

ОЦЕНКИ КВАНТОВЫХ ПРЕДЕЛОВ ТОЧНОСТИ БИНС НА ОСНОВЕ СТРОГИХ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК

Представлен вывод строгих уравнений ошибок БИНС, в т. ч. с учетом неидеальности бортовой шкалы времени. Комментируются особенности поведения БИНС, не замеченные ранее при использовании приближенных уравнений ошибок ИНС в вариациях. Впервые предложено использовать уравнения ошибок не только для анализа точности, но и для повышения точности БИНС. Приведены оценки ограничения точности БИНС квантовыми шумами гироскопов на эффекте Саньяка – ЛГ, ВОГ и атомных интерферометров на волнах де Бройля [1].

*100-летию академиков АН СССР В.И. Кузнецова и А.Ю. Ишлинского,
100-летию эксперимента Саньяка и 50-летию лазерной гироскопии
посвящается*

Введение

В связи с разработками гироскопов и акселерометров на основе атомных интерферометров (АИ) на волнах де Бройля [2] и перспективой создания на АИ автономных (без спутниковой коррекции) БИНС с точностью 1 м/ч [3] возникла новая волна интереса к автономной инерциальной навигации.

Начиная с малоизвестной работы 1950 года [7], в которой впервые были опубликованы приближенные уравнения ошибок ИНС для 3D-навигации, во всех последующих публикациях до настоящего времени анализ точности ИНС основан на приближенных уравнениях ошибок, – уравнениях в вариациях [3, 8-11]. Такой уровень строгости не только не адекватен корректному анализу ошибок ИНС с точностью ~1 м/ч, но и приводит к ошибочным оценкам точности ИНС более грубых классов точности, что было доказано на примере БИНС на ЛГ [5].

В статье представлено развитие концепции вывода строгих уравнений ошибок БИНС [1, 5, 6, 12] с учетом неидеальности шкалы времени и предложено использовать уравнения ошибок не только для анализа точности, но и для повышения точности БИНС. Приведены оценки ограничения точности БИНС квантовыми шумами гироскопов на эффекте Саньяка.

1. Основные понятия, уравнения и обозначения

В основе теории инерциальной навигации лежат:

- 1) динамическое уравнение движения точки в инерциальной системе координат

$$\ddot{\vec{R}}(t) = \ddot{\vec{a}}(t) + \nabla \vec{f}(\vec{R}(t), t); \quad \dot{\vec{R}}(t) = \vec{V}(t); \quad \vec{R}(t=0) = \vec{R}_0; \quad \vec{V}(t=0) = \vec{V}_0; \quad (1.1)$$

Кробка Николай Иванович. Кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник НИИ прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова (филиал ФГУП «ЦЭНКИ, Москва). Действительный член Международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

Статья по докладу на XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам.

2) кинематическое уравнение вращения твердого тела вокруг точки

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t); \quad \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0; \quad (1.2)$$

3) возможность измерять абсолютную угловую скорость $\vec{\omega}(t)$ и кажущееся ускорение

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{R}}(t) - \nabla \vec{F}(\vec{R}(t), t); \quad \nabla \vec{F}(\vec{R}(t), t) \equiv \vec{F}(\vec{R}(t), t) - \vec{F}(\vec{0}, t); \quad \vec{F}(\vec{R}(t), t) = \vec{g}(\vec{R}(t), t) + \vec{G}(\vec{R}(t), t).$$

Здесь $\vec{R}(t)$ – радиус-вектор точки объекта (чувствительного элемента трехосного акселерометра) в системе координат, начало которой определено условием $\vec{g}(\vec{0}, t) = \vec{0}$ (гравитационный центр Земли); ускорение $\vec{g}(\vec{R}(t), t)$ обусловлено тяготением Земли, $\vec{G}(\vec{R}(t), t)$ – ускорение обусловленное тяготением всех остальных (кроме Земли) масс; $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор точки объекта с началом в чувствительном элементе трехосного акселерометра.

Далее используется матричный формализм и декартовы системы координат с началами в гравитационном центре Земли с тремя базисами: связанным с объектом $E \equiv E(t)$, инерциальным I и земным $Z \equiv Z(t)$ (связанным с вращающейся Землей, $\vec{\omega}_\infty = \vec{\omega}_\infty(t)$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения Земли):

$E \equiv E(t) = \{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$; $Z \equiv Z(t) = \{\vec{z}_1(t), \vec{z}_2(t), \vec{z}_3(t)\}$; $E(t)|_{t=0} = Z(t)|_{t=0} = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\} = I$. Вектор $\vec{x}(t)$ представляется в базисах I, E, Z (символ $(\dots)^T$ – транспонирование):

$$\vec{x}(t) = \sum_{p=1}^3 x_p(t) \vec{i}_p = \sum_{q=1}^3 x'_q(t) \vec{e}_q = \sum_{s=1}^3 x''_s(t) \vec{z}_s \rightarrow \bar{x}_I(t) \equiv \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}; \quad \bar{x}_E(t) \equiv \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}; \quad \bar{x}_Z(t) \equiv \begin{pmatrix} x''_1(t) \\ x''_2(t) \\ x''_3(t) \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}_E(t) = A(t) \bar{x}_I(t) \Leftrightarrow \bar{x}_I(t) = A^{-1}(t) \bar{x}_E(t); \quad A(t) = \|\langle \vec{e}_m(t) \cdot \vec{i}_n \rangle\|; \quad A^{-1}(t) = A^T(t) = \|\langle \vec{i}_m \cdot \vec{e}_n(t) \rangle\| = B(t);$$

$$\bar{x}_Z(t) = C(t) \bar{x}_I(t) \Leftrightarrow \bar{x}_I(t) = C^{-1}(t) \bar{x}_Z(t); \quad C(t) = \|\langle \vec{z}_m(t) \cdot \vec{i}_n \rangle\|; \quad C^{-1}(t) = C^T(t) = \|\langle \vec{i}_m \cdot \vec{z}_n(t) \rangle\| = D(t).$$

Кинематические уравнения для матриц A и B имеют известный вид [13]:

$$\dot{A} = -\Omega(\vec{\omega}_E)A \Leftrightarrow \dot{B} = B\Omega(\vec{\omega}_E); \quad \dot{A} = -A\Omega(\vec{\omega}_I) \Leftrightarrow \dot{B} = \Omega(\vec{\omega}_I)B; \quad A|_{t=0} = A_0; \quad B|_{t=0} = B_0; \quad (1.3)$$

$$\Omega(\vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad I_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (1.1) и (1.2) в матричном формализме:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{R}}_I(t) = B(t) \vec{a}_E(t) + \nabla \vec{F}_I(\vec{R}_I(t), t); \quad \dot{\vec{R}}_I(t) = \vec{V}_I(t); \quad \vec{R}_I(t=0) = \vec{R}_{0I}; \quad \vec{V}_I(t=0) = \vec{V}_{0I}; \\ \dot{B}(t) = B(t) \Omega(\vec{\omega}_E(t)); \quad B(t=0) = B_0; \end{cases} \quad (1.4)$$

в терминах информационного массива:

$$\{\vec{a}_E(t), \vec{\omega}_E(t); \vec{F}_Z(\vec{R}_Z(t), t), C(t), t; \vec{R}_{0I}, \vec{V}_{0I}, B_0\}; \quad \vec{F}_I(\vec{R}_I(t), t) = D(t) \vec{F}_Z(C(t) \vec{R}_I(t), t). \quad (1.5)$$

Вывод строгих уравнений ошибок БИНС основан на структурной идентичности невозмущенных (1.4) и возмущенных уравнений движения

$$\begin{cases} \ddot{\vec{R}}_{*I}(t_*) = B_*(t_*) \vec{a}_{*E}(t_*) + \nabla \vec{F}_{*I}(\vec{R}_{*I}(t_*), t_*); \quad \dot{\vec{R}}_{*I}(t_*) = \vec{V}_{*I}(t_*); \quad \vec{R}_{*I}(t_* = 0) = \vec{R}_{*0I}; \quad \vec{V}_{*I}(t_* = 0) = \vec{V}_{*0I}; \\ d[B_*(t_*)]/dt_* = B_*(t_*) \Omega(\vec{\omega}_{*E}(t_*)); \quad B_*(t_* = 0) = B_{*0}, \end{cases} \quad (1.6)$$

интегрируемых в БИНС с учетом возмущенного информационного массива:

$$\{\vec{a}_{*E}(t_*), \vec{\omega}_{*E}(t_*); \vec{F}_{*Z}(\vec{R}_{*Z}(t_*), t_*), C_*(t_*), t_*; \vec{R}_{*0I}, \vec{V}_{*0I}, B_{*0}\} \quad (1.7)$$

Здесь $\dot{x}(t, t_*) \equiv dx(t, t_*)/dt$; $\ddot{x}(t, t_*) \equiv d^2x(t, t_*)/dt^2$; $\dot{x}^* \equiv dx(t, t_*)/dt_*$; $\ddot{x}^* \equiv d^2x(t, t_*)/dt_*^2$.

