

П. А. АКИМОВ, А. И. МАТАСОВ

**ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ
БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ
МЕТОДАМИ НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СБОЕВ**

Предлагается новый подход к решению задачи выявления скачков в смещениях нулей датчиков угловой скорости бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Этот подход основан на методе наименьших модулей для динамических систем, который позволяет с необходимой точностью определять моменты и величины скачков.

Введение

Перед допуском к эксплуатации бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), как правило, производятся стендовые испытания для определения систематических составляющих погрешностей чувствительных элементов – акселерометров и датчиков угловой скорости (гироскопов). Обычно смещения нуля и прочие параметрические погрешности на достаточно длительных отрезках времени меняются несущественно и могут быть определены с необходимой точностью [3]. Однако иногда происходят одномоментные невозвратные изменения (скачки) в показаниях чувствительных элементов на величину, значительно превосходящую средний уровень шумов. Данное явление не позволяет провести надежную калибровку инерциальной системы, поэтому важно точно выявлять моменты и величины скачков.

Общепринятые способы обработки сигналов основаны на идеях калмановской теории оценивания и методе наименьших квадратов [3]. Как показывают численные эксперименты, эти методы не всегда позволяют точно определить скачки в погрешностях чувствительных элементов, так как дают недостаточно четкую оценку.

Существуют и другие подходы к идентификации сбоев, например метод многоальтернативной фильтрации [5, 6], в основе которого лежит использование калмановской теории оценивания и нескольких гипотез о вероятностных характеристиках погрешностей.

В данной статье рассматривается принципиально другой подход к обработке сигналов БИНС. Задача выявления сбоев формализуется в виде проблемы оценивания фазового вектора динамической системы по измерениям, в качестве которых выступают выходные сигналы БИНС в совокупности с внешней и априорной информацией. Проблема оценивания решается с помощью метода наименьших модулей (МНМ), иногда называемого методом l_1 -аппроксимации. Данный метод заключается в минимизации суммы модулей компонент векторов невязок. Он позволяет с большой точностью оценивать моменты появления и

Акимов Павел Александрович. Кандидат физико-математических наук. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Матасов Александр Иванович. Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник МГУ им. М.В.Ломоносова. Действительный член Академии навигации и управления движением.

величины скачков в показаниях чувствительных элементов без использования статистических гипотез.

Первые три раздела статьи посвящены построению математических моделей динамической системы и измерений, для которых затем формулируется задача оценивания. Рассмотрены основные особенности ее численного решения; построены оценки уровней неоптимальности текущих итераций [1], приведены результаты решения задачи оценивания при обработке модельных данных.

Математическая модель ошибок БИНС при стендовых испытаниях

Рассмотрим стендовые испытания, при которых БИНС выставлена по осям географического трехгранника и ее ориентация не меняется на протяжении всего эксперимента.

Пусть стендовые испытания проводятся в точке M с известными географическими координатами, а основание системы неподвижно относительно Земли. Обозначим модельную (расчетную) точку, вычисляемую БИНС, через M' . Введем несколько систем координат (трехгранников) [4, 9]: *идеальный географический трехгранник*, начало которого связано с положением истинной точки M , первая ось направлена на восток, вторая – на север, а третья – по географической вертикали; *модельный трехгранник*, определяющийся аналогичным образом, но его начало связано с модельной (расчетной) точкой M' ; *приборный трехгранник*, жестко связанный с корпусом БИНС, с началом в точке M , оси которого совпадают с осями чувствительности инерциальных датчиков; *квазиприборный трехгранник*, отличающийся от приборного поворотом, определяемым расчетной матрицей ориентации приборного трехгранника относительно модельного географического трехгранника.

Пусть $\Delta x_1, \Delta x_2$ – горизонтальные ошибки местоположения, записанные в проекциях на оси модельного географического трехгранника; $\delta V_1, \delta V_2$ – первые две компоненты разности $\delta V = V' - V_{z_x}$, называемой динамической ошибкой определения относительных скоростей, где V' – вектор модельной относительной скорости в осях модельного географического трехгранника, V_{z_x} – вектор относительной скорости в осях квазиприборного трехгранника; $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ – компоненты вектора углов малого поворота квазиприборного трехгранника относительно модельного географического трехгранника в проекциях на оси модельного географического трехгранника; $(0, u_2, u_3)^T = (0, u \cos \varphi, u \sin \varphi)^T$ – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли в проекциях на оси идеального географического трехгранника; здесь φ – широта точки M , u – величина угловой скорости вращения Земли; a – большая полуось земного эллипсоида; g – абсолютная величина ускорения силы тяжести в месте проведения эксперимента; $\Delta f_i = \varepsilon_i + \delta f_i$, $i = 1, 2$, $v_j = v_{0j} + \delta v_j$, $j = 1, 2, 3$ – инструментальные погрешности в показаниях акселерометров и датчиков угловой скорости, ε_i, v_{0j} – постоянные составляющие этих погрешностей, $\delta f_i, \delta v_j$ – флуктуационные непостоянные погрешности.

