

О. А. БАБИЧ

УЧЕТ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ В АЛГОРИТМАХ АЗИМУТАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ

В современных бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) курсовой угол самолета обычно вычисляется как сумма двух углов: азимута «платформы» и гироскопического курса. Каждый из этих двух углов, обязательно оставаясь в сумме равным текущему курсу самолета, может носить многозначный характер в зависимости от начальных условий выставки азимутального канала и от траектории движения самолета на предыдущих этапах полета. Исследована эта неоднозначность и ее учет в алгоритмах коррекции курсового канала БИНС.

Введение

В данной статье координатные трехгранники будут обозначаться буквами B (Body), N (Navigation), N_{geo} (Geodetic), E (Earth) и I (Inert). Оси XB, YB, ZB трехгранника B совпадают с осями самолета (рис. 1, а). Курсовые углы и азимуты отсчитываются по часовой стрелке в горизонтальной плоскости от направления на Север (YN_{geo}) (рис. 1, в), а гироскопический курс ψ_{Γ} самолета – по часовой стрелке от оси YN . При этом истинный курс ψ , гироскопический курс ψ_{Γ} и угол A азимута «платформы» связаны соотношением

$$\psi = \psi_{\Gamma} + A. \quad (1)$$

Будем применять следующую систему обозначений:

- произвольный вектор $\vec{r}$ в проекциях на оси некоторого трехгранника $A1$ будет записываться в виде $\vec{r}^{A1} = (\vec{r} \cdot \vec{XA1}, \vec{r} \cdot \vec{YA1}, \vec{r} \cdot \vec{ZA1})^T = (r_{XA1}, r_{YA1}, r_{ZA1})^T$;
- угловая скорость «подвижного» трехгранника $A2$ относительно трехгранника $A1$, взятая в проекциях на трехгранник $A3$, будет записываться в виде $\vec{\omega}_{A1A2}^{A3}$;
- ортогональная матрица перехода от трехгранника $A1$ к трехграннику $A2$ будет иметь обозначение C_{A1}^{A2} , так что $\vec{r}^{A2} = C_{A1}^{A2} \vec{r}^{A1}$. Элементы матрицы C_{A1}^{A2} будем обозначать $c_{ij}(A1, A2)$;
- единичный вектор (орт) произвольного вектора $\vec{r}$ в проекциях на трехгранник $A1$ будет обозначаться $\vec{u}_{\vec{r}}^{A1}$, так что $u_{\vec{r}}^{A1} = \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r}^{A1}$.

Бабич Олег Александрович. Доктор технических наук, главный научный сотрудник ОАО «Московский институт электромеханики и автоматики». Действительный член Академии навигации и управления движением.

Матрица векторного умножения для вектора $\vec{r}^{A1}$ будет иметь вид

$$(\vec{r}^{A1} \times) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{ZA1} & r_{YA1} \\ r_{ZA1} & 0 & -r_{XA1} \\ -r_{YA1} & r_{XA1} & 0 \end{pmatrix}.$$

В статье рассмотрен наиболее распространенный тип БИНС, когда «аналитическая платформа» (или, другими словами, навигационный трехгранник XN, YN, ZN рис 1, б) вращается относительно вертикальной оси $\vec{u}_{ZN}^N$ в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\vec{\omega}_{IN}^N \cdot \vec{u}_{ZN}^N = \Omega \sin B$. Вертикальная угловая скорость «платформы» относительно Земли при этом будет равна нулю: $\vec{\omega}_{EN}^N \cdot \vec{u}_{ZN}^N = 0$ [1–3]. Тогда говорят, что БИНС работает в режиме гироскопа (ГПК) или в режиме Wander Azimuth.

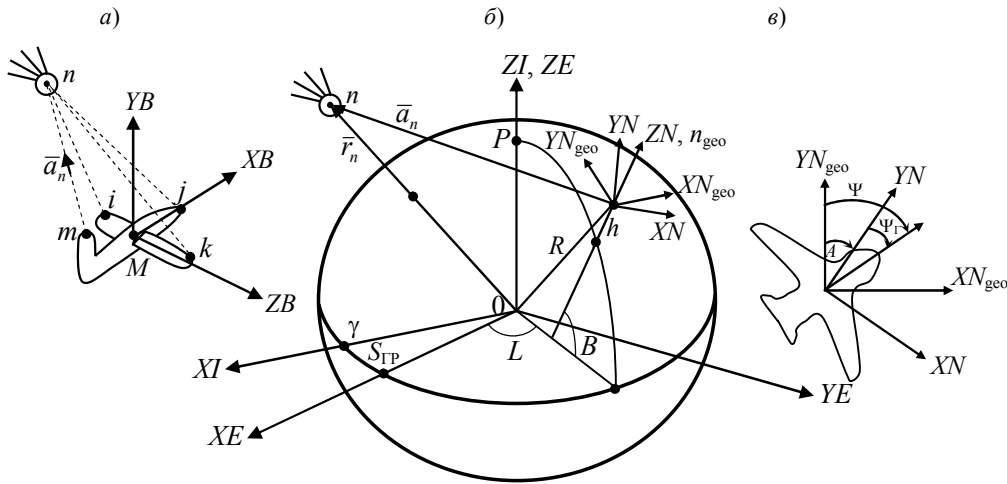


Рис. 1. Навигационные трехгранники и отсчеты углов

Известно [3], что в выбранном режиме ГПК алгоритм счисления координат B, L самолета и азимута A «платформы» (рис. 1) имеет вид:

$$\begin{aligned} V_{YNgeo} &= -V_{XN} \sin A + V_{YN} \cos A, & V_{XNgeo} &= V_{XN} \cos A + V_{YN} \sin A, \\ \dot{B} &= Q^{-1} V_{YNgeo}, & B(t_0) &= B_0; \\ \dot{L} &= (G \cos B)^{-1} V_{XNgeo}, & L(t_0) &= L_0; \\ \dot{A} &= \dot{L} \sin B = G^{-1} V_{XNgeo} \operatorname{tg} B, & A(t_0) &= A_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= a(1 - e^2) \xi^3 + h, & G &= a \xi + h, \\ \xi(B) &= (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}, & e^2 &= (a^2 - b^2)/a^2, \end{aligned}$$

