

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПОВОРОТОВ В АЛГОРИТМАХ ОРИЕНТАЦИИ БИНС МЕТОДОМ АКСОИДОВ

Исследуется явление конинга, или некоммутативного вращения, с помощью наглядного метода аксоидов, что позволяет получить известные точные решения для движения тела в некоторых модельных случаях, которые традиционно используются как эталоны для оценки качества реальных алгоритмов БИНС, а также для синтеза новых алгоритмов с улучшенными показателями качества.

Введение

Исследование некоммутативных поворотов (или конинга) как вида механического движения тел направлено в конечном итоге на совершенствование той части алгоритмов БИНС, которые предназначены именно для компенсации вредного влияния этого явления.

В процессе функционирования практически всех видов БИНС периодически вычисляется вектор $\bar{\varphi}_m$ угла поворота тела (Body) относительно инерциального пространства на временном отрезке $t_{m-1} \leq t \leq t_m$ путем численного (приближенного) решения точного дифференциального уравнения Борца (1971) [1, 2, 3]

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varphi}}(t) &= \bar{\omega}_{IB}^B + \frac{1}{2} \bar{\varphi} \times \bar{\omega}_{IB}^B + \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \bar{\varphi} \times (\bar{\varphi} \times \bar{\omega}_{IB}^B), \\ \bar{\varphi}(t_{m-1}) &= 0, \quad \bar{\varphi}(t = t_m) = \bar{\varphi}_m. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнении (1) входной величиной является вектор угловой скорости $\bar{\omega}_{IB}^B(t)$.

В практике построения БИНС третьим членом в уравнении (1) пренебрегают в силу его малости [2, 3]. Если полученное упрощенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega}_{IB}^B + \frac{1}{2} \bar{\varphi} \times \bar{\omega}_{IB}^B \quad (2)$$

Бабич Олег Александрович. Доктор технических наук, главный научный сотрудник ОАО «Московский институт электромеханики и автоматики». Действительный член Международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

решать итерационным методом Пикара [4], то вторая итерация этого метода принимается [2, 3] в практике БИНС за окончательную. Она имеет вид

$$\bar{\varphi}_m = \int_{t_{m-1}}^t \left(\bar{\omega}_{IB}^B(t) + \frac{1}{2} \bar{\alpha}(t) \times \bar{\omega}_{IB}^B(t) \right) dt = \bar{\alpha}_m + \bar{\beta}_m, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= \int_{t_{m-1}}^t \bar{\omega}_{IB}^B(\tau) d\tau, \quad \bar{\alpha}(t=t_m) = \bar{\alpha}_m, \\ \bar{\beta}(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_{m-1}}^t \bar{\alpha}(\tau) \times \bar{\omega}_{IB}^B(\tau) d\tau, \quad \bar{\beta}_m = \bar{\beta}(t=t_m). \end{aligned}$$

Вектор поворота $\bar{\beta}(t)$ в (3) называют углом некоммутативного поворота, или конингом

Заметим, что в том случае, когда на временном отрезке интегрирования $[t_{m-1}, t_m]$ вектор $\bar{\omega}_{IB}^B(t)$ не изменяет своего направления $[\bar{\omega}_{IB}^B(t)/\omega_{IB}^B(t)] = const$, точное решение для (0.1) имеет вид

$$\bar{\varphi}(t) = \int_{t_{m-1}}^t \bar{\omega}_{IB}^B(\tau) d\tau = \bar{\alpha}(t). \quad (4)$$

Из (1) и (4) вытекает точное, а не приближенное, как в (3), определение конинга на временном отрезке $[t_0, t]$

$$\bar{\beta}(t, t_0) = \bar{\varphi}(t, t_0) - \bar{\alpha}(t, t_0), \quad (5)$$

где $t_0 = t_{m-1}$. Из (4) и (5) следует, что явление конинга обусловлено вращением вектора угловой скорости $\bar{\omega}_{IB}^B(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$.