Абсолютное время t в (1.4) и «бортовое» время t_* в (1.6) различны.

2. Строгие уравнения ошибок БИНС

Теорема 1. В общем случае произвольного движения и вращения объекта при использовании в БИНС произвольных моделей вращения Земли и гравитационного ускорения система строгих уравнений ошибок автономных БИНС в инерциальной системе координат в предположении идеальной шкалы времени ($t_* = t$) имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\bar{R}}_I(t) + \bar{\Gamma}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) - \bar{\Gamma}_{*I}(\Delta \bar{R}_I(t) + \bar{R}_I(t), t) = \bar{f}(t); \Delta \bar{R}_I(t=0) = \delta \bar{R}_{0I}; \Delta \dot{\bar{R}}_I(t=0) = \delta \bar{V}_{0I}; \\ \Delta \dot{A}(t) = -\Delta A(t)\Omega(\Delta \bar{\omega}_I(t)); \Delta A(t)|_{t=0} = \delta A_0; \Delta \bar{\omega}_I(t) = -B(t)\delta \bar{\omega}_E(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\bar{f}(t) \equiv [\Delta A(t) - I_0]B(t)\bar{a}_E(t) + \Delta A(t)B(t)\delta \bar{a}_E(t) + \nabla \bar{\Gamma}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) - \nabla \bar{\Gamma}_I(\bar{R}_I(t), t), \quad (2.2)$$

где $\Delta \bar{R}_I(t)$, $\Delta \bar{V}_I(t)$ и $\Delta A(t)$ – ошибки местоположения, скорости и ориентации:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{R}_I(t) &\equiv \bar{R}_{*I}(t) - \bar{R}_I(t); \Delta \bar{V}_I(t) \equiv \bar{V}_{*I}(t) - \bar{V}_I(t); \bar{V}_{*I}(t) = \dot{\bar{R}}_{*I}(t); \bar{V}_I(t) = \dot{\bar{R}}_I(t); \Delta A(t) \equiv B_*(t)A(t), \\ \delta \bar{a}_E(t) &\equiv \bar{a}_{*E}(t) - \bar{a}_E(t), \delta \bar{\omega}_E(t) \equiv \bar{\omega}_{*E}(t) - \bar{\omega}_E(t) \text{ и } \delta \bar{\Gamma}_Z(\bar{R}_Z(t), t) = \bar{\Gamma}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t) - \bar{\Gamma}_Z(\bar{R}_Z(t), t) - \\ &\text{ошибки акселерометров, гироскопов и моделирования гравитационного ускорения.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ошибка определения местоположения в земной системе координат имеет вид

$$\Delta \bar{R}_Z(t) \equiv \bar{R}_{*Z}(t) - \bar{R}_Z(t) = C_*(t)\bar{R}_{*I}(t) - C(t)\bar{R}_I(t) = C_*(t)\Delta \bar{R}_I(t) + \delta C(t)\bar{R}_I(t); \delta C(t) \equiv C_*(t) - C(t), \quad (2.4)$$

где $C_*(t)$ – используемая в конкретном алгоритме БИНС модель вращения Земли.

Частные случаи уравнений ошибок для конкретных моделей гравитационного ускорения и вращения Земли, используемых в конкретных алгоритмах БИНС, получаются из (2.1) подстановкой конкретных функций $\bar{\Gamma}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t)$ и $C_*(t)$.

Выражения (2.1) связывают все входные $\delta x(t)$ и выходные возмущения $\Delta x(t)$ без предположений малости входных и выходных возмущений

$$\{\delta \bar{a}_E(t); \delta \bar{\omega}_E(t); \delta \bar{\Gamma}_Z(\bar{R}_Z(t), t); \delta C(t); \delta \bar{R}_{0I}; \delta \bar{V}_{0I}; \delta A_0\} \Rightarrow \{\Delta \bar{R}_I(t); \Delta \bar{V}_I(t); \Delta A(t)\}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Ошибка определения местоположения объекта $\Delta \bar{R}_I(t)$ – это разность возмущенного (1.6) и действительного (1.4) движений. Ошибка ориентации $\Delta A(t)$ соответствует вращению образа инерциального базиса $I_*(t) = \{\bar{i}_{*1}(t), \bar{i}_{*2}(t), \bar{i}_{*3}(t)\}$

$$\begin{array}{ccc} I & \bar{\omega}(t) & I & A(t) \\ & \searrow & & \searrow \\ \Delta \bar{\omega}(t) & \downarrow & E(t) \Leftrightarrow \Delta A(t) & \downarrow & E(t); & \Delta \bar{\omega}_I(t) = -B(t)\delta \bar{\omega}_E(t); \\ & \nearrow & & \nearrow & \Delta \bar{\omega}_{I_*(t)}(t) = -B_*(t)\delta \bar{\omega}_E(t). \\ I_*(t) & \bar{\omega}_*(t) & I_*(t) & A_*(t) \end{array} \quad (2.6)$$

Кинематические уравнения ошибок БИНС с учетом (2.6), (1.3) принимают вид

$$\Delta \dot{A}(t) = -\Delta A(t)\Omega(\Delta \bar{\omega}_I(t)) \Leftrightarrow \Delta \dot{A}(t) = -\Omega(\Delta \bar{\omega}_{I_*(t)}(t))\Delta A(t); \Delta A(t)|_{t=0} = \delta A_0. \quad (2.7)$$

Первая из двух равносильных форм (2.7) используется в (2.1).

С учетом (2.3), (1.4), (1.6), (2.7) получаем (2.1). ■

Теорема 2. В общем случае произвольного движения и вращения объекта при использовании в БИНС произвольных моделей вращения Земли и гравитационного ускорения строгие уравнения ошибок БИНС в инерциальной системе координат для произвольной неидеальной бортовой шкалы времени ($t_* \neq t$) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Delta \bar{R}}_I(t, t_*) = [B_*(t_*)\bar{a}_{*E}(t_*) + \nabla \bar{F}_{*I}(\bar{R}_{*I}(t_*), t_*)](dt_*/dt)^2 - [B(t)\bar{a}_E(t) + \nabla \bar{F}_I(\bar{R}_I(t), t)] + \bar{R}_{*I}(t_*)(d^2t_*/dt^2); \\ \Delta \dot{\bar{R}}_I(t, t_*) = \bar{R}_{*I}(t_*)(dt_*/dt) - \dot{\bar{R}}_I(t); \quad \Delta \bar{R}_I(t, t_*)|_{t=0} = \delta \bar{R}_{0I}; \quad \Delta \dot{\bar{R}}_I(t, t_*)|_{t=0} = \delta \bar{V}_{0I}; \\ \Delta \dot{A}(t, t_*) = -\Delta A(t, t_*)\Omega(\Delta \bar{\omega}_I(t, t_*)); \quad \Delta A(t, t_*)|_{t=0} = \delta A_0; \quad \Delta \bar{\omega}_I(t, t_*) \equiv -B(t)[\bar{\omega}_{*E}(t_*)(dt_*/dt) - \bar{\omega}_E(t)]; \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Delta \bar{R}}_I(t, t_*) = [B_*(t_*)\bar{a}_{*E}(t_*) + \nabla \bar{F}_{*I}(\bar{R}_{*I}(t_*), t_*)] - [B(t)\bar{a}_E(t) + \nabla \bar{F}_I(\bar{R}_I(t), t)](dt/dt_*)^2 - \dot{\bar{R}}_I(t)(d^2t/dt_*^2); \\ \Delta \bar{R}_I(t, t_*) = \bar{R}_{*I}(t_*) - \bar{R}_I(t)(dt/dt_*); \quad \Delta \bar{R}_I(t, t_*) = 0 = \delta \bar{R}_{0I}; \quad \Delta \dot{\bar{R}}_I(t, t_*) = 0 = \delta \bar{V}_{0I}; \\ \Delta A(t, t_*) = -\Omega(\Delta \bar{\omega}_{I*}(t, t_*))\Delta A(t, t_*); \quad \Delta A(t, t_*)|_{t=0} = \delta A_0; \quad \Delta \bar{\omega}_{I*}(t, t_*) \equiv -B_*(t_*)[\bar{\omega}_{*E}(t_*) - \bar{\omega}_E(t)(dt/dt_*)]. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Доказательство. С учетом неидеальной шкалы времени ($t_* \neq t$) при решении уравнений (1.6) погрешности БИНС являются функциями двух аргументов: t и t_*

$$\Delta \bar{R}_I(t, t_*) \equiv \bar{R}_{*I}(t_*) - \bar{R}_I(t); \quad \Delta A(t, t_*) = \|(\vec{i}_m(t_*) \cdot \vec{i}_n)\| = B_*(t_*)A(t). \quad (2.10)$$