Q и G – главные радиусы кривизны поверхности, поднятой на геодезическую высоту полета h над поверхностью земного эллипсоида с полуосями a и b ; V_{XN} и V_{YN} – горизонтальные проекции вектора скорости самолета относительно Земли, отнесенные к осям XN и YN .

Выражения (2) являются частью общей системы уравнений БИНС. Для этого блока уравнений функции V_{XN} и V_{YN} являются входными сигналами.

Необходимо подчеркнуть, что алгоритм счисления (2) имеет полностью эквивалентный аналог, записанный в форме матриц направляющих косинусов или кватернионов, который чаще всего и применяется на практике [2]. Далее будет рассмотрен и этот случай. Форма (2) более удобна для исследовательских целей, так как имеет ясный геометрический смысл (см. рис. 1).

Переходя к существу дела, заметим, что фазовые координаты $B(t)$, $L(t)$ и $A(t)$ – системы дифференциальных уравнений (2), как это видно из самой этой системы, подчиняются уравнению связи

$$\dot{A} - \dot{L} \sin B = 0. \quad (3)$$

Уравнение связи (3) включает в себя не только сами фазовые координаты B , но и производные от фазовых координат $\dot{A}, \dot{L}$. В теоретической механике системы с дифференциальными связями принято называть неголономными.

Дальнейшие исследования будут посвящены изучению свойств курсового канала БИНС с учетом связи (3). Будет доказано, что коррекцию курсового канала следует проводить только за счет угла A азимута «платформы», не внося при этом в текущую величину ψ_{Γ} гироскопического курса никаких корректив. Таким образом, с точки зрения технической реализации неголономная связь (3) играет положительную роль. Вместо необходимости одновременной коррекции двух фазовых координат A и ψ_{Γ} возникает возможность корректировать только одну медленно изменяющуюся координату $A(t)$, считая быстро изменяющуюся координату $\psi_{\Gamma}(t)$ за истинную величину.

Интересно также пояснить следующее. Неголономные свойства связи (3) мы задали с формально-математической точки зрения по факту, что в уравнениях связи (3) входят производные от фазовых координат. В аналитической механике связь рассматривается как взаимодействия в системе, состоящей из двух и более тел. Классическими примерами неголономных систем являются шар или круглый диск, катящийся по абсолютно шероховатой поверхности, или конёк, скользящий по льду. А какие тела взаимодействуют в случае бортовых инерциальных систем? Это тело самолёта (body) и тело платформы, связанной с самолётом с помощью карданова подвеса (в случае БИНС механическая подвеска заменяется на абсолютно адекватную виртуальную). Оказывается пара «body-платформа» является неголономной вращательной системой, тип которой рассмотрен в книге [4, стр. 236], когда вокруг материальной оси неподвижно связанной с первым телом свободно вращается второе тело. Далее показано, что для конкретного случая, который рассматривается в статье, неголономные координаты A и ψ_{Γ} относятся только к внутренним сигналам БИНС, а самолёт, взятый как отдельное тело, является голономной системой.

В случае использования спутниковых радионавигационных систем самолёт как твёрдое тело движется в радиополе, созданном созвездием радионавигационных спутников. Здесь нет взаимодействия тел, и понятия неголономных связей здесь не возникает.

Отметим также, что известное [1, 2] явление конического движения в контуре ориентации тоже порождается связями неголономного типа. Требуются большие вычислительные затраты для его компенсации. Так что неголономные связи в контуре ориентации играют как бы отрицательную роль. Парадоксаль-

но, что в контуре навигации неголономная связь (3) играет положительную роль, позволяя снизить вычислительные затраты в режиме коррекции азимутального канала.

Изменения угла азимута «платформы» на различных траекториях полета

Пусть объект движется по замкнутой траектории в виде взятой на поверхности эллипсоида прямоугольной трапеции, обозначенной точками $abcd$ на рис. 2. Тогда в соответствии с (2) и (3) значения угла A в точках маршрута $abcd$ будут равны:

$$\begin{aligned} A_a = A_0, \quad A_b = A_a = A_0, \quad A_c = A_0 + \sin B_2 \cdot \Delta L, \quad A_d = A_c, \\ A_a = A_0 + (\sin B_2 - \sin B_1) \cdot \Delta L, \end{aligned} \quad (4)$$

где A_0 – первоначальный угол азимута платформы в исходной точке a .