В некоторых модельных примерах можно точно определять, как вектор поворота $\bar{\varphi}(t, t_0)$, так и вектор $\bar{\alpha}(t, t_0)$, и таким образом точно определять вектор конинга $\bar{\beta}(t, t_0)$. Точные решения могут быть использованы далее как эталоны для оценки качества приближенных вычислений.

Цель данной статьи состоит в использовании точной механической аналогии конинга для более наглядного вывода известных соотношений для параметров ориентации в условиях данного вида движения.

1. Примеры конических движений. Движение двух идентичных конусов

Пусть подвижный конус B (Body), представленный на рис. 1 точками $A'OC'$, катится по неподвижному в инерциальном пространстве референцному конусу I (Inert), который на рис. 1 задается точками AOC . Предполагается, что рассматриваемое движение является равномерным с периодом оборота T и происходит без скольжения относительно бегущей линии контакта двух конусов.

Заметим, что рис. 1 отображает положение конусов в начальный момент времени $t = 0$. В этот момент контакт осуществляется по линии OA .

Далее линия контактов будет обегать поверхности каждого конуса за время периода T с угловой скоростью $\Omega = 2\pi/T$. В силу предполагаемой геометрической одинаковости фигур конусов точка C' , относящаяся к Body, встретится с точкой C неподвижного конуса через время $T/2$, а точка A' – с точкой A через T . Далее в периодическом движении пары встречающихся точек на ободах

конусов не будут меняться. Все та же пара будет вступать в контакт через период T .

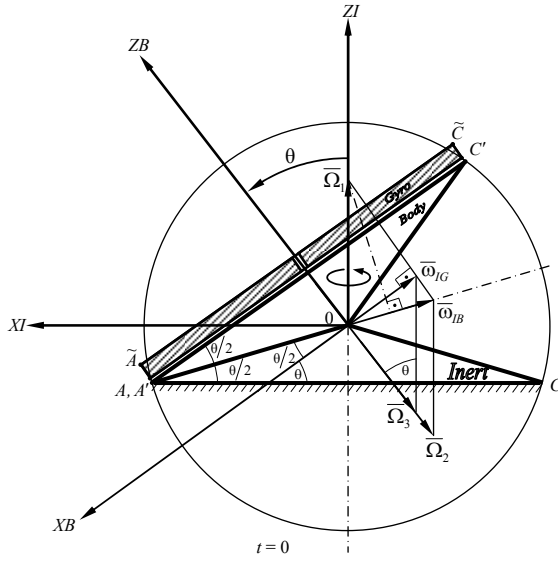


Рис. 1. Качение двух идентичных конусов

Ясно (см. рис. 1), что вектор угловой скорости $\bar{\omega}_{IB}$ будет лежать вдоль линии контактов AO , так как линейные скорости точек подвижного тела, лежащих на этой линии, в это мгновение будут равны нулю. Будем предполагать, что движение конуса B по конусу I происходит в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, если смотреть со стороны оси ZI . Разложим вектор $\bar{\omega}_{IB}(t)$ на две неортогональные составляющие по осям ZI и ZB

$$\bar{\omega}_{IB}(t) = \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2(t), \quad (6)$$

считая, что подвижное тело участвует в двух движениях (см. рис. 1) – вокруг осей ZI и ZB . Из постановки задачи ясно, что $|\bar{\Omega}_1| = |\bar{\Omega}_2| = \Omega = 2\pi/T$, так как по прошествии периода T происходит полное повторение взаимного положения конусов B и I .

Из рис. 1 следует:

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}_{IB}(t)| &= \omega_{IB} = 2\Omega \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Omega = 2\pi T^{-1}, \\ \omega_{IB}^{XB} &= -\omega_{IB} \cos \frac{\theta}{2} \cos \Omega t = -\Omega \sin \theta \cos \Omega t, \\ \omega_{IB}^{YB} &= -\omega_{IB} \cos \frac{\theta}{2} \sin \Omega t = -\Omega \sin \theta \sin \Omega t, \\ \omega_{IB}^{ZB} &= -2\Omega \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -\Omega(1 - \cos \theta), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом вектор $\bar{\varphi}_{IB}(t)$ конечного поворота, перпендикулярный к подвижной плоскости ZI, ZB , представляется в виде

$$\varphi_{IB}^{XB} = -\theta \sin \Omega t, \quad \varphi_{IB}^{YB} = \theta \cos \Omega t, \quad \varphi_{IB}^{ZB} = 0, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Из рис. 1, а также соотношений (7) и (8) следует, что в процессе рассматриваемого движения векторы $\bar{\omega}_{IB}(t)$ и $\bar{\varphi}_{IB}^I(t)$ взаимно ортогональны, что позволяет рассматривать данное движение как пример чистого конинга.