Инструментальные погрешности инерциальных датчиков в качестве неизвестных величин фигурируют в уравнениях ошибок БИНС, описывающих ди-

намику изменения ошибок в определении координат, скоростей и углов ориентации объекта. Уравнения ошибок записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \delta V_1, & \Delta \dot{x}_2 &= \delta V_2, \\ \delta \dot{V}_1 &= 2u_3\delta V_2 - (\beta_2 + \frac{\Delta x_1}{a})g + \Delta f_1, \\ \delta \dot{V}_2 &= -2u_3\delta V_1 + (\beta_1 - \frac{\Delta x_2}{a})g + \Delta f_2, \\ \dot{\beta}_1 &= u_3\beta_2 - u_2\beta_3 + v_1, \\ \dot{\beta}_2 &= -u_3\beta_1 + v_2, \\ \dot{\beta}_3 &= u_2\beta_1 + v_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Уравнения (1) представляют собой частный случай уравнений ошибок БИНС [4], когда испытания проводятся на неподвижном относительно Земли стенде, а приборный трехгранник приблизительно ориентирован по осям идеального географического трехгранника.

Рассмотрим случай, когда в смещениях нулей акселерометров и датчиков угловой скорости могут происходить редкие скачкообразные изменения (ступенчатого типа). В статье [2] представлено решение проблемы идентификации скачков в показаниях акселерометров. Здесь рассмотрим задачу идентификации скачков в показаниях гироскопов. Вообще говоря, в каждом измерительном датчике может возникать несколько сбоев.

Чтобы построить алгоритм определения скачков, расширим вектор состояния системы (1), включив в него неизвестные значения инструментальных погрешностей:

$$\kappa_1 = \Delta f_1, \quad \kappa_2 = \Delta f_2, \quad \kappa_3 = v_1, \quad \kappa_4 = v_2, \quad \kappa_5 = v_3.$$

Формирующие дифференциальные уравнения для них представим в виде

$$\dot{\kappa}_j = \delta \kappa_j, \quad j = 1, \dots, 5,\tag{2}$$

где $\delta \kappa_j$ – функции, характеризующие скорости изменения погрешностей. Эти функции описываются соотношениями

$$\delta \kappa_j(t) = \delta \tilde{\kappa}_j(t) + \lambda_j \delta(t - t_j).$$

Здесь $\delta(t - t_j)$ – дельта-функция Дирака, соответствующая скачкообразному изменению этих величин, λ_j – величина скачка, $\delta \tilde{\kappa}_j(t)$ – производная регулярной, флюктуационной составляющей $\kappa_j(t)$, не содержащей скачков.

Для численной реализации алгоритмов оценивания неизвестных параметров необходимо перейти от дифференциальных уравнений к разностным. Рассмотрим набор дискретных моментов времени: $t_k = k\Delta t$, $k = 0, \dots, K$, где Δt – фиксированный шаг дискретизации, соответствующий, например, частоте поступления измерительной информации. Тогда, согласно стандартному приему, можно получить дискретный аналог (1), (2):

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1(t_{k+1}) &= \Delta x_1(t_k) + \Delta t \delta V_1(t_k), & \Delta x_2(t_{k+1}) &= \Delta x_2(t_k) + \Delta t \delta V_2(t_k), \\
 \delta V_1(t_{k+1}) &= \delta V_1(t_k) + \Delta t \left(2u_3 \delta V_2(t_k) - (\beta_2(t_k) + \frac{\Delta x_1(t_k)}{a})g + \kappa_1(t_k) \right), \\
 \delta V_2(t_{k+1}) &= \delta V_2(t_k) + \Delta t \left(-2u_3 \delta V_1(t_k) + (\beta_1(t_k) - \frac{\Delta x_2(t_k)}{a})g + \kappa_2(t_k) \right), \\
 \beta_1(t_{k+1}) &= \beta_1(t_k) + \Delta t (u_3 \beta_2(t_k) - u_2 \beta_3(t_k) + \kappa_3(t_k)), \\
 \beta_2(t_{k+1}) &= \beta_2(t_k) + \Delta t (-u_3 \beta_1(t_k) + \kappa_4(t_k)), \\
 \beta_3(t_{k+1}) &= \beta_3(t_k) + \Delta t (u_2 \beta_1(t_k) + \kappa_5(t_k)), \\
 \kappa_i(t_{k+1}) &= \kappa_i(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, 5.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_i(\tau) d\tau$ является неизвестным возмущением, приращением па-

раметра $\kappa_i(t_k)$, возможно, содержащим скачки.

Структура измерений в задаче оценивания

Получим соотношения, описывающие измерительную информацию в задаче оценивания. Основываясь на выходной информации БИНС, можно получить значения координат точки M' и значения компонент вектора относительной скорости V' этой же точки в дискретные моменты времени. Также вычисляются значения ψ', θ', γ' и ψ, θ, γ углов курса, тангажа и крена для модельного и приборного трехгранников. Получаемые на выходе вычислителя БИНС величины $x_i^{out}(t_k)$, $V_i^{out}(t_k)$, $\psi^{out}(t_k)$, $\theta^{out}(t_k)$, $\gamma^{out}(t_k)$ из-за округления при выводе не точно совпадают с соответствующими значениями координат, скоростей и угла:

$$\begin{aligned}
 x_i^{out}(t_k) &= x'_{x'i}(t_k) + r'_{x'i}(t_k), & V_i^{out}(t_k) &= V'_i(t_k) + r'_{Vi}(t_k), \quad i = 1, 2, \\
 \psi^{out}(t_k) &= \psi'(t_k) + \delta\psi'(t_k), & \theta^{out}(t_k) &= \theta'(t_k) + \delta\theta'(t_k), \\
 \gamma^{out}(t_k) &= \gamma'(t_k) + \delta\gamma'(t_k), & t_k &= k\Delta t, \quad k = 0, \dots, K,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $r'_{x'i}(t_k)$, $r'_{Vi}(t_k)$, $i = 1, 2$, $\delta\psi'$, $\delta\gamma'$, $\delta\theta'$ – погрешности округления.