Дифференцируя $\Delta \bar{R}_I(t, t_*)$ по dt и по dt_* , с учетом (1.4), (1.6) получаем динамические уравнения ошибок (2.8) и (2.9). Дифференцируя $\Delta A \equiv \Delta A(t, t_*)$ по dt и по dt_* , с учетом (1.4), (1.6) получаем кинематические уравнения ошибок:

$$\Delta \dot{A} = -\Delta A\Omega(\Delta \bar{\omega}_I(t, t_*)); \quad \Delta \bar{\omega}_I(t, t_*) \equiv -B(t)[\bar{\omega}_{*E}(t_*)(dt_*/dt) - \bar{\omega}_E(t)]; \quad \Delta A(t, t_*)|_{t=0} = \delta A_0; \quad (2.11)$$

$$\Delta A = -\Delta A\Omega(\Delta \bar{\omega}_{I*}(t, t_*)); \quad \Delta \bar{\omega}_{I*}(t, t_*) \equiv -B(t)[\bar{\omega}_{*E}(t_*) - \bar{\omega}_E(t)(dt/dt_*)]; \quad \Delta A(t, t_*)|_{t=0} = \delta A_0. \quad (2.12)$$

В (2.8) используем (2.11), в (2.9) используем (2.12). ■

Теорема 3. Для произвольного движения и вращения, произвольных моделей гравитационного ускорения и вращения Земли, произвольных погрешностей гироскопов и акселерометров парциальный вклад неидеальности шкалы времени $\nabla \bar{R}_I(t, t_*) = \Delta \bar{R}_I(t, t_*) - \bar{R}_I(t)$ в ошибку местоположения описывается уравнениями:

$$\ddot{\nabla \bar{R}}_I(t, t_*) = \bar{R}_{*I}(t_*)(dt_*/dt)^2 - \ddot{\bar{R}}_{*I}(t) + \bar{R}_{*I}(t_*)(d^2t_*/dt^2); \quad \nabla \bar{R}_I(t = 0, t_*) = \bar{0}; \quad \nabla \dot{\bar{R}}_I(t = 0, t_*) = \bar{0}; \quad (2.13)$$

$$\nabla \dot{\bar{R}}_I(t, t_*) = \bar{R}_{*I}(t_*) - \ddot{\bar{R}}_{*I}(t)(dt/dt_*)^2 - \bar{R}_{*I}(t_*)(d^2t/dt_*^2); \quad \nabla \bar{R}_I(t, t_*) = 0 = \bar{0}; \quad \nabla \dot{\bar{R}}_I(t, t_*) = 0 = \bar{0}. \quad (2.14)$$

Доказательство. Дважды дифференцируя $\nabla \bar{R}_I(t, t_*)$ по dt , получаем (2.13). Аналогично дифференцируя $\nabla \bar{R}_I(t, t_*)$ по dt_* , получаем (2.14). ■

Теорема 4. Для произвольного вращения и произвольных погрешностей гироскопов парциальный вклад неидеальности бортовой шкалы времени в ошибку ориентации $\nabla A(t, t_*) = \Delta A(t, t_*)\Delta B(t) = B_*(t_*)A_*(t)$ описывается уравнениями:

$$\nabla \dot{A}(t, t_*) = -\nabla A(t, t_*)\Omega(\nabla \bar{\omega}_{I*}(t)); \quad \nabla A(t, t_*)|_{t=0} = I_0; \quad \nabla \bar{\omega}_{I*}(t) \equiv -B_*(t)[\bar{\omega}_{*E}(t_*)(dt_*/dt) - \bar{\omega}_{*E}(t)]; \quad (2.15)$$

$$\nabla A(t, t_*) = -\nabla A(t, t_*)\Omega(\nabla \bar{\omega}_{I*}(t)); \quad \nabla A(t, t_*)|_{t=0} = I_0; \quad \nabla \bar{\omega}_{I*}(t) \equiv -B_*(t)[\bar{\omega}_{*E}(t_*) - \bar{\omega}_{*E}(t)(dt/dt_*)]. \quad (2.16)$$

Доказательство. Парциальный вклад $\nabla A(t, t_*)$ неидеальности шкалы времени в ошибку ориентации БИНС – это вращение базиса $I_*(t_*)$ относительно базиса $I_*(t)$

$$I_*(t) \rightarrow I_*(t_*). \quad (2.17)$$

Дифференцируя $\nabla A(t, t_*)$ по dt и по dt_* , получаем (2.15) и (2.16). ¹⁾ ■

¹⁾ Современные возможности обеспечения стабильности времени составляют 10^{-15} - 10^{-16} , а в ближайшей перспективе достигнут 10^{-17} - 10^{-18} [14], что превосходит потребности большинства задач инерциальной навигации. Но на практике используются менее точные шкалы времени. Целесообразно, очевидно, выбирать бортовую шкалу времени такой, чтобы вклад флуктуаций шкалы времени в ошибки БИНС не превосходил вклады иных источников возмущений. Результаты исследования влияния флуктуаций шкал времени с учетом первых и вторых производных их шумов на точность ИНС – предмет отдельной публикации. Далее время t и время t_* отождествляются.

Теорема 5. В общем случае произвольного движения и вращения объекта при использовании в БИНС моделей гравитационного ускорения, обусловленного тяготением только Земли ($\bar{G}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t) = \bar{0}$), строгие динамические уравнения ошибок имеют вид:

$$\Delta \ddot{\bar{R}}_I(t) + \bar{g}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) - \bar{g}_{*I}([\Delta \bar{R}_I(t) + \bar{R}_I(t)], t) = \bar{f}(t); \Delta \bar{R}_I(t)|_{t=0} = \delta \bar{R}_{0I}; \Delta \dot{\bar{R}}_I(t)|_{t=0} = \delta \bar{V}_{0I}; (2.18)$$

$$\bar{f}(t) \equiv \Delta \bar{a}_I(t) + \delta \bar{f}_I(\bar{R}_I(t), t) - \delta \bar{f}_I(\bar{0}, t); \delta \bar{f}_I(\bar{R}_I(t), t) = \bar{g}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) - \bar{f}_I(\bar{R}_I(t), t).$$

Доказательство следует из (2.1), (2.2) с учетом выбора модели $\bar{f}_{*I}(\bar{R}_I(t), t)$. ²⁾ ■

Теорема 6. При использовании в БИНС центрально-симметричной модели гравитационного ускорения ($v_s(R(t))$ – частота Шулера)

$$\bar{g}_{*I}(\bar{R}_I(t)) = -v_s^2(R(t))\bar{R}_I(t); v_s^2(R(t)) = g(R(t))/R(t); R(t) = [\bar{R}_I^T(t)\bar{R}_I(t)]^{1/2} (2.19)$$

в 2D-алгоритме БИНС строгое динамическое уравнение ошибок интегрируется в квадратурах для произвольного движения объекта по сфере произвольного постоянного радиуса R_0 и произвольного вращения объекта

$$\Delta \bar{R}_I(t) = \delta \bar{R}_{0I} \cos v_s t + \frac{1}{v_s} \delta \bar{V}_{0I} \sin v_s t + \frac{1}{v_s} \int_0^t \sin v_s(t - \tau) \bar{f}_I(\tau) d\tau; v_s \equiv v_s(R_0), (2.20)$$

где $\bar{f}_I(t)$ – источник возмущения, получаемый из $\bar{f}(t)$ (2.2) выбором модели (2.19).

Доказательство. При использовании внешней информации о модуле $R_*(t)$ для формирования модели (2.19) уравнение (2.18) для произвольного 3D-движения объекта ($\delta h(t)$ – ошибка альтиметра/глубиномера: $R_*(t) = R(t) + \delta h(t)$) принимает вид

$$\Delta \ddot{\bar{R}}_I(t) + v_s^2(R(t))(1 + \delta h(t)/R(t))^{-3} \Delta \bar{R}_I(t) = \bar{f}_I(t) + v_s^2(R(t))[1 - (1 + \delta h(t)/R(t))^{-3}] \bar{R}_I(t). (2.21)$$

В общем случае произвольного движения по сфере произвольного постоянного радиуса R_0 в алгоритме БИНС можно использовать априорную связь $R_* = R_0$ для формирования модели (2.19). При этом (2.18) трансформируется к виду

$$\Delta \ddot{\bar{R}}_I(t) + v_s^2(R_0) \Delta \bar{R}_I(t) = \bar{f}_I(t) (2.22)$$

и интегрируется для произвольного движения по сфере радиуса R_0 (2.20). ³⁾ ■

²⁾ Решения динамических уравнений ошибок позволяют анализировать вклады всех источников возмущения в ошибку БИНС $\Delta \bar{R}_I(t) = \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \delta \bar{a}_E(t); \delta \bar{\omega}_E(t); \delta \bar{f}_Z(\bar{R}_Z(t), t); \delta C(t); \delta \bar{R}_{0I}; \delta \bar{V}_{0I}; \delta A_0; t)$. Целесообразно, очевидно, использовать такие акселерометры, гироскопы, модели гравитационных полей и вращения Земли, процедуры начальной выставки, для которых парциальный вклад источников возмущения «сбалансирован»