Вектору поворота $\bar{\varphi}_{IB}^I(t) = \bar{\varphi}_{B(t)}^I$ отвечает кватернион $q_{B(t)}^I$

$$q_{B(t)}^I = \begin{pmatrix} \cos 0.5\theta \\ -\sin 0.5\theta \sin \Omega t \\ +\sin 0.5\theta \cos \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{YB}^{XI} = \frac{c_{32}}{c_{22}} = \frac{-\sin \theta \sin \Omega t}{\cos \theta + (1 - \cos \theta) \cos^2 \Omega t}, \quad \alpha_{YB}^{XI} \approx -\theta \sin \Omega t, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{YB}^{ZI} = \frac{-c_{21}}{c_{22}} = \frac{0.5(1 - \cos \theta) \sin 2\Omega t}{\cos \theta + (1 - \cos \theta) \cos^2 \Omega t}, \quad \alpha_{YB}^{ZI} \approx \frac{\theta^2}{4} \sin 2\Omega t.$$

Изменения углов $(\alpha_{XB}^{YI}(t), \alpha_{XB}^{ZI}(t))$ и $(\alpha_{YB}^{XI}(t), \alpha_{YB}^{ZI}(t))$ во времени представлены на рис. 3 и 4.

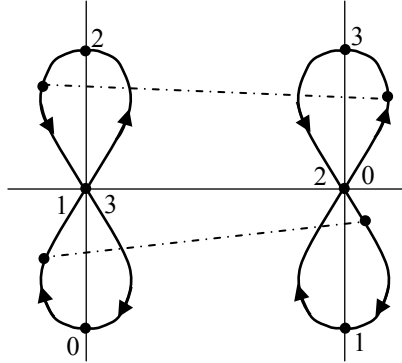


Рис. 4. Следы осей XB и YB на сфере

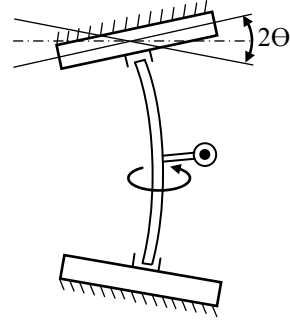


Рис. 5. Причины конических вибраций

Во многих прикладных задачах угол θ можно считать малой величиной первого порядка. В этом случае «восьмерки» на рис. 4 будут вырождаться в плоские дуги и можно считать, что колебания осей XB и YB происходят по плоским меридиональным линиям (см. рис. 1). Из этих соображений следует, что вынужденные угловые колебательные движения тела (Body) по осям XB и YB по законам $\alpha_{XB}^{YI} = \theta \cos \Omega t$, $\alpha_{YB}^{XI} = -\theta \sin \Omega t$ будет приводить к коническому движению, описываемому уравнениями (7) и (8). Заметим, что угловые вибрации такого типа могут возникать из-за плохой динамической уравновешенности массивных вращающихся тел, расположенных в зоне чувствительных элементов (рис. 5).