Отрезок времени между двумя последовательными измерениями в этих формулах будем считать равным шагу дискретизации Δt , фигурирующему в предыдущем разделе.

Помимо описанной выше инерциальной информации о координатах и скоростях объекта, на котором установлена БИНС, используется так называемая внешняя информация, т. е. данные, поступающие не из инерциальной системы [9]. Применительно к решаемой проблеме можно выделить три типа внешней информации.

1. Позиционная информация в виде географических координат x_i^{ext} точки проведения эксперимента, которую можно представить равенствами

$$x_i^{ext}(t_k) = x'_{x'i}(t_k) + r'_{x'i}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, K, \tag{5}$$

где $x_{x'i}(t_k)$ – координаты идеальной точки M в проекциях на оси модельного географического трехгранника, а $r_{x'i}$ – ошибка в их определении, вызванная погрешностями сторонних источников данных, которую можно считать постоянной, так как место проведения эксперимента фиксировано.

2. Скоростная информация в виде равной нулю относительной скорости точки M , например, в проекциях на оси квазиприборного трехгранника

$$V^{ext}(t_k) = V_{z_x}(t_k) = 0, \quad k = 0, \dots, K. \quad (6)$$

3. Угловая информация в виде значений углов курса, тангажа и крена приборного трехгранника, вырабатываемая датчиками углов станда:

$$\psi^{ext} = \psi + \delta\psi, \quad \theta^{ext} = \theta + \delta\theta, \quad \gamma^{ext} = \gamma + \delta\gamma. \quad (7)$$

Здесь ψ^{ext} , θ^{ext} , γ^{ext} – показания датчиков углов станда, ψ , θ , γ – истинные значения углов курса, тангажа и крена соответственно, $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\gamma$ – погрешности датчиков. Все эти величины в силу неподвижности корпуса БИНС являются константами.

Получаемые в вычислителе БИНС модельные значения $x'_{x'i}$ и $V'_{x'i}$ связаны с компонентами фазового вектора системы (3) следующими равенствами [4]:

$$\Delta x_i = x'_{x'i} - x_{x'i}, \quad \delta V_i = V'_{x'i} - V_{z_x}, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

Из соотношений (4)–(6) следует, что разности:

$$z_{xi}(t_k) = x_i^{out}(t_k) - x_i^{ext}(t_k), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$z_{Vi}(t_k) = V_i^{out}(t_k) - V_i^{ext}(t_k), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, K,$$

могут рассматриваться как измерения компонент фазового вектора системы (3):

$$z_{xi}(t_k) = \Delta x_i(t_k) + r_{xi}(t_k), \quad z_{Vi}(t_k) = \delta V_i(t_k) + r_{Vi}(t_k), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, K, \quad (9)$$

где $r_{xi}(t_k) = r'_{x'i}(t_k) - r_{x'i}$, $r_{Vi}(t_k)$ – итоговые ошибки этих измерений, причем $r_{xi}(t_k)$ обусловлены погрешностями как выходных сигналов, так и внешней информации, а $r_{Vi}(t_k)$ – погрешностями только внешней информации.

Нетрудно также показать, что информация об углах $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ описывается равенствами:

$$\begin{aligned} z_\psi(t_k) &= \beta_3(t_k) + r_\psi^{ave} + r_\psi^{fl}(t_k), \\ z_\theta(t_k) &= \beta_1(t_k) + r_\theta^{ave} + r_\theta^{fl}(t_k), \\ z_\gamma(t_k) &= \beta_2(t_k) + r_\gamma^{ave} + r_\gamma^{fl}(t_k), \quad k = 0, \dots, K; \end{aligned} \quad (10)$$

здесь измерения $z_\psi(t_k)$, $z_\theta(t_k)$, $z_\gamma(t_k)$ строятся на основе выходных сигналов БИНС и показаний датчиков станда $\psi^{out}(t_k)$, $\theta^{out}(t_k)$, $\gamma^{out}(t_k)$. Погрешности в этих измерениях разделены на две группы: r_ψ^{ave} , r_θ^{ave} , r_γ^{ave} – постоянные составляющие и $r_\psi^{fl}(t_k)$, $r_\theta^{fl}(t_k)$, $r_\gamma^{fl}(t_k)$ – флуктуационные погрешности, представляющие собой линейные комбинации ошибок округления из системы (4).