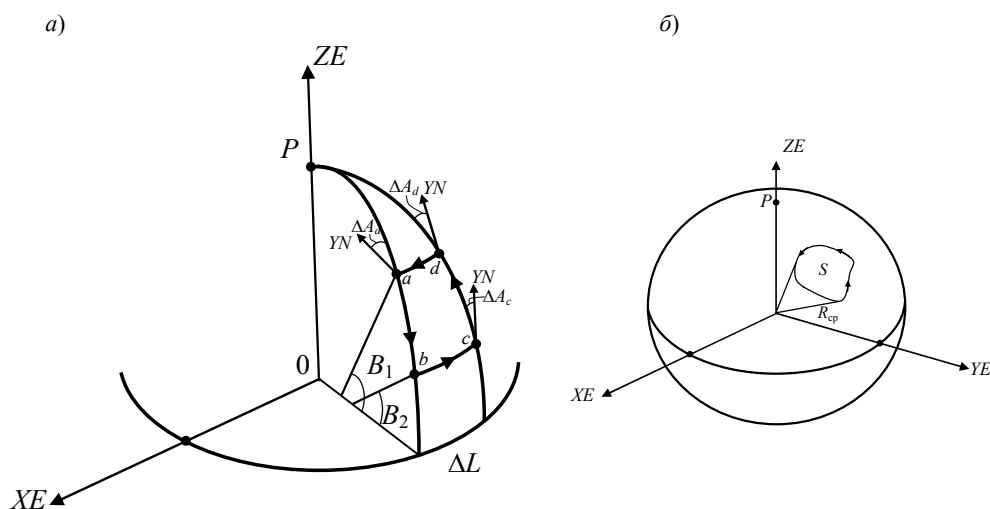


Рис. 2. Движения по замкнутому трапецидальному маршруту (а) и по замкнутому маршруту произвольной формы (б)

Как видно из (4), при движении по замкнутой линии (в данном случае против часовой стрелки) происходит приращение

$$\Delta A_a = (\sin B_2 - \sin B_1) \cdot \Delta L < 0, \text{ если } B_1 > B_2. \quad (5)$$

Отрицательное значение здесь появляется потому, что по традиции азимуты и курсовые углы отсчитываются по часовой стрелке. Если величину $\Delta B = B_2 - B_1$ рассматривать в (5) как достаточно малую, то можно приближенно записать

$$\Delta A_a \approx \cos B \Delta L \Delta B. \quad (6)$$

Значение ΔA_a в (5) и (6) можно трактовать как телесный угол S фигуры $abcd$ из центра Земли, которая принимается здесь за шар со средним радиусом R_{cp} . Телесному углу S приписывается знак «плюс» или «минус» в зависимости от направления обхода контура.

Это соответствует известной теореме А.Ю.Ишлинского о телесном угле [4], справедливой для произвольной замкнутой кривой на сфере. Из этой теоремы

следует, что изменение угла ΔA на произвольной замкнутой траектории (рис. 2), взятой на земном эллипсоиде (который близок к сфере с радиусом R_{cp}), будет равно

$$\Delta A \approx \mp S / R_{cp}^2, \quad R_{cp} = 6\,371\,116 \text{ м.} \quad (7)$$

Знак в формуле (7) соответствует направлению обхода контура. Порядок величин рассмотрим на числовом примере. Пусть на маршруте длиной 5000 км постоянная составляющая бокового отклонения от номинальной линии пути равна 5 км. Разница ΔA углов A в конечной точке для отклоненной и номинальной траектории согласно (7) будет $\Delta A = \pm 2,117$ угл. мин. Знак «плюс» будет иметь место, если реальная траектория лежит левее номинальной, а знак «минус», если правее. Нужно подчеркнуть, что ΔA в этом примере не является погрешностью, а наоборот, точно отражает специфику движения.

Рассмотрим рис. 3, на котором изображено движение двух самолетов по двум частично совпадающим траекториям. Рассмотрим разницу $\Delta A_e = \Delta A_e^2 - \Delta A_e^1$ в значениях углов азимутов «платформ» (вычисляемых без погрешностей) на первом и втором самолетах в точке e маршрута. В соответствии с (7) имеем:

$$\Delta A_e = \Delta A_{bde}^2 - \Delta A_{bce}^1 = \Delta A_{bde}^2 - (-\Delta A_{ecb}^1) = \Delta A_{bdc}^2 + \Delta A_{ecb}^1 = S_{bdecb} / R_{cp}^2, \quad A_e^2 > A_e^1. \quad (8)$$

$$A_e^2 = A_e^1 + C, \quad C = \Delta A_e.$$

Таким образом, в точку e маршрута самолет может приходить со значением азимута A_e «платформы», носящим многозначный характер, так как постоянная $C = \Delta A_e$ зависит от предыдущей траектории движения самолета.