Интересно отметить, что рассматриваемая кинематика движения конуса B (см. рис. 1) может быть точно задана не только на языке углов векторов поворотов, кватернионов и матриц направляющих косинусов ((8), (9), (11)), но и на языке углов Эйлера: в виде законов изменения угла нутации θ , угла прецессии ψ и угла собственного вращения ϕ

$$\begin{aligned} \theta &= \text{const}, & \psi &= \Omega t + \pi/2, & \phi &= -\psi = -\Omega t - \pi/2, \\ \dot{\theta} &= 0, & \dot{\psi} &= \Omega, & \dot{\phi} &= -\Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

2. Движение стоячей волны лазерного гироскопа, установленного на подвижном конусе (Body)

Рассмотрим движение третьего тела (на рис. 1 – плоского диска $\tilde{A}\tilde{C}$), который на этом рисунке назван Гуго. Этот диск прилегает к конусу Body и свободно вращается вокруг оси ZB . При этом он вынужден двигаться таким образом,

чтобы проекция $\omega_{IG}^{ZB}(t)$ его абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}_{IG}$ на ось $\bar{u}_{ZB}$ была тождественно равна нулю

$$\omega_{IG}^{ZB} = \bar{\omega}_{IG} \cdot \bar{u}_{ZB} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) с точки зрения аналитической механики задает неголономную связь, так как связывает позиционные $\bar{u}_{ZB}^I$ и скоростные $\bar{\omega}_{IG}$ параметры движения данной механической системы из трех тел. Заметим, что пространственная стоячая волна лазерного гироскопа движется в инерциальном пространстве полностью аналогично движению диска $\tilde{A}\tilde{C}$ и в процессе ее движения выполняется соотношение (15). Таким образом, диск $\tilde{A}\tilde{C}$ можно считать механической моделью лазерного гироскопа.

Из уравнения (15) следует, что дискретный выходной сигнал $\Delta\alpha_{IB}^{ZB}(t_l)$ лазерного гироскопа ЛГЗ, равный углу поворота тела B (см. рис. 1) относительно тела G вокруг их общей оси $ZB = ZG$ за период $T_l = t_l - t_{l-1}$, будет равен интегралу

$$\Delta\alpha_{IB}^{ZB}(t_l) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \omega_{IB}^{ZB}(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Три ортогональных лазерных гироскопа установленные на теле Body на l -м такте будут выдавать трехмерный вектор

$$\Delta\bar{\alpha}_l = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \bar{\omega}_{IB}^B(\tau) d\tau, \quad (17)$$

который принято называть инкрементом показаний ЛГ. В записи векторного инкремента (17) $\Delta\bar{\alpha}_l = \Delta\bar{\alpha}_{IB(t_l)}^B$ мы опустили верхний и нижний индексы для краткости.

Из рис. 1 нетрудно вывести следующие аналитические выражения для проекций вектора угловой скорости $\bar{\omega}_{IG}$ на оси трехгранников G и I :

$$\begin{aligned} \omega_{IG} &= \omega_{IB} \cos \frac{\theta}{2} = \Omega \sin \theta, \quad \Omega_3 = \omega_{IG} \operatorname{ctg} \theta = \Omega \cos \theta, \\ \omega_{IG}^{XG} &= -\Omega \sin \theta \cos \Omega_3 t, \quad \omega_{IG}^{YG} = -\Omega \sin \theta \sin \Omega_3 t, \quad \omega_{IG}^{ZG} = 0, \\ \omega_{IG}^{XI} &= -\omega_{IG} \cos \theta \cos \Omega t = -\Omega \sin \theta \cos \theta \cos \Omega t, \\ \omega_{IG}^{YI} &= -\Omega \sin \theta \cos \theta \sin \Omega t, \quad \omega_{IG}^{ZI} = \omega_{IG} \sin \theta = \Omega \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Из рис. 1 также следует, что плоский диск $\tilde{A}\tilde{C}$ будет «обкатывать» покоящийся в инерциальном пространстве аксоид, заданный в виде конуса (рис. 1, б) с углом при его основании, равным θ . Это утверждение вытекает из того, что линия контактов диска и этого конуса будет совпадать с линией подвижного вектора $\bar{\omega}_{IG}$ (см. рис. 1).