$\Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \delta \bar{a}_E(t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; t) \approx \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \delta \bar{\omega}_E(t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; t) \approx \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \bar{0}; \delta \bar{f}_Z(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; t) \approx \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \delta C(t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; t) \approx \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \delta \bar{R}_{0I}; \bar{0}; \bar{0}; t) \approx \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \delta \bar{V}_{0I}; \bar{0}; t) \approx \Delta \bar{R}_I(\bar{f}_{*Z}(\bar{R}_Z(t), t); \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \bar{0}; \delta A_0; t)$. Например, если точность акселерометров, используемых в конкретной разработке БИНС, превосходит величины $\nabla \bar{G}_I(\bar{R}_Z(t), t) = \bar{G}_I(\bar{R}_Z(t), t) - \bar{G}_I(\bar{0}, t)$ для полей тяготения иных (кроме Земли) масс, вклад этих масс целесообразно учитывать. Разность гравитационных ускорений у поверхности и в центре Земли, обусловленных Луной и Солнцем, составляет $3 \cdot 10^{-6}$ и $5 \cdot 10^{-7}$ м/с². Для минимизации вклада погрешности моделирования гравитационного ускорения в ошибку БИНС следует максимально приближать модель гравитационного ускорения к его действительному значению: $\bar{f}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) \rightarrow \bar{f}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) = D_*(t)[\bar{g}_{*Z}(C_*(t)\bar{R}_I(t), t) + \bar{G}_{*Z}(C_*(t)\bar{R}_I(t), t)]$;

$\bar{f}_{*I}(\bar{R}_I(t), t) - \bar{f}_I(\bar{R}_I(t), t) \rightarrow \bar{0}$ с учетом моделей вращения Земли, максимально приближенных к реальному: $C_*(t) \rightarrow C_*(t) \Rightarrow C_*(t) - C(t) \equiv \delta C(t) \rightarrow \bar{0}$.

³⁾ С 1950 года [7] известен результат, полученный на основе приближенных уравнений ошибок, состоящий в том, что темп роста ошибки автономной ИНС по вертикальному каналу для модели (2.19) – экспоненциальный. Можно показать, что свойства строгого уравнения ошибок и приближенного уравнения (уравнения в вариациях) различаются: темп роста решения строгого уравнения ошибок (2.18) не превосходит квадратичный [17].

Теорема 7. При использовании в БИНС модели гравитационного ускорения [15]

$$\bar{g}_{*I}(\bar{R}_I(t)) = -P(\bar{R}_I(t))\bar{R}_I(t); \quad P(\bar{R}_I(t)) \equiv \begin{pmatrix} P_1(\bar{R}_I(t)) & 0 & 0 \\ 0 & P_2(\bar{R}_I(t)) & 0 \\ 0 & 0 & P_3(\bar{R}_I(t)) \end{pmatrix}; \quad \bar{R}_I(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}; \quad (2.23)$$

$$P_i(\bar{R}_I(t)) \equiv 2\pi\rho\gamma c_1 c_2 c_3 \int_{\chi}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^3 (1 + s/c_k^2)^{-1/2}}{(c_i^2 + s)} ds; \quad \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2(t)}{c_k^2 + \chi} = 1, \quad (2.24)$$

где ρ – плотность однородного трехосного эллипсоида с полуосями c_k , ($k = 1, 2, 3$); γ – гравитационная постоянная; χ – положительный корень уравнения (2.24)) в 2D-алгоритме БИНС строгое динамическое уравнение ошибок интегрируется в квадратурах в общем случае произвольного вращения и произвольного движения по поверхностям эллипсоидов, софокусных тяготеющему эллипсоиду (2.24)

$$\Delta\bar{R}_I(t) = \delta\bar{R}_{0I} \circ \begin{pmatrix} \cos v_1 t \\ \cos v_2 t \\ \cos v_3 t \end{pmatrix} + \delta\bar{V}_{0I} \circ \begin{pmatrix} v_1^{-1} \sin v_1 t \\ v_2^{-1} \sin v_2 t \\ v_3^{-1} \sin v_3 t \end{pmatrix} + \int_0^t \bar{f}_2(\tau) \circ \begin{pmatrix} v_1^{-1} \sin v_1(t - \tau) \\ v_2^{-1} \sin v_2(t - \tau) \\ v_3^{-1} \sin v_3(t - \tau) \end{pmatrix} d\tau; \quad v_i^2 \equiv P_i(\bar{R}_I(\chi_0)), \quad (2.25)$$

где $\bar{f}_2(t)$ – источник возмущения, получаемый из $\bar{f}(t)$ (2.2) выбором модели (2.23), (2.24), и введено обозначение: $(z_1 \ z_2 \ z_3)^T \circ (a \ b \ c)^T \equiv (z_1 a \ z_2 b \ z_3 c)^T$.

Доказательство. Зависимость $P_i(\bar{R}_I(t) + \Delta\bar{R}_I(t))$ от времени проявляется через параметр χ (2.24). При движении по поверхностям софокусных (2.24) эллипсоидов ($\chi = \chi_0 = \text{const}$) для формирования модели $\bar{g}_{*I}(\bar{R}_{*I}(t))$ можно использовать связь

$$\sum_{k=1}^3 [x_{*k}^2(t)/(c_k^2 + \chi_0)] = 1; \quad \bar{R}_{*I}(t) = (x_{*1}(t) \ x_{*2}(t) \ x_{*3}(t))^T; \quad \chi_0 = \text{const}, \quad (2.26)$$

при этом $P_i(\bar{R}_{*I}(t)) = P_i(\chi_0) = \text{const}$. Уравнение (2.18) трансформируется в линейное

$$\Delta\ddot{\bar{R}}_I(t) + \begin{pmatrix} P_1(\bar{R}_I(\chi_0)) & 0 & 0 \\ 0 & P_2(\bar{R}_I(\chi_0)) & 0 \\ 0 & 0 & P_3(\bar{R}_I(\chi_0)) \end{pmatrix} \Delta\bar{R}_I(t) = \bar{f}_2(t); \quad P_i(\bar{R}_I(\chi_0)) = \text{const} \quad (2.27)$$

с постоянными коэффициентами и интегрируется для произвольного 2D-движения по поверхностям (2.26) и произвольного вращения объекта (2.25). ■

Теорема 8. При использовании в 2D-алгоритмах БИНС моделей гравитационного ускорения, соответствующих однородным эллипсоидам вращения, строгие динамические уравнения ошибок БИНС интегрируются в квадратурах в общем случае произвольного движения по поверхностям эллипсоидов, софокусных тяготеющим эллипсоидам, при произвольном вращении объекта. Решения динамических уравнений ошибок имеют вид (2.25) при условии: $c_1 = c_2 \equiv c_{\perp}$; $c_3 = c_{\parallel}$.

Доказательство следует из (2.25) с учетом $c_1 = c_2 \equiv c_{\perp}$; $c_3 = c_{\parallel}$.⁴⁾ ■

Теорема 9. При использовании в БИНС модели гравитационного ускорения

⁴⁾ Колебания ошибок БИНС (2.25) происходят на трех разных частотах: v_i ($i = 1, 2, 3$). При трансформировании эллипсоида (2.24) в шар $c_1 = c_2 = c_3 = R_0$ три частоты v_i трансформируются в одну – частоту Шулера $v_1 = v_2 = v_3 = v_s(R_0)$, а решение (2.25) динамического уравнения ошибок трансформируется в (2.20).

$$\bar{g}_{*I}(\bar{R}_I(t)) = -Q(\bar{R}_I(t))\bar{R}_I(t); \quad Q(\bar{R}_I(t)) \equiv \begin{pmatrix} q_1(\bar{R}_I(t)) & 0 & 0 \\ 0 & q_2(\bar{R}_I(t)) & 0 \\ 0 & 0 & q_3(\bar{R}_I(t)) \end{pmatrix}; \quad \bar{R}_I(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

соответствующей потенциальному полю, в 2D-алгоритме БИНС при движении по произвольным эквипотенциальным поверхностям $M(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \text{const}$, на которых коэффициенты $q_i(\bar{R}_I(t))$ имеют постоянные значения, можно использовать связь $M(x_{*1}(t), x_{*2}(t), x_{*3}(t)) = \text{const}_*$ для формирования модели (2.28). Строгие динамические уравнения ошибок интегрируются в квадратурах в общем случае произвольного движения по эквипотенциальным поверхностям при произвольном вращении объекта. Решения динамических уравнений ошибок имеют вид (2.25) при условии $v_i^2 = v_{iM}^2$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

Теорема 10. При использовании в 3D-алгоритме БИНС модели однородного гравитационного ускорения

$$\bar{g}_{*I}(\bar{R}_I(t)) = \bar{c} = \text{const} \quad (2.29)$$

строгое динамическое уравнение ошибок БИНС интегрируется в квадратурах для произвольного 3D-движения и произвольного вращения объекта

$$\Delta \bar{R}_I(t) = \delta \bar{R}_{0I} + \delta \bar{V}_{0I} \cdot t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \bar{f}_3(t_2) dt_2, \quad (2.30)$$

где $\bar{f}_3(t)$ – источник возмущения, получаемый из $\bar{f}(t)$ (2.2) выбором модели (2.29).