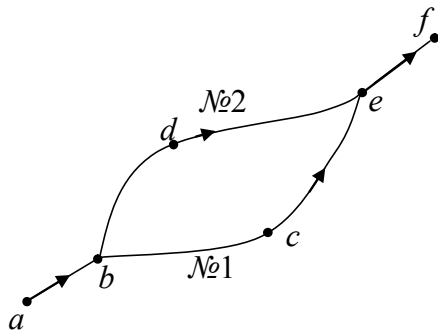


Рис. 3. Многообразие траекторий

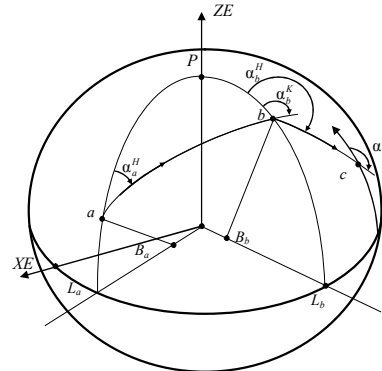


Рис. 4. Изменение угла A на отрезках маршрута

Рассмотрим теперь движение на линии ef и выходные сигналы идеальной БИНС на этой линии. Ясно, что ее «главные» выходные сигналы, такие как широта B , долгота L , проекции земного вектора скорости в географическом трехграннике $V_{XNgeo}, V_{YNgeo}, V_{ZNgeo}$ и углы ориентации: истинного курса ψ , тангажа ϑ и крена γ , будут всегда равны тем реальным величинам, с которыми движется самолет по текущей траектории в данное мгновение и не будут зависеть от уже пройденной траектории. Четыре «вспомогательных» сигнала могут иметь целый континуум (постоянная C в (8)) значений, которые зависят от пройденной ранее траектории. К ним относятся A, ψ, V_{XN}, V_{YN} , которые связаны соотношениями (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} A &= A'(t) + C, \quad \psi_{\Gamma} = \psi'_{\Gamma} - C, \quad A + \psi_{\Gamma} = A' + \psi'_{\Gamma} = \psi, \\ V_{XN} &= V_{XN'} \cos C - V_{YN'} \sin C, \quad V_{YN} = V_{XN'} \sin C + V_{YN'} \cos C. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) штрих обозначает величины, относящиеся к траектории № 1 полета $abcef$, которую мы условно приняли здесь в качестве опорной. Величина C не является произвольной постоянной, так как для каждой траектории она конкретна и равна телесному углу фигуры, очерченной данной и опорной траекториями.

Отметим еще одно свойство пары сигналов $[A(t), \psi_{\Gamma}(t)]$. Пусть самолет (см. рис. 4) движется из точки a с постоянным гироскопическим курсом $\psi_{\Gamma} = \text{const}$, а в начальной точке a азимут платформы был равен A_a . В этом случае самолет будет двигаться по геодезической линии, которая исходит из точки a с начальным азимутом

$$\alpha_a^H = A_a + \psi_{\Gamma}. \quad (10)$$

Это удивительное свойство следует из подобия дифференциальных уравнений (11) геодезической линии и дифференциальных уравнений счисления (2) [3, 6]:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin \alpha}{G} \operatorname{tg} B, \quad \alpha(0) = \alpha_0; \quad \frac{dB}{ds} = \frac{\cos \alpha}{Q}, \quad B(0) = B_0; \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin \alpha}{G \cos B}, \quad L(0) = L_0. \quad (11)$$

Подобие становится очевидным, если элемент дуги ds в (11) положить равным $ds = V dt$, а текущий угол α азимута геодезической линии взять равным $\alpha = A + \psi_{\Gamma}$. При этом нужно учесть, что будут выполняться равенства:

$$V_{YN_{geo}} = V \cos(A + \psi_{\Gamma}), \quad V_{XN_{geo}} = V \sin(A + \psi_{\Gamma}).$$

В таком случае при движении по линии ab изменение азимута «платформы» с учетом (10) будет равно разности азимутов геодезической линии в начальной a и конечной b точках

$$\Delta A_{ab} = A_b - A_a = (\alpha_b^K - \psi_{\Gamma}) - (\alpha_a^H - \psi_{\Gamma}) = \alpha_b^K - \alpha_a^H. \quad (12)$$

Если из точки b следует далее двигаться в новую точку c , то из точки b нужно двигаться с новым постоянным гироскопическим курсом ψ_{Γ}^2 (см. рис. 4)

$$\alpha_b^H = A_b + \psi_{\Gamma}^2 = \alpha_b^K - \psi_{\Gamma}^1 + \psi_{\Gamma}^2, \quad \psi_{\Gamma}^2 = \psi_{\Gamma}^1 + \alpha_b^H - \alpha_b^K. \quad (13)$$

На отрезках длиной до 4000 км геодезические линии, соединяющие две точки, практически совпадают с ортодромиями, соединяющими эти же точки, а также с маршрутными линиями, соединяющими радиомаяки ближней навигации (VOR, РСБН), расположенными в этих точках. Поэтому можно утверждать, что на стандартных маршрутах приращение угла ΔA будет с высокой точностью равняться сумме приращений азимутов (12) на каждом колене маршрута (рис. 5).

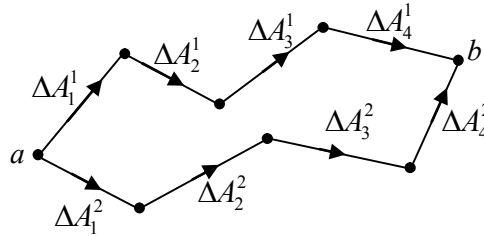


Рис. 5. Стандартные полеты по маршрутам

Итак, неголономная связь вида (3) привела к связи (9), которую можно трактовать следующим образом: в любой момент времени величины $A(t), \psi_\Gamma(t), V_{XN}(t), V_{YN}(t)$ могут быть изменены по закону (9) при заданной величине $\psi(t)$ текущего угла курса самолета.

Формы представления выходной навигационной информации

Исчерпывающая навигационная информация заключена в следующих математических величинах – матрицах навигации C_N^E или C_{Ngeo}^E , векторе скорости $\bar{V}^N$ или $\bar{V}^{Ngeo}$ и матрицах ориентации C_B^N или C_B^{Ngeo} .