Рассмотрим теперь задачу движения тела Гуго в инерциальном пространстве с позиций классической теории подвижных (Gyro) и неподвижных (Inert) аксоидов [5]. Поверхности аксоидов (конусов с вершинами в неподвижной точке O) образуются линией контактов (точек с нулевыми линейными скоростями) при ее движении в теле подвижного и неподвижного аксоидов. А линия контак-

тов (XG, YG, ZG) совпадает с линией действия вектора угловой скорости $\bar{\omega}_{IG}(t)$ (см. рис. 1). Для подвижного (Гуго) конуса будем иметь соотношения:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{XG}{-\omega_{IG}^{XG} \omega_{IG}^{-1}} &= \frac{YG}{-\omega_{IG}^{YG} \omega_{IG}^{-1}} = \frac{ZG}{-\omega_{IG}^{ZG} \omega_{IG}^{-1}} = R, \\ \frac{XG}{\cos \Omega_3 t} &= \frac{YG}{\sin \Omega_3 t} = \frac{ZG}{0} = R, \quad XG = R \cos \Omega_3 t, YG = R \sin \Omega_3 t, ZG = 0, \quad (19) \\ б) \quad XG^2 + YG^2 &= R^2, ZG = 0. \end{aligned}$$

В (19, а) величина R – произвольное число, играющее роль радиуса. Соотношения (19, б) задают уравнения подвижного аксоида (Гуго) в системе координат G . Как видим, подвижный аксоид вырождается здесь в плоский круг, ортогональный оси $OB = OG$.

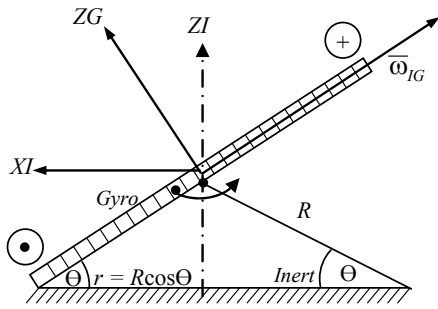


Рис. 6. Движение подвижного аксоида (Гуго) по неподвижному (Inert)

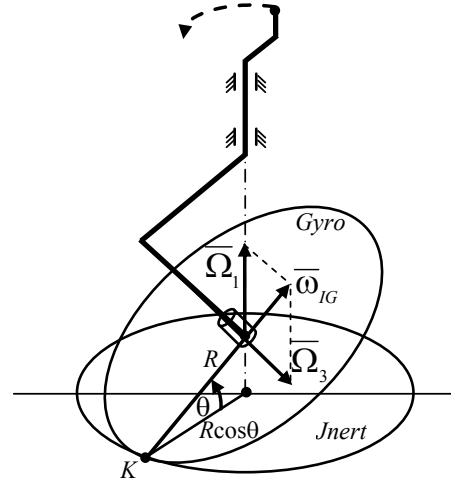


Рис. 7. Механическая аналогия движения Гуго при конинге: диск Гуго катится по диску Inert без скольжения в точке K контакта

Для неподвижного аксоида (Inert) аналогичные выкладки дают уравнение его поверхности в системе координат I

$$XI^2 + YI^2 = (R \cos \theta)^2, \quad ZI = R \sin \theta.$$

Качение подвижного (плоского G) по неподвижному (конусному I) аксоиду показано на рис. 6 и 7. При движении обод диска Гуго катится по окружности, лежащей в основании конуса Inert.

Радиус окружности, расположенной в основании конуса, будет равен $r = R \cos \theta$, а радиус внешней окружности диска – R . Длина полной окружности, лежащей в основании неподвижного конуса (Inert), равна $2\pi r = 2\pi R \cos \theta$, а длина полной окружности диска (Гуго) равна $2\pi R$.

Когда ось гироскопа $ZG = ZB$ опишет полный круг (см. рис. 1) вокруг оси ZI , т.е. когда тело Body придет в исходное положение, точка контакта на основании конуса пройдет линейное расстояние $S = 2\pi r = 2\pi R \cos \theta$. Такое же расстояние пройдет и точка контакта на ободу диска, при этом угол Φ_G^{ZG} поворота диска вокруг оси ZG будет равен

$$S = 2\pi R \cos \theta = R \Phi_G^{ZG}, \quad \Phi_G^{ZG} = 2\pi \cos \theta.$$

