

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РОБАСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Предлагается приближенное решение задачи стационарной робастной фильтрации при заданных ограничениях на дисперсии производных полезного сигнала с использованием фильтра, соответствующего методу локальной аппроксимации спектральных плотностей. Обсуждается оценка потерь в точности, связанных с таким приближением. Приводится пример, иллюстрирующий эффективность предложенного решения.

Введение

При решении ряда практических задач фильтрации, связанных с обработкой навигационной информации, широкое распространение получил метод локальных аппроксимаций (МЛА) спектральных плотностей степенными функциями [1-5]. В работах [3, 4] сформулированы основные положения этого метода и показаны пути его применения для получения как стационарных, так и нестационарных алгоритмов обработки. Метод позволяет упростить вероятностные модели полезного сигнала и ошибок измерений и получить во многих случаях простые и интуитивно понятные алгоритмы. Одним из важнейших его преимуществ является то, что для получения практических результатов (частотных характеристик оптимальных фильтров) вполне достаточно сведений о спектральных плотностях в относительно узких диапазонах частот (обычно низких). При этом можно отметить, что если локальные аппроксимации спектральных плотностей являются их верхними границами, синтезируемый фильтр будет обладать робастными (гарантирующими) свойствами в том смысле, что реальная оценка точности (дисперсия ошибки фильтрации) не будет превышать расчетную, найденную по упрощенной модели.

Учитывая отмеченные особенности фильтров, построенных с помощью МЛА, представляется целесообразным использовать их для решения задач, в которых описание свойств воздействий не предполагает знания спектральных характеристик. В частности, характерным является случай, когда сигнал может быть описан лишь в виде ограничений на его дисперсию и (или) дисперсии некоторых, обычно низших производных [6-9]. Синтез фильтра в такой ситуации осуществляется исходя из условия ограничения дисперсии ошибки оценивания величиной, которая не зависит от конкретного вида спектральной плотности оцениваемого сигнала. В настоящей работе предлагается приближенный метод

Лопарев Алексей Валерьевич. Кандидат технических наук, начальник сектора ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург).

Степанов Олег Андреевич. Доктор технических наук, начальник научно-образовательного центра ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». Вице-президент Академии навигации и управления движением.

Кулакова Вероника Игоревна. Кандидат технических наук, с.н.с. ОАО «НТЦ «Завод Ленинец» (С.-Петербург).

решения такого рода задач с использованием стационарных фильтров, структура которых соответствует решению задачи фильтрации в рамках МЛЖ.

Построение оптимального фильтра в рамках метода локальных аппроксимаций

Рассмотрим типовую задачу фильтрации в рамках МЛЖ.

Пусть скалярные измерения

$$y(t) = u(t) + v(t) \quad (1)$$

представляют собой аддитивную смесь полезного сигнала $u(t)$ и ошибок измерений (помехи) $v(t)$, которые полагаются центрированными, стационарными и некоррелированными между собой случайными процессами. Будем считать, что ошибки измерения представляют собой белый шум интенсивности R , а для описания спектральной плотности сигнала $S_u(\omega)$ в окрестности точки пересечения с прямой $S_v(\omega) = R$ используется приближенное выражение $S_u(\omega) \cong R(\rho/\omega)^{2n}$, где ρ – абсцисса точки пересечения спектральных плотностей $S_u(\omega)$ и $S_v(\omega)$. Иными словами, вводится предположение, что полезный сигнал формируется в виде n -кратно проинтегрированного белого шума [4, 5]. Задача заключается в нахождении передаточной функции (частотной характеристики) $H(j\omega)$ оптимального линейного стационарного фильтра из условия минимума установившейся дисперсии

$$D_e = D_{eu} + D_{ev} \rightarrow \min$$

ошибки $e(t)$ оценивания полезного сигнала $u(t)$. Здесь

$$D_{eu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) |1 - H(j\omega)|^2 d\omega - \quad (2)$$

дисперсия динамической ошибки;

$$D_{ev} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega - \quad (3)$$

дисперсия ошибки от помехи.