Доказательство. Для модели (2.29) в динамическом уравнении ошибок

$$\Delta \ddot{\bar{R}}_I(t) = \bar{f}_3(t); \quad \Delta \bar{R}_I(t)|_{t=0} = \delta \bar{R}_{0I}; \quad \Delta \dot{\bar{R}}_I(t)|_{t=0} = \delta \bar{V}_{0I} \quad (2.31)$$

нелинейность отсутствует для произвольного 3D-движения и вращения объекта. Решение уравнения (2.31) имеет, очевидно, вид (2.30). ■

Теорема 11. Вид нелинейности (по $\Delta \bar{R}_I(t)$) строгих динамических уравнений ошибок БИНС зависит не от действительного гравитационного ускорения $\bar{G}_I(\bar{R}_I(t), t)$, а от модели $\bar{G}_{*I}(\bar{R}_I(t), t)$, используемой в конкретном алгоритме БИНС.

Доказательство. В динамических уравнениях ошибок БИНС (2.1), (2.8), (2.9), (2.18) нелинейная зависимость от $\Delta \bar{R}_I(t)$ проявляется через одну и только через одну функцию $\bar{G}_{*I}([\Delta \bar{R}_I(t) + \bar{R}_I(t)], t)$ – модель гравитационного ускорения. ■

Решение строгих кинематических уравнений ошибок БИНС (2.1) в общем случае произвольного источника возмущения $\Delta \bar{\omega}_I(t)$ в квадратурах не известно. Представим это решение рядом последовательных приближений Пикара:

$$\Delta A = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta A_n; \quad \Delta A_0 = I_0; \quad \Delta A_{n+1} = - \int_0^t \Delta A_n(\tau) \Omega(\Delta \bar{\omega}_I(\tau)) d\tau. \quad (2.32)$$

Ряд Пикара сходится равномерно и абсолютно [20].

На основе ряда (2.32) с учетом представления

$$\Delta A^{\pm 1}(\Delta \bar{S}) = \exp(\mp \Omega(\Delta \bar{S})) = I_0 \mp \frac{\sin \Delta s}{\Delta s} \Omega(\Delta \bar{S}) + \frac{1 - \cos \Delta s}{(\Delta s)^2} \Omega^2(\Delta \bar{S}); \quad \Delta s = (\Delta \bar{S}^T \Delta \bar{S})^{1/2}; \quad (2.33)$$

$$\Delta \bar{S} \equiv \Delta \bar{S}(t)$$

вектор $\Delta \bar{S}$ и угол Δs погрешности ориентации БИНС можно представить рядом последовательных приближений (для удобства введен «малый» параметр $\varepsilon \equiv 1$):

$$\Delta \bar{S}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Delta \bar{S}_n(t); \quad \Delta s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Delta s_n(t); \quad \varepsilon \equiv 1; \quad \Delta \bar{\omega}_I(t) \equiv \varepsilon \Delta \bar{\omega}_I(t). \quad (2.34)$$

Сходимость ряда (2.32) гарантирует сходимость рядов (2.34).

В теории инерциальной навигации до настоящего времени используются приближенные кинематические уравнения ошибок в вариациях [3, 8–11], решения которых равносильны первому приближению решений (2.32) уравнений ошибок. Но ни из малости ошибок гироскопов, ни из малости ошибки ориентации БИНС не следует ограничиться первым приближением решения кинематических уравнений ошибок, поскольку вклад последующих приближений ($\sim \varepsilon^k$, $k \geq 2$) (2.34) может превосходить вклад первого приближения [12, 21].⁵⁾

3. Новый алгоритм «автономно корректируемой» БИНС

Рассмотрим алгоритм БИНС, в котором дополнительно к (1.6) интегрируются строгие уравнения ошибок (2.1) и используется точная связь:

$$\bar{R}_I(t) \equiv \bar{R}_{*I}(t) - \Delta \bar{R}_I(t), \quad (3.1)$$

при этом «штатный» алгоритм, вычисляющий $\bar{R}_{*I}(t)$, и динамические уравнения ошибок (2.1) считаются равноправными и одновременно интегрируются в БИНС, а в алгоритме (1.6) можно использовать любую модель гравитационного ускорения, так как неучтенная часть гравитационного ускорения учитывается в строгих уравнениях ошибок. Для пояснения алгоритма используем модель

$$\bar{g}_{*I}(\bar{R}(t), t) \rightarrow \bar{c} = \text{const}. \quad (3.2)$$

Возмущенное динамическое уравнение («штатный» алгоритм) и строгое динамическое уравнение ошибок принимают вид:

$$\ddot{\bar{R}}_{*I}(t) = B_*(t)\bar{a}_{*E}(t) + \bar{c} \equiv \bar{F}(t); \quad \bar{R}_{*I}(t=0) = \bar{R}_{*0I}; \quad \dot{\bar{R}}_{*I}(t=0) = \bar{V}_{*0I}; \quad (3.3)$$

$$\Delta \ddot{\bar{R}}_I(t) = \bar{f}_4(t); \quad \Delta \bar{V}_I(t) = \Delta \dot{\bar{R}}_I(t); \quad \Delta \bar{R}_I(t=0) = \delta \bar{R}_{0I}; \quad \Delta \dot{\bar{R}}_I(t=0) = \delta \bar{V}_{0I} \quad (3.4)$$

и интегрируются в квадратурах для произвольного 3D-движения объекта.

Формируем разность (3.1) решений уравнений (3.3) и (3.4) и получаем точное решение для действительной траектории объекта (1.4) в квадратурах:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{*I}(t) - \Delta \bar{R}_I(t) &= \bar{R}_{*0I} + \bar{V}_{*0I} \cdot t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \bar{F}(t_2) dt_2 - [\delta \bar{R}_{0I} + \delta \bar{V}_{0I} \cdot t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \bar{f}_4(t_2) dt_2] \\ &= \bar{R}_{0I} + \bar{V}_{0I} \cdot t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \{B(t_2)\bar{a}_E(t_2) + [\bar{F}_I(\bar{R}_I(t_2), t_2) - \bar{F}_I(\bar{0}, t_2)]\} dt_2 = \bar{R}_I(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представим $\Delta \bar{R}_I(t)$ суммой $\Delta \bar{R}_I(t) = \Delta \bar{R}_I^a(t) + \Delta \bar{R}_I^b(t)$ ($\Delta \bar{a}_I(t) \equiv B_*(t)\bar{a}_{*E}(t) - B(t)\bar{a}_E(t)$)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{R}_I^a(t) &\equiv \delta \bar{R}_{0I} + \delta \bar{V}_{0I} \cdot t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \Delta \bar{a}_I(t_2) dt_2; \\ \Delta \bar{R}_I^b(t) &\equiv \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \{\bar{c} - [\bar{F}_I(\bar{R}_I(t_2), t_2) - \bar{F}_I(\bar{0}, t_2)]\} dt_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Формируем оценку $\hat{\bar{R}}_I(t)$ действительной траектории $\bar{R}_I(t)$ объекта

$$\hat{\bar{R}}_I(t) = \bar{R}_{*I}(t) - \Delta \hat{\bar{R}}_I^a(t) - \Delta \hat{\bar{R}}_I^b(t). \quad (3.7)$$

⁵⁾ Еще одно заблуждение состоит в том, что из-за малости ошибки ориентации (2.34) можно ограничиться только первым приближением (2.33) $\Delta A^{\pm 1}(\Delta \bar{S}) \approx I_0 \mp \Omega(\Delta \bar{S})$. Но вклад неучитываемых членов разложения (2.33) может превосходить вклад первого приближения в ошибку определения местоположения. Например, при погрешности ориентации вида $\Delta \bar{S}(t) = \bar{c} \mu \sin v^* t$; $\bar{c}^T \bar{c} = 1$; $\mu = \text{const} \ll 1$ происходит линейный во времени рост ошибки (2.20) не только на частоте Шулера ($v^* = v_s$), но и на любых ее субгармониках ($v^* = v_s / k$; $k = \pm 2, \pm 3, \dots$) [12]. Учесть эти эффекты k -го порядка можно только с учетом k -го (по малому параметру (2.34)) члена разложения (2.33).