Таким образом, диск (Гуго) за каждый период T будет поворачиваться вокруг чувствительной оси $Z = ZB = ZG$ лазерного гироскопа по часовой стрелке (отставая) на угол

$$\Delta\Phi_G^{ZG} = 2\pi \cos\theta - 2\pi = -2\pi(1 - \cos\theta).$$

С учетом принятого правила знаков за каждый период T угол φ собственного вращения диска будет возрастать на величину

$$\Delta\varphi_G^{ZG} = -\Delta\Phi_G^{ZG} = 2\pi(1 - \cos\theta). \quad (20)$$

(Положительный знак в (20) имеет место потому, что после периода T нулевая черта $\tilde{CA}$ диска Gyro (см. рис. 1) будет впереди, т.е. повернутой против часовой стрелки).

Угол $\Delta\varphi_G^{ZG}$ и называется некоммутативным, или неголономным углом поворота, или конингом.

Заметим, что полученный результат полностью соответствует теореме о телесном угле А.Ю.Ишлинского (1952 г.), которая ранее [6, 7] доказывалась в абстрактной форме методом контурных интегралов и теоремы Грина. В данной работе (см. рис. 6, 7) дается механическая кинематическая интерпретация этой теоремы, на которую часто опираются в исследованиях алгоритмов ориентации БИНС [2, 3].

Таким образом, в конце каждого периода T , когда тело (Body) будет возвращаться в исходное положение (полный поворот (см. рис. 3) оси ZB по ее траектории на 2π), лазерный гироскоп будет выдавать показание $2\pi \cos\theta$. При этом разность $2\pi \cos\theta - 2\pi = \Delta\Phi_G^{ZG}$ можно рассматривать как ошибку, которую необходимо скомпенсировать.

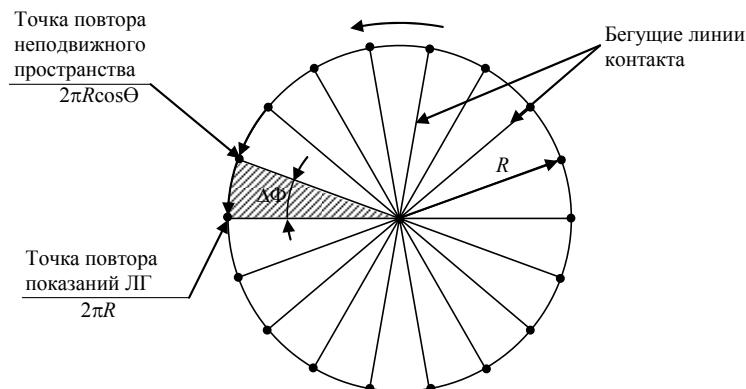


Рис. 8. Иллюстрация к взаимным вращениям дисков Gyro и Inert

Заметим, что величина угла $-\Delta\Phi_G^{ZG}$, полученная методом аксоидов, полностью согласуется с величиной угловой скорости ω_{IB}^{ZB} в (7). Действительно, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_B^{ZB}(T) = 0 &= \int_t^{t+T} \omega_{IB}^{ZB}(\tau) d\tau + \beta^{ZB}(T), \quad \beta^{ZB}(T) = \\ &= - \int_t^{t+T} \omega_{IB}^{ZB}(\tau) d\tau = 2\pi(1 - \cos\theta) = \Delta\Phi_G^{ZG}. \end{aligned} \quad (21)$$

3. Положение тела (Body) относительно стоячей волны лазерного гироскопа в периоды съема информации и основное уравнение периодического кининга

В процессе функционирования БИНС на каждом такте $[t_{m-1} \leq t \leq t_m]$ обязательно вычисляется кватернион $q_{B(t)}^{IB(t_0)}$, $t_0 = t_{m-1}$, $t = t_m$, задающий текущий поворот тела (Body) в инерциальном пространстве относительно инерциального (т.е. не вращающегося относительно мировых звезд) «замороженного» координатного трехгранника $IB(t_0)$ на предыдущем такте t_0 движения.