Матрицы $C_N^E(B, L, A)$ и $C_B^N(\psi_\Gamma, \vartheta, \gamma)$, а также вектор $\bar{V}$ связаны с эйлеровыми углами навигации (B, L, A) и углами ориентации $(\psi_\Gamma, \vartheta, \gamma)$ соотношениями (14)–(19) [1–3]:

$$C_N^E = \begin{pmatrix} -\sin L \cos A + \sin B \cos L \sin A & -\sin L \sin A - \sin B \cos L \cos A & \cos L \cos B \\ \cos L \cos A + \sin B \sin L \sin A & \cos L \sin A - \sin B \sin L \cos A & \sin L \cos B \\ -\cos B \sin A & \cos B \cos A & \sin B \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$B = \arctg \frac{c_{33}(NE)}{\sqrt{c_{31}^2(NE) + c_{32}^2(NE)}} [-\pi/2, \pi/2], \quad (15)$$

$$L = \arctg \frac{c_{23}(NE)}{c_{13}(NE)} [-\pi, \pi], \quad A = \arctg \frac{-c_{31}(NE)}{c_{32}(NE)} [0, 2\pi].$$

$$\begin{cases} V_{XNgeo} = V_{XN} \cos A + V_{YN} \sin A, \\ V_{YNgeo} = -V_{XN} \sin A + V_{YN} \cos A \end{cases} \quad \begin{cases} V_{XN} = V_{XNgeo} \cos A - V_{YNgeo} \sin A, \\ V_{YN} = V_{XNgeo} \sin A + V_{YNgeo} \cos A. \end{cases} \quad (16)$$

$$C_B^N = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \psi_\Gamma & \sin \gamma \cos \psi_\Gamma - \sin \psi_\Gamma \cos \gamma \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \psi_\Gamma + \sin \psi_\Gamma \sin \gamma \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \psi_\Gamma & -\sin \gamma \sin \psi_\Gamma - \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi_\Gamma & -\sin \psi_\Gamma \cos \gamma + \cos \psi_\Gamma \sin \gamma \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\psi_\Gamma = \arctg \frac{c_{11}(BN)}{c_{21}(BN)} [0, 2\pi], \quad \vartheta = \arctg \frac{c_{31}(BN)}{\sqrt{c_{32}^2(BN) + c_{33}^2(BN)}} [-\pi/2, \pi/2], \quad (18)$$

$$\gamma = \arctg \frac{-c_{33}(BN)}{c_{32}(BN)} [-\pi, \pi].$$

Для матриц C_{Ngeo}^E, C_B^{Ngeo} имеют место очевидные соотношения:

$$C_{Ngeo}^E(B, L) = C_N^E(B, L, A = 0), \quad C_B^{Ngeo}(\psi, \vartheta, \gamma) = C_B^N(\psi_\Gamma = \psi, \vartheta, \gamma),$$

$$C_B^E = C_N^E C_B^N = C_{Ngeo}^E C_B^{Ngeo}, \quad C_B^{Ngeo} = (C_{Ngeo}^E)^T C_B^E, \quad \psi = \text{Arctg} \frac{c_{11}(BN_{geo})}{c_{21}(BN_{geo})}, \quad (19)$$

$$A = \psi - \psi_\Gamma.$$

Из (19) следует, что по известным (например, от неинерциальных источников) данным о матрицах C_B^E , $C_{Ngeo}^E(B, L)$ и по гироскопическому углу ψ_Γ могут быть вычислены корректирующие матрицы навигации $C_N^E(B, L, A)$ и ориентации $C_B^N = (C_N^E)^T C_B^E$:

$$C_B^E = C_{Ngeo}^E C_B^{Ngeo}, \quad C_B^{Ngeo}(\psi, \nu, \gamma) = (C_{Ngeo}^E(B, L))^T C_B^E \Rightarrow \psi \Rightarrow A = \psi - \psi_\Gamma \Rightarrow \Rightarrow \text{по формуле (14)} C_N^E(B, L, A) \Rightarrow C_B^N = (C_N^E)^T C_B^E. \quad (20)$$

В (20) предполагается, что координаты B, L, h и вектор скорости $\bar{V}^N$ стандартным образом пересчитываются от точки m (см. рис. 1, а) к точке M навигационного центра БИНС [1, 2].

Алгоритмы бортовых навигационных систем БИНС и спутниковой радионавигационной системы с 4-мя антеннами (СРНС-4)

Основной алгоритм БИНС предназначен для вычисления матрицы ориентации C_B^N , вектора скорости $\bar{V}^N$ и матрицы навигации C_N^E . Он записывается в форме непрерывных обыкновенных дифференциальных уравнений и может быть представлен в виде следующих трех вычислительных блоков [1, 2].

1. *Вычисление матрицы ориентации $C_B^N(t)$:*

$$\begin{aligned} \dot{C}_B^N &= C_B^N (\bar{\omega}_{IB}^B \times) - (\bar{\omega}_{IN}^N \times) C_B^N, \\ \bar{\omega}_{IE}^N &= (C_N^E)^T \bar{\omega}_{IE}^E, \quad \bar{\omega}_{EN}^N \equiv \bar{\rho}^N = F_C^N (\bar{u}_{ZN}^N \times \bar{V}^N) + \rho_{ZN} \bar{u}_{ZN}^N, \\ \rho_{ZN} &= 0 \text{ (для ГПК, Wander Azimuth),} \\ \bar{\omega}_{IN}^N &= \bar{\omega}_{IE}^N + \bar{\omega}_{EN}^N. \end{aligned} \quad (21)$$

где F_C^N – матрица кривизны эллипсоида [1, 3] в направлении горизонтальных осей XN, YN .

2. *Вычисление скорости $\bar{V}^N(t)$*

$$\dot{\bar{V}}^N = C_B^N \bar{a}_{SF}^B + \bar{g}^N - \bar{\omega}_{IE}^N \times (\bar{\omega}_{IE}^N \times \bar{R}^N) - (\bar{\omega}_{IN}^N + \bar{\omega}_{IE}^N) \times \bar{V}^N, \quad (22)$$

3. *Вычисление матрицы навигации $C_N^E(t)$ и высоты полета $h(t)$:*

$$\dot{C}_N^E = C_N^E (\bar{\rho}^N \times), \quad \bar{\rho}^N = \bar{\omega}_{EN}^N, \quad \dot{h} = \bar{u}_{ZN}^N \cdot \bar{V}^N. \quad (23)$$

Входными сигналами в алгоритм БИНС (21)–(23) являются вектор угловой скорости $\bar{\omega}_{IB}^B(t)$ и вектор сигналов акселерометров $\bar{a}_{SF}^B(t)$.