Для построения оценки $\Delta\hat{R}_I^a(t)$ можно использовать любые методы оценивания и фильтрации. Для построения оценки $\Delta\hat{R}_I^b(t)$ гравитационное ускорение заменяем его «наилучшей» моделью, а траекторию объекта заменяем на ее оценку:

$$\bar{F}_I[\bar{R}_I(t), t] \rightarrow \bar{F}_{*I}[\bar{R}_I(t), t], \quad \Delta\hat{R}_I^b(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \{\bar{c} - \{\bar{F}_{*I}[\hat{R}_I(t_2), t_2] - \bar{F}_{*I}(\bar{0}, t_2)\}\} dt_2. \quad (3.8)$$

Теорема 12. *Погрешность определения местоположения $\nabla\bar{R}_I(t)$ посредством автономно корректируемой БИНС в общем случае произвольного вращения и 3D-движения объекта при использовании в алгоритме БИНС однородной модели гравитационного ускорения возрастает во времени следующим образом:*

$$\nabla\bar{R}_I(t) = \{\delta\bar{R}_{0I} + \delta\bar{V}_{0I} \cdot t + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \Delta\bar{a}_I(t_2) dt_2 - \Delta\hat{R}_I^a(t)\} + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \{\nabla\bar{F}_I(\bar{R}_I(t_2), t_2) - \nabla\bar{F}_{*I}(\hat{R}_I(t_2), t_2)\} dt_2. \quad (3.9)$$

Доказательство. В соответствии с алгоритмом (3.7) имеем

$$\hat{R}_I(t) = \bar{R}_{*I}(t) - \Delta\hat{R}_I^a(t) - \Delta\hat{R}_I^b(t) = \bar{R}_I(t) + \nabla\bar{R}_I(t), \quad (3.10)$$

где $\nabla\bar{R}_I(t)$ – результирующая ошибка. С учетом (3.6)–(3.8) получаем (3.9). ■

Теорема 13. *Парциальный вклад погрешности моделирования гравитационного ускорения в погрешность автономно корректируемой БИНС (3.9) мажорируется квадратичной зависимостью от времени ($\tau \in [0, t]$)*

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} [\nabla\bar{F}_I(\bar{R}_I(t_2), t_2) - \nabla\bar{F}_{*I}(\hat{R}_I(t_2), t_2)] dt_2 \leq \bar{k} \cdot t^2 / 2; \\ \bar{k} \geq \nabla\bar{F}_I(\bar{R}_I(\tau), \tau) - \nabla\bar{F}_{*I}(\hat{R}_I(\tau), \tau). \quad (3.11)$$

Доказательство следует из явного вида (3.9). ■

Теорема 14. *Алгоритм автономно корректируемой БИНС в общем случае произвольной модели гравитационного ускорения имеет вид:*

$$\begin{cases} \hat{R}_I(t) = \bar{R}_{*I}(t) - \Delta\hat{R}_I(t); \\ \ddot{\bar{R}}_{*I}(t) = B_*(t)\bar{a}_{*E}(t) + \{\bar{F}_{*I}[\bar{R}_{*I}(t), t] - \bar{F}_{*I}(\bar{0}, t)\}; \\ \Delta\ddot{\bar{R}}_I(t) + \{\bar{F}_{*I}[(\bar{R}_I(t), t)] - \bar{F}_{*I}[(\Delta\bar{R}_I(t) + \bar{R}_I(t), t)]\} = \bar{f}(t). \end{cases} \quad (3.12)$$

Доказательство очевидно с учетом (3.1)–(3.8). ■

Предложенный простой алгоритм (3.1)–(3.8) обладает преимуществом, так как не требуется интегрировать нелинейные уравнения (3.12).⁶⁾ С учетом неоднородности гравитационного поля (рис. 1) его модели представляются рядами функций, содержащими миллионы членов (например, в модели EGM2008 используется 4 669 917 гармоник [18]). Использование таких или подобных «многочленных» моделей приводит к вычислению миллионов функций в реальном времени.

Можно предложить равносильное, но более удобное представление моделей гравитационного ускорения – дискретными 4D/3D кусочно-постоянными картами:

⁶⁾ В алгоритме (3.1)–(3.8) вектор (3.2) можно положить равным нулю, поскольку его величина не играет роли, – он автокомпенсируется (3.7), а сам факт его наличия в алгоритме (3.1)–(3.8) преследовал лишь цель иллюстрации модели кусочно-плоской Земли (рис. 2), ассоциируемой с идеей кусочно-постоянных гравитационных карт (3.13).

$\bar{I}_{*I}(\bar{R}_{Im}, t_n) = \bar{I}_{mn} = \text{const}; \quad \bar{g}_{*I}(\bar{R}_{Im}, t_n) = \bar{g}_{mn} = \text{const}; \quad m = [1, N_m] \leq \infty; \quad n = [1, N_n] \leq \infty, \quad (3.13)$
использование которых предельно упрощает численный алгоритм формирования оценок (3.8) и сводит интегрирование к суммированию.

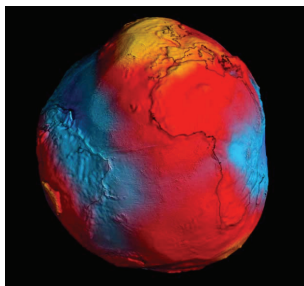


Рис. 1. Форма геоида
«картофельноподобной» Земли [16]



Рис. 2. «Приходится признать, джентльмены, что это открытие несколько ошарашивает» [19]

4. Ограничение точности БИНС квантовыми шумами гироскопов

Задача разработчиков гироскопов – минимизировать ошибки гироскопов: $\delta\bar{\omega}_E(t) \rightarrow \bar{0}$. Но для гироскопов на эффекте Саньяка принципиально неустранимы квантовые шумы, моделируемые стационарным гауссовым белым шумом:

$$\delta\bar{\omega}_E(t) = \bar{\xi}(t); \quad \langle \bar{\xi}(t) \rangle = \bar{0}; \quad \langle \bar{\xi}_i(t_1) \bar{\xi}_j(t_2) \rangle = D_i \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2); \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

где символ $\langle \dots \rangle$ – усреднение по ансамблю, $\delta(t_i - t_j)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$, D_i – коэффициенты диффузии ($[D_i^{1/2}] = \text{град}/(\text{ч})^{1/2}$).

Теорема 15. В общем случае произвольного вращения объекта ошибка угловой ориентации БИНС при наличии только белых гауссовых шумов гироскопов не зависит от вида вращения объекта.

Доказательство следует из «расщепления корреляций» моментов четного порядка для гауссовых шумов на произведения моментов второго порядка, например, для момента четвертого порядка [22]:

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\xi}_m(t_1) \bar{\xi}_n(t_2) \bar{\xi}_p(t_3) \bar{\xi}_q(t_4) \rangle = \\ & \langle \bar{\xi}_m(t_1) \bar{\xi}_n(t_2) \rangle \langle \bar{\xi}_p(t_3) \bar{\xi}_q(t_4) \rangle + \langle \bar{\xi}_m(t_1) \bar{\xi}_p(t_3) \rangle \langle \bar{\xi}_n(t_2) \bar{\xi}_q(t_4) \rangle + \langle \bar{\xi}_m(t_1) \bar{\xi}_q(t_4) \rangle \langle \bar{\xi}_n(t_2) \bar{\xi}_p(t_3) \rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

и проверяемого прямым вычислением равенства

$$\langle \Omega(B(t_1) \delta\bar{\omega}_E(t_1)) \Omega(B(t_2) \delta\bar{\omega}_E(t_2)) \rangle = \langle \Omega(\delta\bar{\omega}_E(t_1)) \Omega(\delta\bar{\omega}_E(t_2)) \rangle, \quad (4.3)$$

справедливого в случае (4.1) для произвольного вращения объекта. ■

Учитывая

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \delta(t_1 - t_2) \dots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_n \delta(t_{n-1} - t_n) = \frac{(t/2)^{n/2}}{(n/2)!}, \quad (4.4)$$

усредняя и суммируя ряд (2.32), получаем точное среднее значение решения кинематических уравнений ошибок БИНС для произвольного вращения объекта

$$\langle \Delta A(t) \rangle = \langle \Delta B(t) \rangle = e^{-D t} I_0. \quad (D_1 = D_2 = D_3 \equiv D). \quad (4.5)$$

Для оценок предельно достижимой точности БИНС используем решение динамического уравнения ошибок (2.20), учитывая вклад только ошибок гироскопов

$$\Delta \bar{R}_I(t) \rightarrow \bar{p}(t) = \frac{1}{v_s} \int_0^t \sin v_s(t - \tau) [\Delta A(\tau) - I_0] \{ \ddot{\bar{R}}_I(\tau) - \bar{g}_{*I}[\bar{R}_I(\tau)] \} d\tau. \quad (4.6)$$