В работе [4] показано, что передаточная функция оптимального преобразования имеет вид

$$H(j\omega) = \frac{K_1(j\omega)^{n-1} + K_2(j\omega)^{n-2} + \dots + K_n}{(j\omega)^n + K_1(j\omega)^{n-1} + K_2(j\omega)^{n-2} + \dots + K_n}, \quad (4)$$

где K_i представляют собой коэффициенты полинома Баттерворта, квадрат модуля которого

$$\left| (j\omega)^n + K_1(j\omega)^{n-1} + K_2(j\omega)^{n-2} + \dots + K_n \right|^2 = \omega^{2n} + \rho^{2n}. \quad (5)$$

Постановка задачи робастной фильтрации и ее приближенное решение с использованием МЛЖ

Рассмотрим теперь задачу обработки измерений вида (1) в несколько иной постановке. Для ошибок измерений по-прежнему будем использовать описание в виде белого шума заданной интенсивности R , а при описании случайного сиг-

нала $u(t)$ ограничимся предположением, что он имеет стационарную производную порядка n , дисперсия которой не превышает величину D_n . Иными словами, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} S_u(\omega) d\omega \leq D_n. \quad (6)$$

В работе [6], опираясь на методы пространства состояний, показано, что такую задачу можно решить с использованием аппарата H_2/H_∞ -фильтрации. Рассмотренный подход позволяет определить структуру фильтра, т.е. определить вид передаточной функции с точностью до неизвестных параметров. При этом порядок фильтра соответствует порядку старшей производной, имеющей ограниченную дисперсию. Основная сложность заключается в том, что задача H_2/H_∞ -оптимизации не имеет общего аналитического решения, поэтому при синтезе робастного фильтра используются методы численной оптимизации, направленные на минимизацию выбранного критерия. При этом задача, как правило, носит многоэкстремальный характер, что при наличии многих параметров значительно усложняет ее решение.

Получим приближенное решение поставленной задачи, отыскивая передаточную функцию $H(j\omega)$ в виде (4), соответствующем МЛА, предполагая при этом, однако, что параметр ρ неизвестен.

В этом случае для дисперсии динамической ошибки с учетом неравенства (6) можно записать

$$\begin{aligned} D_{eu} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) \left| \frac{(j\omega)^n}{(j\omega)^n + K_1(j\omega)^{n-1} + K_2(j\omega)^{n-2} + \dots + K_n} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{2n} S_u(\omega)}{\omega^{2n} + \rho^{2n}} d\omega \leq \max_{\omega} \left(\frac{1}{\omega^{2n} + \rho^{2n}} \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} S_u(\omega) d\omega \leq D_n / \rho^{2n}. \end{aligned}$$

Следовательно, дисперсия динамической ошибки может быть ограничена величиной

$$\bar{D}_{eu} = D_n / \rho^{2n}.$$

Определение дисперсии ошибки от помехи сводится к вычислению интеграла вида (3):

$$D_{ev} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_1(j\omega)^{n-1} + K_2(j\omega)^{n-2} + \dots + K_n}{(j\omega)^n + K_1(j\omega)^{n-1} + K_2(j\omega)^{n-2} + \dots + K_n} \right|^2 d\omega.$$

Принимая во внимание равенство (5) и выполняя необходимые математические преобразования, можно показать справедливость соотношения

$$D_{ev} = \frac{2n-1}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} R \rho.$$

Параметр ρ определим, минимизируя верхнюю оценку дисперсии суммарной ошибки:

$$\overline{D}_e = \overline{D}_{eu} + D_{ev} = D_n / \rho^{2n} + \frac{2n-1}{2n \sin \frac{\pi}{2n}} R \rho \rightarrow \min. \quad (7)$$

Отсюда получим значение параметра $\rho = \left(\frac{4n^2 \sin(\pi/2n)}{2n-1} \cdot \frac{D_n}{R} \right)^{1/2n+1}$, подставив которое в выражение (7), найдем минимум верхней оценки дисперсии ошибки:

$$\overline{D}_{e \min}^{(n)} = C_n D_n^{1/2n+1} R^{2n/2n+1}, \quad C_n = (2n+1) \left(\frac{2n-1}{4n^2 \sin(\pi/2n)} \right)^{2n/2n+1}. \quad (8)$$

Для анализа эффективности предлагаемого подхода можно провести сопоставление полученных результатов с решениями задач робастной фильтрации, найденными путем параметрической оптимизации фильтров с учетом требований устойчивости.