В интересах дальнейшего изложения напомним здесь основные правила алгебраических действий над кватернионами

$$q_c^a = \begin{pmatrix} s_1 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix}, \quad q_b^c = \begin{pmatrix} s_2 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}, \quad q_b^a = q_c^a \cdot q_b^c = \begin{pmatrix} s_1 s_2 - \bar{v}_1^T \bar{v}_2 \\ s_1 \bar{v}_2 + s_2 \bar{v}_1 + \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \end{pmatrix}, \quad (q_b^a)^{-1} = \begin{pmatrix} s \\ -\bar{v} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Для рассматриваемого случая имеет место очевидное соотношение

$$q_{B(t)}^{IB(t_0)} = q_I^{IB(t_0)} \cdot q_{B(t)}^I = \left(q_{B(t_0)}^I \right)^{-1} \cdot q_{B(t)}^I. \quad (23)$$

В (23) под координатным трехгранником I понимается исходный инерциальный трехгранник I , введенный на рис. 1.

В соответствии с (9) и (23) имеем

$$q_{B(t)}^{IB(t_0)} = \begin{pmatrix} \cos^2 0.5\theta + \sin^2 0.5\theta \cos \Omega(t - t_0) \\ 0.5 \sin \theta (\sin \Omega t_0 - \sin \Omega t) \\ 0.5 \sin \theta (-\cos \Omega t_0 + \cos \Omega t) \\ -\sin^2 0.5\theta \sin \Omega(t - t_0) \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} \cos 0.5\varphi \\ \frac{\sin 0.5\varphi}{\varphi} \begin{pmatrix} \varphi^{XB} \\ \varphi^{YB} \\ \varphi^{ZB} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Отметим, что решение (24) является точным и может служить эталоном для проверки приближенных вычислений.

По известному кватерниону $q_{B(t)}^{IB(t_0)}$ может быть сколь угодно точно вычислен отвечающий ему вектор Эйлера $\bar{\varphi}(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} a) \quad 0.5\varphi &= \arctg \frac{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{q_1}, \\ b) \quad f &= \frac{\sin 0.5\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(0.5\varphi)^2}{3!} + \frac{(0.5\varphi)^4}{5!} - \dots \right), \\ c) \quad \bar{\varphi} &= f^{-1} \cdot (q_2, q_3, q_4)^T. \end{aligned} \quad (25)$$

Если величину угла θ считать величиной малой, то с точностью до величин второго порядка малости θ^2 кватерниону (24) будет отвечать вектор поворота Эйлера $\bar{\varphi}$

$$\bar{\varphi} = (\varphi^{XB}, \varphi^{YB}, \varphi^{ZB})^T, \quad |\bar{\varphi}| = \varphi, \quad \frac{\varphi}{\sin 0.5\varphi} = 2,$$

$$\begin{aligned}\varphi^{XB} &= \theta(\sin \Omega t_0 - \sin \Omega t), \quad \varphi^{YB} = \theta(-\cos \Omega t_0 + \cos \Omega t), \\ \varphi^{ZB} &= -\frac{1}{2}\theta^2 \sin \Omega(t - t_0), \quad \varphi = \theta\sqrt{2(1 - \cos \Omega(t - t_0))}.\end{aligned}\quad (26)$$

Если теперь угол конинга представить в виде (5)

$$\bar{\beta}(t, t_0) = \bar{\varphi}(t, t_0) - \int_{t_0}^t \bar{\omega}_{IB}^B(\tau) d\tau, \quad (27)$$

где $\bar{\varphi}(t, t_0)$ представляется формулой (26), а $\bar{\omega}_{IB}^B(\tau)$ – формулой (7), то мы получим выражение для угла конинга $\bar{\beta}(t, t_0)$ (угол θ считается здесь малой величиной первого порядка)

$$\bar{\beta}(t, t_0) = \left[0, 0, \frac{\theta^2}{2}(\Omega T - \sin \Omega T) \right]^T, \quad T = t - t_0. \quad (28)$$

Величины Ωt_0 и Ωt , которые входят (26), нужно понимать как углы положения контактной линии (см. рис. 1, 3) в моменты времени t_0 и t . Из уравнений (26) вытекает, что на каждом временном интервале $[t_0, t]$ величина вектора конечного поворота $\bar{\varphi}(t_0, t)$ будет зависеть от начальных и конечных временных (геометрических угловых) условий, в то время как угол $\bar{\beta}(t, t_0)$ конинга, как это следует из (28), не зависит от t и t_0 в отдельности, а зависит только от их разности $T = (t - t_0)$ и частоты Ω конических колебаний.