Интеграл (4.6) пропорционален перегрузке. Рассмотрим движение с единичной перегрузкой

$$\dot{\bar{R}}_I(t) = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}(t) = \frac{1}{v_s} \int_0^t \sin(v_s(t-\tau)) [I_0 - \Delta A(\tau)] \bar{g}_I d\tau. \quad (4.7)$$

Учитываем только белые шумы (4.1). Согласно (4.5) для среднего значения ошибки местоположения (4.7) получаем точное аналитическое выражение

$$\langle \bar{p}^T(t) \rangle \langle \bar{p}(t) \rangle^{1/2} = R_0 (1 + \frac{D^2}{v_s^2})^{-1} [1 - e^{-Dt} - \frac{D}{v_s} \sin v_s t + \frac{D^2}{v_s^2} (1 - \cos v_s t)]. \quad (4.8)$$

При выполняемых на практике неравенствах $D/v_s \ll 1$, $Dt \ll 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}^T(t) \rangle \langle \bar{p}(t) \rangle^{1/2} &\cong R_0 (Dt - \frac{D}{v_s} \sin v_s t); \\ \langle \bar{p}^T(t) \bar{p}(t) \rangle &\cong R_0^2 [3Dt - \frac{D}{v_s} (4 \sin v_s t - \frac{1}{2} \sin 2v_s t)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Дисперсия ошибки определения местоположения (4.7) принимает вид:

$$\sigma_p^2(t) \equiv \langle \bar{p}^T(t) \bar{p}(t) \rangle - \langle \bar{p}^T(t) \rangle \langle \bar{p}(t) \rangle \cong \begin{cases} (2/5)(Dt)(gt^2/2)^2, & Dt \ll vt \ll 1, \\ 3(Dt)R_0^2, & Dt \ll 1 \ll vt. \end{cases} \quad (4.10)$$

Используя (4.10), получаем оценки парциальных вкладов белых шумов гироскопов в погрешность местоположения (движение с единичной перегрузкой):

для БИНС на ЛГ при $D^{1/2} = (3 \div 4) \cdot 10^{-4}$ град/ч^{1/2} [24, 25] – (55-75) м/ч (1 σ) [5];

для БИНС на ВОГ при $D^{1/2} = 5 \cdot 10^{-5}$ град/ч^{1/2} [26, 27] – 10 м/ч (1 σ);

для БИНС на АИ при $D^{1/2} = 3 \cdot 10^{-6}$ град/ч^{1/2} [2] – менее 1 м/ч (1 σ).

Квантовый предел точности подразумевает не раз и навсегда определенное конкретное число, а функциональную зависимость от параметров гироскопа. Эти зависимости для ЛГ давно известны [23–25]. Оценки квантового предела точности гироскопов на АИ и сравнение с ЛГ впервые были получены в работе [28]:

$$\Omega_m^{\min} = \frac{\hbar}{2mA_m} (jt_m)^{-1/2}; \quad \Omega_l^{\min} = \frac{\hbar}{A_l m_\gamma} \left(\frac{P}{\hbar\omega} t_m \right)^{-1/2}, \quad (4.11)$$

где $\Omega_m^{\min}$ и $\Omega_l^{\min}$ – минимально обнаружимые угловые скорости гироскопом на АИ и ЛГ; $\hbar$ – постоянная Планка; m – масса атома; $m_\gamma \equiv \hbar\omega/c^2$ – эффективная масса фотона; c – скорость света; ω – круговая частота света; j – интенсивность потока частиц; P – оптическая мощность; t_m – время измерения; A_m и A_l – площади контура АИ и резонатора ЛГ.

Отношение $\Omega_m^{\min} / \Omega_l^{\min}$ представим в удобном для комментариев виде:

$$\frac{\Omega_m^{\min}}{\Omega_l^{\min}} = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{A_l}{A_m} \left(\frac{P}{\hbar\omega} \frac{1}{j} \right)^{+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega} \right)^{-1} \frac{A_l}{A_m} \left(\frac{\langle N_l \rangle}{N_m} \right)^{+1/2}, \quad (4.12)$$

где $mc^2 / \hbar\omega$ – отношение масштабных коэффициентов гироскопа на АИ и ЛГ; $\langle N_l \rangle$ – среднее число фотонов в резонаторе ЛГ; N_m – число атомов в АИ.

Величина $mc^2 / \hbar\omega$ имеет порядок (10^9 – 10^{11}). Сравнивая энергию фотона ЛГ ($\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$ м) с энергией атома ^4He , Cs или молекулы C_{60} , можно видеть, что $mc^2 / \hbar\omega$ составляет $2 \cdot 10^9$, $6 \cdot 10^{10}$ или $3 \cdot 10^{11}$ [30]. Таким образом,

$$\frac{\Omega_m^{\min}}{\Omega_l^{\min}} = k \cdot \frac{A_l}{A_m} \left(\frac{\langle N_l \rangle}{N_m} \right)^{+1/2}; \quad k = \left(\frac{1}{4} 10^{-9} \div \frac{1}{6} 10^{-11} \right). \quad (4.13)$$

При равных линейных размерах гироскопа на АИ и ЛГ отношение площади контура АИ и резонатора ЛГ можно оценить величиной $A_m / A_l \geq 10^{-3}$, среднее число фотонов в резонаторе ЛГ $\sim 10^{17}$, а число атомов в АИ (постоянно увеличивающееся в разработках источников атомов для АИ) $\sim 10^{12}$. В результате $\Omega_m^{\min} / \Omega_l^{\min} \leq [(1/4) \cdot 10^{-9} \div (1/6) \cdot 10^{-11}] \cdot 10^3 (10^{17} / 10^{12})^{+1/2} \leq [10^{-4} \div (2/3) \cdot 10^{-6}]$, (4.14) или с учетом $\Omega_l^{\min} \sim 10^{-4}$ град/ч (для современных ЛГ)

$$\Omega_m^{\min} \leq [10^{-8} \div (2/3) \cdot 10^{-10}] \text{ град/ч}, \quad (4.15)$$

что превосходит точность всех существующих в настоящее время гироскопов, кроме криогенных электростатических гироскопов проекта Gravity Probe B [29].

Для АИ с двумя входами в «запутанных» состояниях (рис. 3, а), достигается «предел Гейзенберга»: вместо зависимости $\Omega_m^{\min} \sim (N_m)^{-1/2}$ реализуется $\Omega_m^{\min} \sim (N_m)^{-1}$ [31], и предел точности улучшается в $(N_m)^{+1/2}$ раз. При $N_m = 10^{12}$ в АИ возможно дополнительное по сравнению с классической схемой (рис. 3, б) повышение точности в 10^6 раз, что соответствует беспрецедентной точности гироскопа

$$\Omega_m^{\min} \leq [10^{-14} \div (2/3) \cdot 10^{-16}] \text{ град/ч}. \quad (4.16)$$

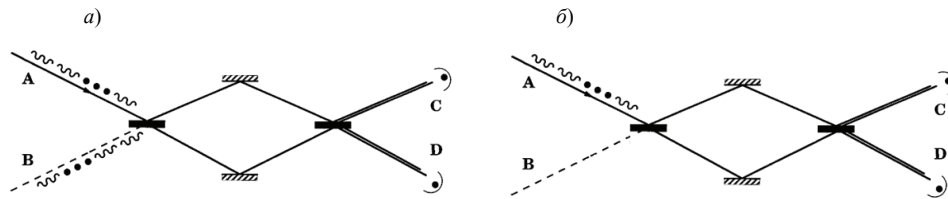


Рис. 3. Атомный интерферометр с двумя входами в «запутанных» состояниях (а) и классический (с одним входом) атомный интерферометр (б) [31]

Заключение

Строгий подход к выводу и исследованию уравнений ошибок БИНС позволил получить новые результаты в теории инерциальной навигации (теоремы 1–15).

Обсуждавшиеся с В.И. Кузнецовым 1 октября 1986 года [4] оценки квантового предела точности БИНС на ЛГ (50 м/ч для ЛГ с периметром резонатора 32 см) и результирующей точности БИНС 150...300 м/ч с учетом всех возмущений при движении с единичной перегрузкой были подтверждены на практике, – в БИНС на ЛГ LN-94R (технический задел, созданный фирмой Litton для ракетной техники по программе Midgetman, использовался для авиации) была достигнута точность 0,1–0,2 мили/ч [32]. В достижимости такой точности БИНС на ЛГ автор не сомневался [5], и академик В.И. Кузнецов успел в этом убедиться при жизни.

На новом этапе гироскопии на эффекте Саньяка автор не сомневается в том, что в ближайшее время в мировой практике будет достигнута точность автономных БИНС на АИ ~ 1 м/ч с перспективой дальнейшего повышения точности. Путь к созданию в России гироскопов на АИ с точностью 10^{-8} – 10^{-10} град/ч и 10^{-14} – 10^{-16} град/ч, очевидно, не простой и не близкий. Но, как известно, чтобы пройти путь, нужно сделать первый шаг [33].