В работе [8], в частности, аналитически получены выражения для передаточных функций фильтров первого и второго порядков (для фильтра третьего порядка аналитическое решение громоздко, но также не вызывает особых сложностей). Любопытно отметить, что при ограничении на дисперсию первой производной решение задачи робастной фильтрации точно совпадает с решением, соответствующим МЛА. При этом фильтр представляет собой апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией

$$H(j\omega) = \frac{\rho}{\rho + j\omega},$$

где $\rho = 1,587 (D_1/R)^{1/2}$.

При $n \geq 2$ решение в виде (4) будет отличаться от точного решения задачи робастной фильтрации, однако потери в точности оказываются незначительными – верхняя оценка среднеквадратической ошибки фильтрации возрастает не более чем на 1 %.

Как следует из вышесказанного, пренебрегая указанными потерями в точности, можно констатировать, что в рассматриваемом случае алгоритмы МЛА могут трактоваться как алгоритмы робастной фильтрации.

Заметим также, что в тех случаях, когда заданы ограничения на дисперсии нескольких производных, можно выделить наиболее существенные из них, сопоставляя значения $\overline{D}_{e \min}^{(n)}$, соответствующие разным n , и тем самым свести задачу фильтрации к рассмотренному выше случаю. В той же ситуации, когда имеет место также ограничение на дисперсию самого сигнала ($n = 0$), соответствующую ей оценку дисперсии ошибки фильтрации следует принять равной $\overline{D}_{e \min}^{(0)} = D_0$.

Расчетный пример

В качестве примера рассмотрим задачу оценивания текущей высоты полета по данным установленного на борту летательного аппарата высотомера с использованием информации о максимальных значениях дисперсий вертикальной скорости и вертикального ускорения аппарата. Предположим, что погрешность

измерений высоотомера имеет широкополосный характер, и в первом приближении ее можно описать белым шумом с интенсивностью $R = 10 \text{ м}^2/\text{с}$. Будем также полагать, что дисперсия вертикальной скорости аппарата ограничена величиной $D_1 = 100 \text{ м}^2/\text{с}^2$, а дисперсия ускорения – величиной $D_2 = 1 \text{ м}^2/\text{с}^4$.

Прежде всего, определим, насколько существенным является каждое из двух наложенных ограничений. По формуле (8) найдем:

при $n = 1$

$$\bar{D}_{\text{emin}}^{(1)} = 1,191 D_1^{1/3} R^{2/3} = 25,6 \text{ м}^2;$$

при $n = 2$

$$\bar{D}_{\text{emin}}^{(2)} = 1,729 D_2^{1/5} R^{4/5} = 10,9 \text{ м}^2.$$

Видно, что учет дисперсии второй производной более эффективно позволяет решить задачу оценивания, в связи с чем первое из ограничений (D_1) можно считать несущественным. Действительно, при совместном учете обоих ограничений, руководствуясь работой [6], можно получить в результате численной оптимизации параметров фильтра второго порядка верхнюю оценку дисперсии ошибки $\bar{D}_{\text{emin}}^{(1,2)} = 10,6 \text{ м}^2$. При этом выигрыш в точности (по сопоставлению среднеквадратических ошибок) составляет лишь 1,5 %.

Таким образом, передаточная функция робастного фильтра будет иметь вид

$$H(j\omega) = \frac{\sqrt{2}\rho j\omega + \rho^2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}\rho j\omega + \rho^2},$$

где $\rho = 1,304 (D_2/R)^{1/6}$.