Декомпозиция динамической системы и структура задачи оценивания

Ошибки в измерениях (9)–(10) координат, скоростей и углов ориентации достаточно малы, поэтому возможно упростить исходную систему разностных уравнений (3), исключив из рассмотрения первые два уравнения, уравнения для $\beta_3(t_k)$ и $\kappa_5(t_k)$ и подставив в ее правую часть измерения $z_{x1}(t_k), z_{v1}(t_k), z_\theta(t_k), z_\gamma(t_k), z_\psi(t_k)$. В результате дополнительной замены переменных, цель которой – исключить постоянные составляющие (обусловленные постоянными погрешностями стенда) из уравнений для измерений (10), получаются две независимые (без общих неизвестных) системы уравнений:

$$\begin{aligned} \delta V_1(t_{k+1}) &= \delta V_1(t_k) + \Delta t \left(2u_3 z_{v2}(t_k) - (\beta_2'(t_k) + \frac{z_{x1}(t_k)}{a})g + \kappa_1'(t_k) \right), \\ \beta_2'(t_{k+1}) &= \beta_2'(t_k) + \Delta t (-u_3 z_\theta(t_k) + \kappa_4(t_k)), \\ \kappa_1'(t_{k+1}) &= \kappa_1'(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_1(\tau) d\tau, \\ \kappa_4(t_{k+1}) &= \kappa_4(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_4(\tau) d\tau, \quad k = 0, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta V_2(t_{k+1}) &= \delta V_2(t_k) + \Delta t \left(-2u_3 z_{v1}(t_k) + (\beta_1'(t_k) - \frac{z_{x2}(t_k)}{a})g + \kappa_2'(t_k) \right), \\ \beta_1'(t_{k+1}) &= \beta_1'(t_k) + \Delta t (u_3 z_\gamma(t_k) - u_2 z_\psi(t_k) + \kappa_3(t_k)), \\ \kappa_2'(t_{k+1}) &= \kappa_2'(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_2(\tau) d\tau, \\ \kappa_3(t_{k+1}) &= \kappa_3(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_3(\tau) d\tau, \quad k = 0, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь величины $\beta_1'(t_k), \beta_2'(t_k), \kappa_1'(t_k), \kappa_2'(t_k)$ отличаются от соответствующих исходных переменных на константы, зависящие от постоянных составляющих погрешностей в измерениях (10):

$$\begin{aligned} \beta_1'(t_k) &= \beta_1(t_k) + r_\theta^{ave}, & \beta_2'(t_k) &= \beta_2(t_k) + r_\gamma^{ave}, \\ \kappa_1'(t_k) &= \kappa_1(t_k) + g r_\gamma^{ave}, & \kappa_2'(t_k) &= \kappa_2(t_k) - g r_\theta^{ave}. \end{aligned}$$

Таким образом, динамика ошибок БИНС может быть описана системами разностных уравнений (11) и (12). Для определенности рассмотрим систему (11) и представим ее в матричном виде

$$X(k+1) = FX(k) + Gq(k) + g(k), \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (13)$$

где $X(k) \in \mathbf{R}^n$ – неизвестное значение вектора состояния системы в момент времени t_k , $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbf{R}^{n \times l}$ – заданные матрицы, $q(k) \in \mathbf{R}^l$ – неизвестный вектор погрешностей, $g(k) \in \mathbf{R}^n$ – известный вектор, отвечающий неоднородностям данной системы. В системе (11) $n = 4$, $l = 2$, а указанные векторы и матрицы описываются следующими формулами:

$$X(k) = (\delta V_1(t_k), \beta_2'(t_k), \kappa_1'(t_k), \kappa_4(t_k))^T, \quad q(k) = \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_1(\tau) d\tau, \int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta \kappa_4(\tau) d\tau \right)^T,$$

$$g(k) = \Delta t (2u_3 z_{V2}(t_k) - z_{x1}(t_k)g/a, u_3 z_\theta(t_k), 0, 0)^T,$$

$$F = E_{4 \times 4} + \begin{pmatrix} A_1 & E_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ E_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $0_{2 \times 2}$, $E_{2 \times 2}$ – нулевые и единичные матрицы указанных

размерностей. Для системы (12) соответствующие матрицы и векторы будут иметь схожую структуру.

Измерения компонент фазового вектора $X(k)$ системы (11) в соответствии с (9) и (10) сформируем следующим образом:

$$z(k) = HX(k) + r(k), \quad k = 1, \dots, K, \quad (14)$$

где $z(k), r(k) \in \mathbf{R}^m$, $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$ задаются соотношениями ($m = 2$):

$$z(k) = (z_{V1}(t_k), z_\gamma(t_k))^T, \quad H = (E_{2 \times 2}, 0_{2 \times 2}), \quad r(k) = (r_{V1}(t_k), r_\gamma^{\beta l}(t_k))^T, \quad k = 0, \dots, K.$$

Аналогичным образом измерения строятся и для фазового вектора системы (12).