Основной алгоритм 4-антенной СРНС предназначен для вычисления тех же навигационных параметров, что и алгоритм БИНС, т. е. для определения матриц направляющих косинусов C_B^N, C_N^E и вектора скорости $\bar{V}^{Ngeo}$ по сигналам СРНС [5]. Пусть на борту самолета (рис. 1) в некопланарных точках i, j, k, m с известными конструктивными координатами $\bar{r}_\mu^B = (r_{\mu XB}, r_{\mu YB}, r_{\mu ZB})^T, \mu = i, j, k, m$

размещены четыре антенны спутникового навигационного приемника. Антенну m условно будем считать ведущей. Тогда матрицы C_B^N, C_N^E и $C_B^E = C_N^E C_B^N$ с помощью этих четырех антенн могут быть определены описанным ниже способом [5]. Если радиоволну от спутника в районе полета самолета считать плоской, то из рис. 1 и 6 следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{l}_\mu^E &= \bar{R}_\mu^E - \bar{R}_m^E, \mu = i, j, k; \quad \bar{a}_n^E = \frac{\bar{r}_n^E - \bar{R}_m^E}{S_{nm}}, n = 1, 2, 3, \\ \bar{a}_n^E \cdot \bar{l}_\mu^E &= S_{\mu m}^n = \frac{\lambda}{2\pi} (\varphi_\mu^n - \varphi_m^n) = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_{\mu m}^n. \end{aligned} \quad (24)$$

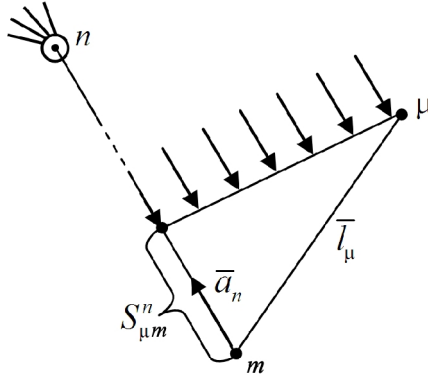


Рис. 6. Волновой фронт и положение отрезка $\bar{l}_\mu$

В уравнении (24) $\Delta\varphi_{\mu m}^n(t)$ представляет собой разность фаз радиосигнала от n -го спутника в точках μ и m . Здесь λ – длина волны (18–20 см), а S_{nm} – расстояние от n -го спутника до антенны m . Таким образом, величина $S_{\mu m}^n$ – это разница длин путей от точки n -го спутника до точек μ и m соответственно. Считается, что фазовая неоднозначность уже разрешена и что значения разностей фаз $\Delta\varphi_{\mu m}^N$ могут лежать вне диапазона $(0, 2\pi)$ [5]. Величины $\bar{r}_n^E, \bar{R}_m^E, S_{nm}$ в (24) непосредственно измеряются или вычисляются приемником, так что векторы $\bar{a}_n^E$ можно считать известными.

Уравнение (24), записанное в скалярной форме для элементов вектора $\bar{l}_\mu^E = (l_{\mu XE}, l_{\mu YE}, l_{\mu ZE})^T$, принимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{1XE} & a_{1YE} & a_{1ZE} \\ a_{2XE} & a_{2YE} & a_{2ZE} \\ a_{3XE} & a_{3YE} & a_{3ZE} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{\mu XE} \\ l_{\mu YE} \\ l_{\mu ZE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\mu m}^1 \\ S_{\mu m}^2 \\ S_{\mu m}^3 \end{pmatrix}, \mu = i, j, k. \quad (25)$$

Определив из (24) векторы $\bar{l}_i^E, \bar{l}_j^E, \bar{l}_k^E$, можем найти искомую матрицу $C_{B(t)}^E$ из уравнения

$$\begin{pmatrix} l_{iXE} & l_{jXE} & l_{kXE} \\ l_{iYE} & l_{jYE} & l_{kYE} \\ l_{iZE} & l_{jZE} & l_{kZE} \end{pmatrix} = C_B^E \cdot \begin{pmatrix} l_{iXB} & l_{jXB} & l_{kXB} \\ l_{iYB} & l_{jYB} & l_{kYB} \\ l_{iZB} & l_{jZB} & l_{kZB} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

так как матрица в правой части (26) является постоянной и известной.

Итак, 4-антенный приемник СРНС измеряет координаты B, L, h точки M , скорость $\bar{V}^{Ngeo}$ этой точки и матрицу C_B^E , т.е. измеряются те же величины C_B^N, C_N^E и $\bar{V}^N$, что и в БИНС. Это, в свою очередь, означает, что в силу полного совпадения перечня измеряемых параметров движения этими приборами, теоретически возможна как коррекция, так и выставка БИНС по сигналам СРНС-4 за один шаг решения задачи (при условии, что погрешностями корректора пренебрегается и не ставится задача оценивания и компенсации дрейфов и других инструментальных погрешностей).

