных условиях, когда точность оценивания координат существенно снижается из-за неудачного взаимного расположения маяков и АНПА. При исследовании применяется комбинированный подход, при котором задача формулируется в байесовской постановке и для ее решения осуществляется переход к нерекуррентной схеме оценивания с привлечением субоптимального алгоритма iSAM2.

Рассмотрены рекуррентный ИФК, ИС-ПЛФ, РИС-ПЛФ и iSAM2, проанализирована их применимость. Установлено, что в неблагоприятных условиях работы все алгоритмы, кроме рекуррентного ИФК, состоятельны.

Моделирование показало, что ИС-ПЛФ, РИС-ПЛФ и iSAM2 имеют преимущество перед рекуррентным ИФК. Выявлено, что алгоритм iSAM2 на основе оптимизации на фактор-графе требует меньше вычислительных ресурсов по сравнению с РИС-ПЛФ и ИС-ПЛФ, поскольку они на каждом шаге обрабатывают всю нако-

пленную с момента запуска информацию, т. е. решают задачу сглаживания, причем повторная линеаризация выполняется для всех точек. В iSAM2 используется адаптивная релинеаризация на основе графических моделей, при которой линеаризуются только определенные точки, что позволяет уменьшить вычислительную сложность при незначительной потере точности.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 23-19-00626, <https://rscf.ru/project/23-19-00626/>*

ЛИТЕРАТУРА

1. Кебкэл К.Г., Машошин А.И. Гидроакустические методы позиционирования автономных необитаемых подводных аппаратов // Гирскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 3 (94). С. 115–130. DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.3.115-130/
2. Wang L., Pang S., AUV Navigation Based on Inertial Navigation and Acoustic Positioning Systems, *OCEANS 2018 MTS/IEEE Charleston*, Charleston, SC, USA, 2018, pp. 1–8, <https://doi.org/10.1109/OCEANS.2018.8604773/>
3. Key K., Constable S., Inverted long-baseline acoustic navigation of deep-towed CSEM transmitters and receivers, *Marine Geophysical Research*, 2021, vol. 42, no. 6, <https://doi.org/10.1007/s11001-021-09427-z/>.
4. Щербатюк Д.А. Алгоритм навигационного обеспечения работы группы АНПА на основе фильтра частиц и разностно-дальномерной гидроакустической системы // Подводные исследования и робототехника. 2021. Т. 29. № 4 (38). С. 50–57. DOI: 10.37102/1992-4429_2021_38_04_05/
5. Кошаев Д.А. Относительное позиционирование и определение ориентации автономного необитаемого подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // Гирскопия и навигация. 2022. Т. 30. № 4 (119). С. 122–141. DOI: 10.17285/0869-7035.00107/
6. Грузликов А.М., Караулов В.Г., Мухин Д.А., Шалаев Н.А. Результаты апробации алгоритма позиционирования и определения ориентации подводного аппарата по данным от гидроакустических маяков // Известия Южного федерального университета. Технические науки. Раздел 4. Связь, навигация и наведение. 2023. С. 265–274. DOI: 10.18522/2311-3103-2023-1-265-274/
7. Karaulov, V., Stepanov, O., Gruzlikov, A., Litvinenko, Y., Comparison of Algorithms for Estimating the AUVs Coordinates and Heading Angle in the Task of Approaching the Stationary Landing Platform, *Intelligent Systems, INTELS 2024, Communications in Computer and Information Science*, vol. 2604, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-032-04761-8_2/
8. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. Изд. 4-е, испр. и доп. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2025.
9. Isaev, A., Stepanov, O. & Litvinenko, Y., Comparative analysis of recursive and nonrecursive linearization-based estimation algorithms. *Int. J. Dynam. Control*, 13, 95 (2025). <https://doi.org/10.1007/s40435-025-01592-y/>
10. Stepanov O., Isaev A., Dranitsyna E., Litvinenko Y., Recursive Batch Smoother with Multiple Linearization for One Class of Nonlinear Estimation Problems, *Application for Multisensor Navigation Data Fusion. Sensors*, 2025; 25(24):7566. <https://doi.org/10.3390/s25247566/>
11. Loeliger H.-A., An Introduction to Factor Graphs, *IEEE Signal Processing Magazine*, 2004, vol. 21, no. 1, pp. 28–41. <https://doi.org/10.1109/MSP.2004.1267047/>
12. Taylor C., Gross J., Factor Graphs for Navigation Applications: A Tutorial, *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation*, vol. 71, no. 3, 2024, <https://doi.org/10.33012/navi.653/>
13. Dellaert F., Kaess M., Factor Graphs for Robot Perception, *Foundations and Trends in Robotics*, vol. 6, no. 1–2, pp. 1–139, 2017, <https://doi.org/10.1561/23000000043/>
14. Kaess M., Johannsson H., Roberts R., Ila V., Leonard J.J., and Dellaert F., iSAM2: Incremental Smoothing and Mapping Using the Bayes Tree, *Intl. J. of Robotics Research (IJRR)*, vol. 31, Feb. 2012, pp. 217–236, <https://doi.org/10.1177/0278364911430419/>
15. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. 3-е изд. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2003.