Используя математическую модель начальной выставки [4] и знания о том, каких значений могут достигать различные составляющие погрешностей в показаниях чувствительных элементов, можно записать априорную информацию о $\kappa_j(0)$ в виде фиктивных измерений

$$z^{apr} = H^{apr} X(0) + r^{apr}, \quad (15)$$

где $m^{apr} = 4$, $z^{apr} \in \mathbf{R}^{m^{apr}}$, $H^{apr} \in \mathbf{R}^{m^{apr} \times n}$ – заданные вектор и матрица, а $r^{apr} \in \mathbf{R}^{m^{apr}}$ соответствует погрешности в априорной информации. В нашем случае

$$z^{apr} = (0, z_\gamma(0), 0, 0)^T, \quad H^{apr} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, соотношения (11), (14), (15) или схожие с ними формулы для системы (12) задают модели объекта, измерений и априорной информации для задачи оценивания. С помощью таких моделей исходные погрешности чувствительных элементов $\kappa_1(t_k)$, $\kappa_2(t_k)$ оцениваются с дополнительными сдвигами $g r_\gamma^{ave}$, $g r_\theta^{ave}$, $g r_\gamma^{ave}$, $g r_\theta^{ave}$ соответственно. Однако на оценки величин и моментов скачков указанные сдвиги никакого влияния не оказывают. Таким образом, для оценивания скачков в компонентах $\kappa_1(t_k)$, $\kappa_2(t_k)$, $\kappa_3(t_k)$, $\kappa_4(t_k)$ необходимо решение двух задач оценивания, соответствующих системам (11) и (12).

Подчеркнем, что алгоритмы численного решения, используемые в данном исследовании, оперируют не непосредственно с полученными ранее моделями,

а с их безразмерными аналогами. Так делается для того, чтобы все переменные имели приблизительно одинаковый масштаб, порядка 1. В этом случае точность и надежность вычислительных процедур значительно повышаются.

Вариационные проблемы и методы их решения

Сформулируем основную вариационную задачу, с помощью которой найдутся оценки векторов состояния полученных ранее динамических систем. Главная идея состоит в том, что функционал оптимизационной задачи предлагается сформировать из суммы модулей компонент вектора невязки. Тем самым решается проблема, аналогичная классической задаче метода наименьших модулей (МНМ) [8, 10]. В качестве переменных выступают значения векторов состояния и возмущений динамической системы, соответствующие всему интервалу времени, на котором производились измерения, т.е. решается детерминированная задача сглаживания. Применение МНМ объясняется тем, что он показал свою эффективность в решении статических задач оценивания при наличии редких аномально больших ошибок (сбоев) в измерениях [8, 10]. В динамических задачах оценивания ситуация похожая. Применительно к полученной ранее модели (13) скачкам в параметрах $\kappa_j(t_k)$ соответствуют аномально большие значения невязок $q_j(t_k)$ в динамике системы. Как будет показано ниже, МНМ позволяет построить оценки $\{\kappa_j(t_0), \dots, \kappa_j(t_K)\}$, $j = 1, \dots, 4$, по которым легко устанавливаются момент и величина скачка, если он имел место.

Вариационная задача, с помощью которой находятся оценки состояний описанной системы, имеет вид:

$$\|\Pi^{-1}(z^{apr} - H^{apr}X(0))\|_1 + \sum_{k=1}^K \|R^{-1}(z(k) - HX(k))\|_1 + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q(k)\|_1 \rightarrow \min_{X, q} \quad (16)$$

при ограничениях $X(k+1) = FX(k) + Gq(k) + g(k)$, $k = 0, \dots, K-1$.

Здесь обозначение $\|\cdot\|_1$ используется для l_1 -нормы соответствующих векторов (т.е. суммы модулей их компонент); весовые диагональные матрицы $\Pi \in \mathbf{R}^{m^{apr} \times m^{apr}}$, $R \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbf{R}^{l \times l}$ задаются исходя из экспертных представлений о масштабах компонент векторов r^{apr} , $r(k)$, $q(k)$ соответственно.

Таким образом, необходимо минимизировать сумму l_1 -норм векторов невязок, соответствующих начальной информации, неточностям динамической модели и уравнениям для измерений. Задача оценивания ставится как детерминированная (не стохастическая), не используются какие-либо гипотезы о вероятностных свойствах возмущений.

Возможны два подхода к решению проблемы l_1 -аппроксимации (16). Первый из них состоит в переходе к эквивалентной задаче линейного программирования [2, 11]. Второй подход заключается в том, что, пользуясь ограничениями в задаче (16), можно выразить вектор состояния через $X(0)$ и векторы возмущений $q(k)$ как

$$X(k) = F^k X(0) + \sum_{s=0}^{k-1} F^{k-s-1} (Gq(s) + g(s)), \quad k = 1, \dots, K,$$

а затем подставить эти выражения в функционал задачи (16). В результате задача условной минимизации (16) сводится к задаче безусловной минимизации (17), соответствующей классическому методу наименьших модулей:

$$I(\chi) = \sum_{i=1}^N p_i |\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi| \rightarrow \min_{\chi}, \quad (17)$$

где $N = m^{apr} + K(n + l)$, $\chi = (X^T(0), q^T(0), \dots, q^T(K-1)) \in \mathbf{R}^v$, $v = Kl + n$, а p_i, ζ_i и матрица $\bar{H} \in \mathbf{R}^{v \times N}$ выражаются через векторы и матрицы исходной проблемы (16).

Задача (17), в свою очередь, может быть решена различными способами. Во-первых, она также сводится к проблеме линейного программирования, во-вторых, для ее решения может быть использован алгоритм Вейсфелда (метод вариационно-взвешенных квадратических приближений) [8]. Ценность метода Вейсфелда состоит в том, что он чрезвычайно прост в реализации. Кроме того, зачастую он позволяет обрабатывать значительно бóльшие массивы измерений, чем алгоритмы, основанные на линейном программировании.