Другими традиционными корректорами для БИНС являются оптические и радиолокационные системы наблюдения за поверхностью Земли, доплеровские измерители, радиосистемы ближней и дальней навигации и астросистемы. Для них не удастся построить полный ряд аналогичных выходных сигналов, как это было получено выше для СРНС-4. Например, астросистема принципиально дает возможность определить только матрицу C_B^I и с учетом звездного гринвичского времени $S_{GP}(t)$ матрицу C_B^E . Во всех этих случаях число корректирующих сигналов меньше размерности модели, описывающей погрешности БИНС. Поэтому всегда приходится строить фильтр Калмана для совместной обработки сигналов от перечисленных приборов [1, 3]. Однако выявленная неголономная особенность курсового канала также может и должна учитываться во всех этих случаях.

Точная математическая формулировка учета неголономной связи сигналов БИНС состоит в следующем.

1. Основной алгоритм (21)–(23) БИНС остается без изменений.
2. В стохастической модели погрешностей БИНС сигнал $\psi_\Gamma(t)$ считается детерминированной функцией (т. е. принимается, что $\Delta\psi_\Gamma \equiv 0$),
3. В правую часть дифференциального уравнения погрешности $\Delta A(t)$ добавляется угловая скорость дрейфа «платформы» относительно вертикальной оси $\bar{u}_{ZN}^N$.

При таком подходе две фазовые координаты $(\Delta\psi_\Gamma, \Delta A)$ в модели погрешностей ИНС заменяются на одну видоизмененную координату: $\Delta A \doteq \Delta A + \Delta\psi_\Gamma$, для которой дифференциальное уравнение будет иметь вид [3, с. 348-350]):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{A} = & a^{-1} \operatorname{tg} B (\Delta V_{XN} \cos A + \Delta V_{YN} \sin A + V_{YNgeo} \Delta A) + (a \cos^2 B)^{-1} V_{XNgeo} \Delta B + \\ & + (-a^{-1} V_{YN} \gamma + a^{-1} V_{XN} \beta + \bar{\omega}_{dr} \cdot \bar{u}_{ZN}^N), \quad \Delta\psi_\Gamma = \alpha = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В (27) углы α, β, γ – это малые углы ошибочных поворотов «платформы», задаваемые матрицей $C_N^{\tilde{N}}$. При этом поворот на угол β осуществляется вокруг

оси XN , на угол $-\gamma$ вокруг оси YN , а на угол α (курсовой дрейф «платформы») вокруг оси ZN ; $\bar{\omega}_{dr}$ – скорость дрейфа гироскопов.

Интересно отметить, что при предлагаемом подходе фазовые координаты A и ψ_L , которые рассчитываются в разных контурах (21) и (23) основного алгоритма, остаются в прежнем классическом виде. В то время как в дифференциальных уравнениях погрешностей фазовые координаты ΔA и $\Delta\psi_L$ получают новое толкование (27).

Вопросы построения стохастической модели погрешностей курсового канала БИНС рассмотрены в [7] из других исходных позиций, при этом получены результаты, близкие к изложенным в данной работе.

«Следящее» аналитическое управление ортогональной матрицей по данным об ее идеальном значении

Пусть имеются точное значение матрицы $C_N^E(t)$ и искаженное (с ошибками) ее значение $\tilde{C}_N^E(t)$, вычисляемое по алгоритму Пуассона в бортовом компьютере БИНС по неточным данным:

$$\dot{\tilde{C}}_N^E = \tilde{C}_N^E (\tilde{\omega}_{EN}^N \times), \quad \tilde{C}_N^E = C_N^E = C_N^E C_N^N, \quad C_N^N \approx I + (\bar{\varepsilon}^N \times), \quad (\bar{\varepsilon}^N \times) = (C_N^E)^T \tilde{C}_N^E - I. \quad (28)$$

$$\Delta C_N^E = \tilde{C}_N^E - C_N^E = C_N^E (I + (\bar{\varepsilon}^N \times)) - C_N^E = C_N^E (\bar{\varepsilon}^N \times), \quad (\bar{\varepsilon}^N \times) = (C_N^E)^T \Delta C_N^E. \quad (29)$$

Здесь $\sim$ означает символ ошибки.

Вектор $\bar{\varepsilon}^N$ малого поворота (ошибки), соответствующий преобразованию C_N^N , естественно, записывается в системе координат N . Если матрицу ΔC_N^E с учетом (14) представить в виде

$$\Delta C_N^E = \frac{\partial}{\partial B} C_N^E(B, L, A) \cdot \Delta B + \frac{\partial}{\partial L} C_N^E \cdot \Delta L + \frac{\partial}{\partial A} C_N^E \cdot \Delta A, \quad (30)$$

то кососимметричная матрица $(\bar{\varepsilon}^N \times)$ малого поворота может быть вычислена по формуле (29) и тем самым выражена через $\Delta B, \Delta L, \Delta A$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XN} &= -\Delta B \cos A - \Delta L \cos B \sin A, & \varepsilon_{YN} &= -\Delta B \sin A + \Delta L \cos B \cos A, \\ \varepsilon_{ZN} &= -\Delta A + \Delta L \sin B. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражения (24) имеют прозрачный геометрический смысл (см. рис. 1) и могли бы быть получены из элементарных соображений по малым поворотам $\Delta B, \Delta L, \Delta A$ навигационного трехгранника XN, YN, ZN .