16. **Stepanov O.A.**, Optimal and sub-optimal filtering in integrated navigation systems, *A. Nebylov and J. Watson, Aerospace Navigation Systems*, Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2016, pp. 244–298, <https://doi.org/10.1002/9781119163060.ch8/>
17. **Кебкал К.Г., Кебкал А.Г., Кебкал В.К.** Инструментальные средства синхронизации гидроакустических устройств связи в задачах управления подводными сенсорами, распределенными антенными, автономными аппаратами // *Гироскопия и навигация*. 2014. Т. 22. № 2 (85). С. 48–65.
18. **Исаев А.М., Степанов О.А.** Рекуррентный итерационный сглаживающий пачечный линейризованный фильтр в задаче коррекции показаний навигационной системы по информации о геофизических полях // *Мат-лы XXXIV конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова: сб. докл. СПб.: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2024. С. 200–207. EDN OGLRWS.*
19. **Степанов О.А., Моторин А.В., Исаев А.М.** Взаимосвязь и отличия байесовских алгоритмов оценивания и методов оптимизации на фактор-графах // *Молодежная школа-семинар «Навигация и управление движением» (NMC-2025): сб. докл. СПб.: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2025. С. 83–88.*
20. **Степанов О.А., Моторин А.В., Золотаревич В.П. и др.** Рекуррентные и нерекуррентные алгоритмы в задачах обработки навигационной информации. Отличия и взаимосвязь с алгоритмами оптимизации на графах // XXXI С.-Петерб. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам: сб. докл. СПб.: Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2024. С. 336–344.
21. **Тихонов А.Н.** О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // *Докл. АН СССР*, 163:3 (1965), 591–594.
22. **Mahalanobis P.C.**, On the generalized distance in statistics. 2, 49–55, 1936.
23. **Kaess, M., Ranganathan, A., and Dellaert, F.**, iSAM: Incremental smoothing and mapping, *IEEE Trans. Robotics*, 2008, 24(6):1365–1378, <https://doi.org/10.1109/TRO.2008.2006706/>
24. **Dellaert F.**, Square Root SAM: Simultaneous location and mapping via square root information smoothing, *The International Journal of Robotics Research*, 25(12):1181–1203. <https://doi.org/10.1177/0278364906072768/>
25. **Dellaert, F., Kipp, A., and Krauthausen, P.**, A multifrontal QR factorization approach to distributed inference applied to multirobot localization and mapping, *AAAI National Conference on AI*, 2005, Pittsburgh, PA.
26. **Степанов О.А., Исаев А.М.**, Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования // *Гироскопия и навигация*. 2023. Т. 31. №3 (122). С. 48–65. EDN MVWKGK.
27. **Dellaert F. and GTSAM Contributors**, *Georgia Tech Smoothing and Mapping library*, <https://github.com/borglab/gtsam>, 2022/
28. **Кошаев Д.А., Богомолов В.В.** Длиннобазовое подводное позиционирование с комплексированием измерений, полученных до и после начала решения, и устранением неоднозначности. Часть 1. Математическое описание // *Гироскопия и навигация*. 2025. Т. 33. № 1 (128). С. 125–145. EDN: OBJJBK.
29. **Кошаев Д.А., Богомолов В.В.** Длиннобазовое подводное позиционирование с комплексированием измерений, полученных до и после начала решения, и устранением неоднозначности. Часть 2. Оценка эффективности // *Гироскопия и навигация*. 2025. Т. 33. № 2 (129). С. 91–102. EDN: TEJLIG.
30. **Богомолов В.В.** Позиционирование автономного необитаемого подводного аппарата с одновременной обработкой текущих и сохраненных измерений дальностей от менее чем трех гидроакустических маяков // *Подводные исследования и робототехника*. 2024. № 2 (48). С. 58–67. EDN: TGEOGR.
31. **Дубровин Ф.С., Щербатюк А.Ф.** Исследование некоторых алгоритмов одномаяковой мобильной навигации АНПА: результаты моделирования и морских испытаний // *Гироскопия и навигация*. 2015. № 4 (91). С. 160–172. DOI: 10.17285/0869-7035.2015.23.4.160-172.

Bogomolov V.V., Karaulov V.G. (Concern CSRI Elektropribor, JSC, ITMO University, St. Petersburg)

Comparison of Recursive and Non-recursive Bayesian Estimation Algorithms with Factor-graph Optimization Algorithms in Landmark-based Navigation, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2025, vol. 33, no. 4 (131), pp. 103–114.

Abstract. A comparative analysis has been performed for the algorithms correcting measurements of the navigation system of an autonomous underwater vehicle (AUV) using ranges to acoustic beacons in the case of their unfavorable location relative to AUV. The paper examines a recursive iterative Kalman filter, an iterative batch linearized smoothing filter and an algorithm based on their combined use, and an algorithm based on factor graph optimization methods.

Key words: Kalman filter, factor-graph optimization, non-recursive filtering, dead reckoning, posterior probability density.

Материал поступил 24.10.2025