Следует отметить, что степень влияния того или иного ограничения во многом зависит от уровня погрешности измерений. Так, в рассмотренном примере при увеличении R соотношение $\bar{D}_{\text{emin}}^{(1)}/\bar{D}_{\text{emin}}^{(2)}$ будет уменьшаться, в связи с чем для получения показателей качества фильтрации, близких к оптимальным, может потребоваться учет обоих ограничений. Очевидно, можно также привести пример, когда несущественным окажется ограничение на дисперсию первой производной сигнала.

Заключение

В работе показана эффективность применения алгоритмов, вытекающих из метода локальных аппроксимаций спектральных плотностей при синтезе алгоритма робастной фильтрации в случае ограничений на дисперсию производной полезного сигнала заданного порядка n . Несмотря на то, что передаточная функция фильтра при этом определяется путем решения задачи, отличающейся по постановке от исходной, потери в точности при оптимизации незначительны. Отмечается, что с точностью до указанных потерь алгоритмы МЛА могут трактоваться как алгоритмы робастной фильтрации. Полученный результат создает предпосылки для построения нестационарных алгоритмов фильтрации калмановского типа, обладающих гарантирующими свойствами по точности.

Кроме того, в случаях, когда заданы ограничения на дисперсии нескольких производных, можно выделить наиболее существенные из них, сопоставляя значения оценок дисперсии ошибки фильтрации, полученные при учете того или иного ограничения.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 12-08-00835-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челпанов, И.Б.** Расчет характеристик навигационных приборов / И.Б. Челпанов, Л.П. Нессенюк, М.В. Брагинский. – Л.: Судостроение, 1978. – 264 с.
2. **Челпанов, И.Б.** Опыт и перспективы использования алгоритмов стационарной фильтрации в задачах навигации / И.Б. Челпанов, О.А. Степанов, А.В. Лопарев // Гироскопия и навигация. – 2010. № 4. – С. 88-89.
3. **Лопарев, А.В.** Использование частотного подхода при синтезе нестационарных алгоритмов обработки навигационной информации / А.В. Лопарев, О.А. Степанов, И.Б. Челпанов // Гироскопия и навигация. – 2011, №3. – С. 115-132.
4. **Степанов, О.А.** Использование частотно-временного подхода при решении задач обработки навигационной информации / О.А. Степанов, И.Б. Челпанов, А.В. Лопарев // Материалы пленарного заседания 5-й Российской мультikonференции по проблемам управления. – СПб, 2012. – С. 64-80.
5. **Степанов, О.А.**, Vasilyev V.A., and A.S. Dolnakova Cramer-Rao Lower Bound for Parameters of Random Processes in Navigation Data Processing // Proceeding of 21st Mediterranean Conference on Control & Automation. Platanias-Chania, Crete, Greece, June 25-28, 2013, pp.1214-1221.
6. **Кулакова, В.И.** Гарантированное оценивание сигналов с ограниченными дисперсиями производных / В.И. Кулакова, А.В. Небылов // Автоматика и телемеханика, №1, 2008. – С. 83-96.
7. **Бесекерский, В.А.** Робастные системы автоматического управления / В.А. Бесекерский, А.В. Небылов. М.: Наука, 1983. – 240 с.
8. **Небылов, А.В.** Гарантирование точности управления / А.В. Небылов. М.: Наука-Физматлит, 1998. – 304 с.
9. **Кулакова, В.И.** Применение H_2/H_∞ подхода в задаче авиационной гравиметрии / В.И. Кулакова, А.В. Небылов, О.А. Степанов // Гироскопия и навигация. – 2008, №2. – С. 53-62.

Abstract. The feasibility of the method of local PSD approximations applied to robust filtering problems with bounded variances of signal derivatives is considered. An approximate approach to robust filter design is suggested. The filter adjustment is based on the assumption that the signal is formed as n -times integrated white noise. It is pointed out that the upper estimate of the root-mean-square filtering error increases by no more than 1% as compared with the exact solution of robust filtering problem. An example is given to illustrate the effectiveness of the solution proposed.

Key words: PSD local approximation, robust filtering

Материал поступил 4.09.13