Идея алгоритма Вейсфелда заключается в том, что производится последовательность итераций, на каждой из которых ищется вектор, минимизирующий квадратичную по χ форму:

$$\chi^{(s)} = \arg \min \sum_{i=1}^N p_i W_i^{(s-1)} (\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi)^2, \quad (18)$$

где s – номер итерации, $W_i^{(s-1)}$ – весовой коэффициент, соответствующий i -й компоненте вектора невязки на предыдущем шаге

$$W_i^{(s-1)} = \begin{cases} 1/|\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi^{(s-1)}|, & \text{если } |\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi^{(s-1)}| \geq \alpha, \\ 1/\alpha, & \text{если } |\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi^{(s-1)}| < \alpha, \end{cases}$$

$\chi^{(s-1)}$ – решение на предыдущем шаге.

Параметр $\alpha > 0$ в алгоритме характеризует малость компонент $\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi^{(s-1)}$. Он вводится для того, чтобы избежать деления на очень маленькие числа. Задача (18) представляет собой стандартную проблему взвешенного метода наименьших квадратов (ВМНК) и может быть решена с помощью известных алгоритмов [7, 11].

Таким образом, строится последовательность векторов, являющихся приближенными решениями исходной задачи (16). При этом важно оценить, насколько близким к оптимальному является полученный на текущем шаге вектор $\chi^{(s)}$, т. е. насколько $I(\chi^{(s)})$ близко к неизвестному оптимальному значению $I_0 = I(\chi^{opt})$, где χ^{opt} – решение задачи (16). Параметром, характеризующим качество приближенного решения, может служить, например, уровень неоптимальности

$$\Delta = \frac{I(\chi^{(s)})}{I_0}. \quad (19)$$

В статье [1] с помощью теории двойственности выпуклых вариационных задач получены два варианта верхней оценки Δ_0 уровня неоптимальности Δ , один из них оказывается весьма полезным в рассматриваемой задаче:

$$\Delta \leq \Delta_0 = \frac{I(\chi^{(s)}) \cdot \max(p_i | \zeta_i - \bar{H}_i^T \chi^{(s)} |)_{i=1}^N}{\sum_{i=1}^N p_i W_i^{(s-1)} (\zeta_i - \bar{H}_i^T \chi^{(s)})^2}. \quad (20)$$

Эта оценка дает критерий остановки вычислительного процесса. Пусть N – количество слагаемых в функционале (17), μ – малый параметр, задающий допустимое отклонение каждого слагаемого в этом функционале от оптимального, причем поскольку вариационная задача решается для отмасштабированной модели, то можно считать, что этот параметр подходит для каждого слагаемого. Тогда допустимое отклонение текущего значения функционала от оптимального описывается неравенством $I(\chi^{(s)}) - I_0 \leq N\mu$.

Разделив обе части этого неравенства на $I(\chi^{(s)})$, из формулы (19) получим

$$1 - \frac{I_0}{I(\chi^{(s)})} = 1 - \frac{1}{\Delta} \leq \frac{N\mu}{I(\chi^{(s)})},$$

следовательно

$$\Delta \leq \left(1 - \frac{N\mu}{I(\chi^{(s)})}\right)^{-1}.$$

Итак, поскольку $\Delta \leq \Delta_0$, критерий остановки алгоритма Вейсфелда зададим следующим образом:

$$\Delta_0 \leq \left(1 - \frac{N\mu}{I(\chi^{(s)})}\right)^{-1}. \quad (21)$$

Тем самым, оценка уровня неоптимальности позволяет остановить вычислительный процесс, когда гарантированно достигнута требуемая точность.

Идентификация скачков в погрешностях гироскопов

Описанный выше подход тестировался на примерах обработки модельных данных. Оказалось, что с помощью построенных моделей и l_1 -аппроксимации скачки в показаниях гироскопов могут быть идентифицированы весьма точно. Данный факт иллюстрирует рис. 1.

Здесь сплошной линией показаны моделируемые значения погрешности в показаниях гироскопа $\kappa_4(t_k)$ [1/с], штриховой – результат оценки $\hat{\kappa}_4(t_k)$ с использованием МНМ (l_1 -аппроксимации), когда решение вариационной проблемы

осуществлялось посредством алгоритма Вейсфелда. При этом обрабатывался массив измерений, соответствующий интервалу времени продолжительностью 2000 с, моделировались два скачка в показаниях одного из гироскопов; использовались ранее построенные модели с шагом дискретизации $\Delta t = 10$ с. Как