Главной задачей данного раздела является вопрос, как «заставить» матрицу $\tilde{C}_N^E(t)$ стремиться к матрице $C_N^E(t)$. Из (28) ясно, что для этого нужно к угловым скоростям $\tilde{\omega}_{EN}^N(t)$, вырабатываемым основным алгоритмом БИНС, добавить еще дополнительную угловую скорость, пропорциональную угловому расхождению $\bar{\varepsilon}^N(t)$ и направленную в противоположную сторону. При этом с

учетом малости $\bar{\varepsilon}^N$ и ΔC_N^E получим искомый алгоритм «слежения», записанный в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{C}}_N^E &= \tilde{C}_N^E (\tilde{\omega}_{EN}^N \times -K \bar{\varepsilon}^N \times), \\ \dot{\tilde{C}}_N^E &= \tilde{C}_N^E (\tilde{\omega}_{EN}^N \times) + K(C_N^E - \tilde{C}_N^E).\end{aligned}\quad (32)$$

Заметим, что выражение (32) имеет форму калмановской оценки, если матрицу коэффициентов усиления K рассматривать как переменную и вычисляемую из уравнения Риккати, которое должно соответствовать принятым гипотезам о погрешностях БИНС и корректоров. Этот алгоритм, естественно, имеет общий характер и может быть использован и для коррекции матрицы $\tilde{C}_B^N$.

В заключение приведем полный алгоритм коррекции БИНС по сигналам от 4-антенной СРНС. В (33) сигналы, поступающие от СРНС, имеют индекс *, а оптимальные выходные сигналы комплексной системы – индекс $\sim$:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{C}}_B^N &= \tilde{C}_B^N (\bar{\omega}_{IB}^N \times) - (\bar{\omega}_{IN}^N \times) \tilde{C}_B^N + K(C_B^{N*} - \tilde{C}_B^N), \quad \bar{\omega}_{IN}^N = \bar{\omega}_{IE}^N + \bar{\omega}_{EN}^N, \quad \bar{\omega}_{EN}^N = F_C^N (\bar{u}_{ZN}^N \times \tilde{V}^N), \\ \dot{\tilde{V}}^N &= \tilde{C}_B^N \bar{a}_{SF}^B + \bar{g}^N - \bar{\omega}_{IE}^N \times (\bar{\omega}_{IE}^N \times \bar{R}^N) - (\bar{\omega}_{IN}^N + \bar{\omega}_{IE}^N) \tilde{V}^N + K(\tilde{C}_{Ngeo}^{N*} \bar{V}^{Ngeo*} - \tilde{V}^N), \\ \dot{\tilde{C}}_N^E &= \tilde{C}_N^E (\bar{\omega}_{EN}^N \times) + K(C_N^{E*} - \tilde{C}_N^E), \quad \dot{\tilde{h}} = \bar{u}_{ZN}^N \cdot \tilde{V}^N.\end{aligned}\quad (33)$$

Коэффициенты усиления K в (33) здесь не раскрыты, так как для их описания требуется знать модель погрешностей (в том числе инструментальных) как для БИНС, так и для СРНС. Вычисление коэффициентов усиления в фильтре Калмана является в некотором смысле стандартной процедурой [1, 3], при этом в число оцениваемых и компенсируемых величин могут включаться дрейфы гироскопов и акселерометров, углы неортогональности осей и т. д. В число учитываемых условий работы могут входить колебательные движения на старте (ветер, погрузка) или вибрации в полете. Обычно величины, обратные элементам k^{-1} матрицы K – «постоянные времени» в разных каналах, – составляют $\sim 10\text{--}40$ с.

Выводы

1. Исследованы неголономные свойства «вспомогательных» фазовых координат БИНС: угла азимута $A(t)$ «платформы» и гироскопического курса $\psi_\Gamma(t)$; показана зависимость их текущих значений $A(t)$ и $\psi_\Gamma(t)$ от траектории самолета на предыдущем временном отрезке $[t_0, t]$.
2. Дан анализ поведения углов азимута и гироскопического курса на классических авиационных маршрутах – по ортодромии и «от точки к точке».
3. Выведено основное правило коррекции БИНС в азимутальном канале: сигнал $\psi_\Gamma(t)$ принимается за истинный ($\Delta\psi_\Gamma = 0$) и не подлежит какой-либо коррекции, а коррекция осуществляется за счет введения поправки $\Delta A(t)$ к величине угла азимута $A(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Savage, P.G.** Strapdown Analytics – Second Edition, Strapdown Associates, Inc., Maple Plane, Minnesota, 2007.
2. **Savage, P.G.** Computational Elements for Strapdown Systems, Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology, NATO RTO-EN-SET-116, October 2008.
3. **Бабич О.А.** Обработка информации в навигационных комплексах. – М. Машиностроение, 1991. – 512 с.
4. **Ишлинский, А.Ю.** Лекции по теории гироскопов / А.Ю.Ишлинский, В.И.Борзов, Н.П.Степаненко. – М: Изд-во МГУ, 1983. – 248 с.
5. **Бабич О.А.** Вычисление углового положения самолета по сигналам от спутниковой радионавигационной системы, Известия АН. Теория и системы управления, 1996, №4, с.152-162.
6. **Бабич, О.А.** Развертка на плоскость геодезических линий земного эллипсоида // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.- 2007.- № 2.- С. 3-20.
7. **Голован, А.А.** Математические основы навигационных систем. Ч. 1. Математические модели инерциальной навигации / А.А.Голован, Н.А.Парусников.- М.: Изд-во МГУ, 2007. – 110 с.

Abstract. In strapdown INS (SINS) the yaw angle is always determined as a sum of two angels: the “platform” azimuth and the gyro yaw. The numerical values of each of these angels, whose sum stays equal to the current yaw of an aircraft, can indeed be variables. These values depend on initial alignment of azimuth angle and on the trajectory of the aircraft’s preceding movements. This article is dedicated to the analysis of this variability and the ways it could be taken into account in the azimuth correction algorithms.

Key words: Strapdown Inertial Navigation System (SINS), Nonholonomic constraint, Wander azimuth, Yaw, Correction algorithms

Материал поступил 16.04.12