Уравнение (28) назовем основным уравнением периодического конинга, так как на его основе можно проводить анализ и синтез алгоритмов компенсации конинга [8–12].

Уравнение (28) хорошо известно в литературе по теории БИНС [2, 3, 8–12], отличительной же особенностью вывода его в данной статье является применение для этого кинематического метода аксоидов. Этот метод дает возможность не только наглядно представить себе движение, где имеет место конечный угол поворота относительно оси, вдоль которой угловая скорость тела тождественно равна нулю, но и вывести коротким путем точные математические формулы, описывающие такое движение.

Выводы

Даны точные механические аналогии в виде движущихся аксоидов для твердых тел, находящихся в состоянии угловых вибраций типа конинга, и лазерных гироскопов, установленных на этих телах.

На основе данного подхода получены известные точные формулы для кватерниона и вектора конечного поворота конингующего тела на произвольных временных отрезках, которые традиционно используются в качестве эталонов для проверки рабочих алгоритмов БИНС.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bortz, J.E.** (1971). A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-7(1), 61-66.
2. **Savage, P.G.** (2007). Strapdown Analytics. Strapdown Associates Inc., Maple Plan, Minnesota.

3. **Savage, P.G.** (2009). Computational Elements For Strapdown Systems. Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology, RTO-EN-SET-116, NATO, Brussels.
4. **Понтрягин, Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения, М: Наука, 1965. -332 с.
5. **Лойцянский, Л.Г.** () Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Том 1. - М: ГИТТЛ, 1957.-378с.
6. **Ишлинский, А.Ю.** Лекции по теории гироскопов / А.Ю. Ишлинский, В.И. Борзов, Н.П.Степаненко. - М: Изд-во МГУ, 1983. – 248 с.
7. **Журавлев, В.Ф.** Основы теоретической механики.- М: Наука, Физматлит, 1997. - 317 с.
8. Бабич О.А. (2013) Исследование некоммутативных поворотов в алгоритмах ориентации БИНС методом аксоидов. Труды МИЭА. Выпуск 6. с. 18-34.
9. **О выборе алгоритма** и тактовой частоты расчета матрицы ориентации для БИНС /О.Н, Богданов [и др.]. – М.:Труды МИЭА. Выпуск 2. – 2010. - С. 60-67.
10. **Zongtao Li, Tiejun Wu, Longhua Ma.**(2011) A Coning Compensation Algorithm for SINS in High Dynamic Motion. Control Engineering and Applied Informatics. – 2011. - Vol.13, No.3. - Pp. 32-40.
11. **Панов, А.П.** Математические основы теории инерциальной ориентации. - Киев: Наукова думка, 1995. – 279 с.
12. **Miller.R.B.,** A New Strapdown Attitude Algorithm. Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.6, No.4, 1983, pp. 287-291. (В русском переводе – в сборнике «Аэрокосмическая техника», 1984. - Т. 2, №5. – С. 127 – 133).

Abstract. Noncommutativity rotation, or coning, is a form of mechanical motion of a rigid body with one fixed point. This phenomenon reveals itself when angular velocity vector changes its orientation in inertial space during the motion. Any motion of a rigid body with one fixed point can always be represented by a rolling movement of a moving axoid around the fixed one. In this article, this rather vague phenomenon of noncommutativity motion is analyzed by means of obvious axoids' method. This approach allows us to find well known exact solutions for body motion in certain typical cases which are conventionally used as patterns for assessing the quality of real SINS algorithms and to improve them.

Key words: SINS, orientation algorithms, noncommutativity rotation, coning, laser gyro, axoids' method, instant rotation axis

Материал поступил 12.09.2013