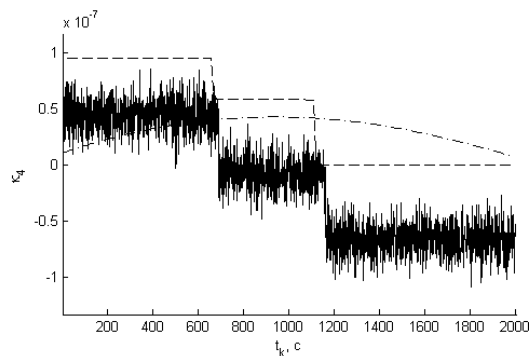


Рис. 1. Оценки скачков в датчике угловой скорости

видно из рис. 1, оценка, полученная с помощью метода l_1 -аппроксимации, позволяет эксперту, анализирующему результаты стендовых испытаний, выявить «значимые» скачки, основываясь на знании допустимых пороговых значений, и сделать заключение о готовности БИНС к эксплуатации. Величины скачков определяются с точностью до 5-10%, а моменты, когда они произошли, – с точностью до нескольких шагов дискретизации Δt . Отметим, что появление скачка в оценке ранее скачка в истинном сигнале не является противоречием, поскольку, как было указано ранее, мы решаем задачу сглаживания на всем интервале времени. При уменьшении шага дискретизации это «упреждение» сокращается. Для остановки итерационного процесса использовался критерий (20). Динамика изменения оценок Δ_0 в зависимости от номера итерации алгоритма Вейсфелда показана на рис. 2.

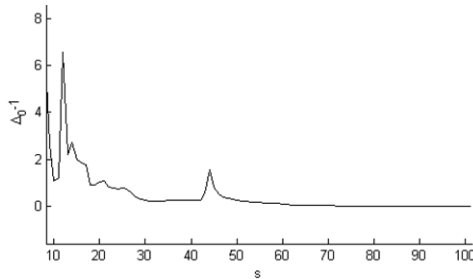


Рис. 2. Динамика изменения оценок уровней неоптимальности

Решение с заданной точностью ($\mu = 10^{-4}$) было найдено за 92 итерации, на последнем шаге уровень неоптимальности оценивался как $\Delta_0 = 1 + 6,4 \cdot 10^{-3}$.

Наиболее распространенные на практике подходы к задачам оценивания основаны на методе наименьших квадратов (МНК). Применительно к рассматриваемым моделям задача МНК

имеет вид [11]

$$\| \Pi^{-1}(z^{apr} - H^{apr} X(0)) \|_2 + \sum_{k=1}^K \| R^{-1}(z(k) - HX(k)) \|_2 + \sum_{k=0}^{K-1} \| Q^{-1}q(k) \|_2 \rightarrow \min_{X,q}$$

при ограничениях $X(k+1) = FX(k) + Gq(k) + g(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, т.е. в функционале вместо модулей стоят квадраты соответствующих невязок.

На рис. 1 штрихпунктирной линией показан результат оценки $\kappa_4(t_k)$ [1/с] с помощью МНК. Как видим, данный подход не позволяет определить ни величины скачков, ни даже сам факт их наличия, график изменения $\kappa_4(t_k)$ оказывается слишком «плавным». Похожие эффекты наблюдались и при оценивании скачков в показаниях акселерометров БИНС. Данный вопрос детально обсуждался в статье [2], где предложен несколько другой способ построения структуры для задачи оценивания (не использующий измерения углов тангажа и крена на стенде), однако весьма успешно применен метод наименьших модулей.

Следует заметить, что немаловажным является вопрос выбора весовых матриц Π, R, Q . Для рассматриваемого класса задач оценивания их диагональные элементы были заданы исходя из приблизительного знания масштабов соответствующих переменных:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 10^{-6}, & \Pi_2 &= 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ [рад]}, & \Pi_3 &= 10^{-3} g \text{ [м/с}^2\text{]}, & \Pi_4 &= 10^{-7} \text{ [1/с]}; \\ R_1 &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ [м/с]}, & R_2 &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ [рад]}, & Q_1 &= 10^{-5} g \text{ [м/с}^2\text{]}, \\ Q_2 &= 2 \cdot 10^{-8} \text{ [1/с]}. \end{aligned}$$

В результате большого ряда численных экспериментов установлено, что для повышения надежности идентификации скачков в показаниях гироскопов крайне желательно выполнение нескольких условий. Во-первых, продолжительность эксперимента должна быть не менее одного часа. Во-вторых, высокочастотные погрешности $r_v^{fl}(t_k), r_\theta^{fl}(t_k)$ в съеме данных не должны превышать значений порядка $5 \cdot 10^{-5}$ рад. Данные условия позволяют заметно повысить устойчивость решений по отношению к вариациям диагональных элементов весовых матриц (в их задании допускается неточность в 15-20 раз по сравнению с базовыми значениями). Зависимость получаемых решений от значений весовых коэффициентов показана на рис. 3.

Здесь пунктирной линией изображена l_1 -оценка погрешности $\kappa_3(t_k)$ при указанных выше исходных значениях весовых коэффициентов, штриховой – оценка в случае, когда величина Q_2 уменьшена в 10 раз, а штрихпунктирной – оценка в случае, когда Q_2 увеличена в 3 раза, сплошной линией, как и ранее, показаны исходные моделируемые значения $\kappa_3(t_k)$. Как видим, полу-

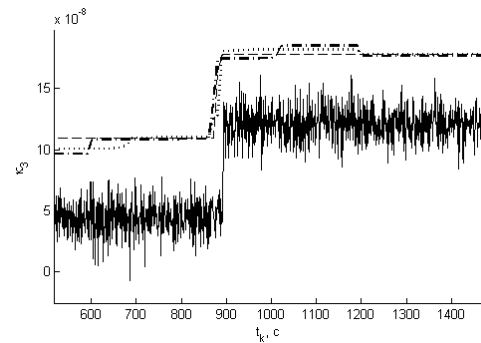


Рис. 3. Вариации весовых коэффициентов

чающиеся решения по характеру изменения параметра $\kappa_3(t_k)$ весьма похожи и скачок идентифицируется. Тем самым, предложенный подход не требует особенно точного задания весовых матриц.