Автор признателен профессору Д. П. Лукьянову за ценные замечания, которые не только способствовали улучшению структурирования текста этой статьи по сравнению с текстом доклада [1], но и неявно подвигли автора доработать концепцию строгих уравнений ошибок БИНС с учетом неидеальностей бортовых шкал времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Krobka, N. I.** The concept of accurate equations of errors and estimations of quantum limits of accuracy of strapdown inertial navigation systems based on laser gyros, fiber-optical gyros, and atom interferometers on de Broglie waves // 17th Saint Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems (31 May – 02 June 2010, Saint Petersburg). Proc. – SPb.: SRC of the RF Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2010. – P. 95-112.
2. **Long-Term Stability** of an Area-Reversible Atom-Interferometer Sagnac Gyroscope / D. S. Durfee [et al] // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – No. 24. – P. 240801 [4 p].
3. **Jekeli, C.** Navigation Error Analysis of Atom Interferometer Inertial Sensor // Navigation. Journal of The Institute of Navigation. – 2005. – Vol. 52. – No. 1. – P. 1-14.
4. **Кробка, Н. И.** Работы по лазерной гироскопии в НИИ ПМ. Воспоминания Кробки Н.И. – заместителя Главного конструктора НИИ ПМ по направлению лазерной гироскопии // Приоритет – точность. ФГУП НИИ ПМ им. акад. В.И. Кузнецова 50 лет / Под общ. ред. И. Н. Сапожникова. С. 161-165. – М.: Изд. РЕСТАРТ, 2006. – 192 с.
5. **Кробка, Н. И.** Трехосные лазерные гироскопы и теория их применения в бесплатформенных инерциальных системах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.04. – М., 1985. – 193 с.
6. **Krobka, N. I.** Works on Laser Gyroscopy in Applied Mechanics Scientific Research Institute named after academician V. I. Kuznetsov / N. I. Krobka, I. N. Sapozhnikov // The First International Conference on Inertial Technology, St.-Petersburg, 25-26 May, 1994. – St. Petersburg. – 1994. – P. 3-12.
7. **Gilvarry, J. J.** Theory of Blind Navigation by Dynamical Measurements / J. J. Gilvarry, S. H. Browne, I. K. Williams // J. of Applied Physics. – 1950. – Vol. 21. – No. 8. – P. 753-761.
8. **Андреев, В. Д.** Теории инерциальной навигации. Автономные системы. – М.: Наука, 1966. – 579 с.
9. **Андреев, В. Д.** Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. – М.: Наука, 1967. – 647 с.
10. **Матвеев, В. В.** Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В. В. Матвеев, В. Я. Распопов / Под общ. ред. В. Я. Распопова. – СПб: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2009. – 280 с.
11. **Голован, А. А.** Математические основы навигационных систем. Ч. I. / А. А. Голован, Н. А. Парусников. – 2-е издание, исправленное и дополненное. – М.: Изд-во МГУ, 2010. – 126 с.
12. **Krobka, N. I.** Accurate error equations of the strapdown inertial navigation systems / N. I. Krobka // The Second Soviet-Chinese Symposium of Inertial Technology (Saint Petersburg, 9-15 October, 1991). – SPb.: The Scientific Council on Problems of Motion Control and Navigation of the Academy of Sciences. Chinese Society of Inertial Technology. CSRI «Elektropribor» / Chief editor V. G. Peshekhonov. – 1992. – P. 43-50.
13. **Бранец, В. Н.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
14. **Lombardi, M. A.** NIST Primary Frequency Standards and the Realization of the SI Second / M. A. Lombardi, T. P. Heavner, S. R. Jefferts // Measure. – 2007. – Vol. 2. – No. 4. – P. 74-89.
15. **Четаев, Н. Г.** Теоретическая механика / Под ред. В. В. Румянцева, К. Е. Якимовой. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
16. **Amos, J.** Gravity satellite yields 'Potato Earth' view [Электронный ресурс] URL:

- <http://www.bbc.co.uk/news/science-environment-12911806> (дата обращения 31.03.2011г.)
17. **Кробка, Н. И.** Об одном заблуждении, незамеченном много десятилетий, в теории инерциальной навигации / Н.И. Кробка [и др.] // XX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (Санкт-Петербург, 27-29 мая 2013 г.). Сб. матер. / Гл. ред. акад. РАН В. Г. Пешехонов. – СПб.: ГИЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2013. – С. 58-63.
 18. **Pavlis, N. K.** The Global Gravitational Model EGM2008 / 10th International IGeS Geoid School «The Determination and Use of the Geoid» (St. Petersburg, Russia, 28 June – 2 July, 2010).
 19. **Физики** продолжают шутить / Под общ. ред. В. Турчина. – М.: Мир, 1968. – 318 с.
 20. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М.: Наука. – 1967. – 472 с.
 21. **Krobka, N. I.** Non-commutative kinematic effects and laws of fiber-optic gyro noise accumulation in strapdown inertial orientation systems / N. I. Krobka // Proceedings of the 16th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (25-27 May 2009, Saint Petersburg). – SPb.: State Research Center of the Russian Federation Central Scientific and Research Institute «Elektropribor», 2009. – P. 69-72.
 22. **Ахманов, С. А.** Введение в статистическую радиофизику и оптику / С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. – М.: Наука, 1981. – 640 с.
 23. **Dorschner, T. A.** Laser Gyro at Quantum Limit / T. A. Dorschner, H. A. Haus, M. Holz, I. W. Smith, H. Statz // IEEE J. of Quantum Electronics. – 1980. – Vol. 16. – No. 12. – P. 1376-1379.
 24. **Simpson, J. H.** A Fundamental Noise Limit to RLG Performance / J. H. Simpson // IEEE NAECON'80. – P. 80-83.
 25. **Hammons, S. W.** Mechanically Dithered RLG at the Quantum Limit / S. W. Hammons, V. J. Ashby // IEEE NAECON'82. – 1982. – P. 388-392.
 26. **Sanders, S. J.** Fiber optic gyro technology trends – a Honeywell perspective / S. J. Sanders, L. K. Strandjord, D. Mead // 15th Optical Fiber Sensors Conference. Technical Digest, 2002. Vol. 1. – P. 5-8.
 27. **Pavlat, G. A.** Fiber optic gyro based inertial navigation systems at Northrop Grumman / G. A. Pavlat // 15th Optical Fiber Sensors Conference Technical Digest, 2002. Vol. 1. – P. 9.
 28. **Scully, M. O.** Quantum-noise limits to matter-wave interferometry / M. O. Scully, J. P. Dowling // Phys. Rev. A. – 1993. – Vol. 48. – No. 4. – P. 3186-3190.
 29. **Everitt, C. W. F.** Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity / C.W.F. Everitt [et al] // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 106. – Iss. 22. – P. 221101 [5 pages].
 30. **Кробка, Н. И.** Квантовая микромеханика: гироскопы на волнах де Бройля и квантовых свойствах сверхтекучих жидкостей. Тенденции развития и состояние разработок // Гироскопия и навигация. – 2009. – № 3. – С. 36-55.
 31. **Dowling, J. P.** Correlated input-port, matter-wave interferometer: Quantum-noise limits to the atom-laser gyroscope / J. P. Dowling // Phys. Rev. A. – 1998. – Vol. 57. – Iss. 6. – P. 4736-4746.
 32. **Matthews, A.** Cost-Effective, High-Accuracy Inertial Navigation / A. Matthews, H. Welter // Navigation. Journal of The Institute of Navigation. – 1989. – Vol. 36. – No. 2. – P. 157-172.
 33. **Заключительный отчет о НИР** «Исследование возможностей и путей создания принципиально новых типов высокоточных гироскопов на обобщенном эффекте Саньяка (на волнах де Бройля, Бозе-Эйнштейна конденсатах и сверхтекучести гелия) и микромеханических гироскопов повышенной точности с разнесенными частотами возбуждения и съема для управления движением космическими системами». Госконтракт № 02.740.11.0528 от 15.03.2010. Рег. № 01200964182 / Рук. темы Н.И. Кробка. – ФГУП «ЦЭНКИ». НИИ ПМ им. акад. В. И. Кузнецова, 2012. КИНД.Э001.3664. Кн. 1. – 1405 с.

Abstract. Accurate error equations for SINS are derived with account of nonideal onboard time scale. Comments are given on specific features of SINS behaviour unnoticed earlier using approximate variational equations of INS errors. Error equations are first proposed to improve SINS accuracy not only to analyze it. Limits on SINS accuracy due to quantum noise of Sagnac effect gyros such as laser and fiber-optic gyros and atom interferometers on de Broglie waves are estimated [1].

Key words: Accurate error equations, SINS, quantum limit