Нередко в прикладных задачах количество неизвестных параметров достигает нескольких тысяч. Тогда сведение (16) к задаче линейного программирования может приводить к вычислительным трудностям. Матрицы ограничений в этой задаче будут иметь очень большую размерность, и поэтому при использовании стандартных инструментов численного решения, например пакета Matlab, может возникнуть нехватка оперативной памяти. Отметим, что в отличие от подходов, основанных на линейном программировании, алгоритм Вейсфелда позволяет без излишнего расходования вычислительных ресурсов решать задачи вида (16), даже если количество измерений и неизвестных параметров составляет порядка 10000, – в этом состоит его важное преимущество. В случае если удастся сравнить решения задачи МНМ, полученные с помощью алгоритма Вейсфелда и с помощью линейного программирования, результаты оказываются очень близкими, т.е. использование алгоритма Вейсфелда не приводит к потере точности решения.

Заключение

В данной статье рассмотрены математические и вычислительные особенности метода наименьших модулей в задаче обработки сигналов БИНС. Показано, как совместное использование скоростной и угловой информации в соответствующей задаче сглаживания позволяет решить задачу определения скачков в показаниях чувствительных элементов БИНС. Численные эксперименты свидетельствуют, что предложенный подход дает возможность с приемлемой точно-

стью идентифицировать скачки в показаниях датчиков угловой скорости (гиро-скопов).

Установлено, что метод наименьших модулей дает значительно более четкие оценки скачков, чем метод наименьших квадратов. Исследована устойчивость решений по отношению к неточностям в выборе весовых коэффициентов в соответствующей оптимизационной проблеме.

Еще один важный результат состоит в том, что установлена эффективность простого с вычислительной точки зрения метода Вейсфелда и оценок уровней неоптимальности при обработке больших массивов измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-08-00004a

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акимов, П.А.** Уровни неоптимальности алгоритма Вейсфелда в методе наименьших модулей / П.А. Акимов, А.И. Матасов // Автоматика и телемеханика. - 2010. - №2. - С. 4-16.
2. **Акимов, П.А.** Оценка смещений в инерциальных датчиках БИНС посредством l_1 -аппроксимации / П.А. Акимов, А.И. Матасов // Автоматика и телемеханика. - 2011. - №2.
3. **Болотин, Ю.В.** Алгоритмы калибровки платформенной инерциальной навигационной системы / Ю.В. Болотин [и др.] // Гироскопия и навигация. - 2008. - №3. - С. 13-26.
4. **Голован, А.А.** Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации / А.А. Голован, Н.А. Парусников. - М.: Изд-во МГУ, 2010.
5. **Дмитриев, С.П.** Многоальтернативная фильтрация в задачах обработки навигационной информации / С.П. Дмитриев, О.А. Степанов. // Радиотехника, 2004. - №7.
6. **Кошаев, Д.А.** Многоальтернативный метод обнаружения и оценки нарушений на основе расширенного фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. - 2010. - №5. - С. 70-83.
7. **Лоусон, Ч.** Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон - М.: Наука, 1986.
8. **Мудров, В.И.** Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. - М.: Радио и связь, 1983.
9. **Парусников, Н.А.** Задача коррекции в инерциальной навигации / Н.А. Парусников, В.М. Морозов, В.И. Борзов - М.: Изд-во МГУ, 1982.
10. **Bloomfield P., Steiger W.L.** Least Absolute Deviations: Theory, Applications, and Algorithms. - Boston-Basel-Stuttgart: Birkhauser, 1983.
11. **Boyd S., Vandenberghe L.** Convex Optimization. - Cambridge University Press, 2004.
12. **Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.** Linear Estimation. - New Jersey, Prentice Hall, 2000.

Abstract. In practice, the cases are not uncommon when rare jumps (of a step type) can occur in the errors of sensors (accelerometers or gyroscopes). Then, in particular, the system is not subject to calibration and must be brought to a standard condition. So, the presence of jumps is important for making a decision about the admittance of SDINS to the operation. Therefore, the problem of such failures detection is topical. Usually, the navigation algorithms (including calibration algorithms) are based on the Kalman filtering theory. Their distinctive feature is that they resolve quadratic optimization problems and therefore are very convenient from the computational point of view. Because of the jump variations of signals the estimates obtained by standard quadratic methods are not sufficiently accurate. Thus one needs to elaborate the estimation algorithms that are robust with respect to the jumps in the errors of sensors. The paper is devoted to a nonstandard method for processing the output signals of SDINS. We propose to use an l_1 -norm approximation based approach (cf. (16)) that allows us to estimate efficiently the state of dynamic systems even under anomalous variation of the errors (see figures 1-3).

Key words: SDINS, failures, Nonsmooth Optimization, signal processing.

Материал поступил 24.06.11