

В. О. РЫБИНСКИЙ

## ВЫБОР ПЕРИОДА КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

*Исследуется влияние периода квантования на модальную управляемость и стабилизируемость импульсной системы управления движением подводного аппарата. Учитывается вычислительное запаздывание, а в качестве цифроаналогового преобразователя (ЦАП) рассматривается обобщенный ЦАП. Строится множество патологических периодов, при которых система может оказаться неустойчивой. На численном примере рассматривается выбор периода квантования для случая использования в системе экстраполятора и интерполятора первого порядка.*

### Введение

В настоящее время во многих системах управления, в том числе и в системах управления движением подводными аппаратами используются цифровые регуляторы [1]. Поскольку при этом объект управления является непрерывным, то такие системы, получившие в литературе название импульсных, в целом являются гибридными, непрерывно-дискретными, и вопросы их исследования связаны с рядом принципиальных особенностей. Одним из наиболее удобных с точки зрения инженерной практики методов является метод параметрической передаточной функции (ППФ). Методы исследования импульсных систем на основе общего аппарата ППФ изложены в работах [2–5].

В теории управления известно, что для импульсных систем могут существовать такие периоды квантования, при которых система оказывается не полностью управляемой и/или не полностью наблюдаемой. Такие периоды квантования получили название патологических [2, 3, 5]. В случае если период квантования патологический, некоторые полюсы системы являются неуправляемыми. Если эти неуправляемые полюсы являются неустойчивыми, то система оказывается неустойчивой. Поэтому вопрос выбора периода квантования и исследования его влияния на управляемость является важным при проектировании импульсных систем.

В работе [6] приводятся общие условия управляемости и наблюдаемости для многомерных импульсных систем, где результаты получены с использованием модели системы в пространстве состояний. Практическое использование этих результатов затруднительно, поскольку требует большого количества предварительных преобразований и промежуточных выкладок. При исследовании одноконтурных импульсных систем аналогичные условия можно получить в частотной области без перехода в пространство состояний. Такие условия в частотной области эквивалентны условию несократимости характеристической функции

---

**Рыбинский** Владислав Олегович. Кандидат технических наук, доцент Государственного морского технического университета (С.-Петербург). Член секции молодых ученых Академии навигации и управления движением.

исследуемой системы и фактически являются условиями модальной управляемости. В литературе [4, 5] эти условия называются условиями невырожденности, а система, для которой они выполняются, – невырожденной. Условия невырожденности для одноконтурных систем с использованием аппарата ППФ можно получить в явном виде в форме простых соотношений, удобных для практического использования.

В работе [7] исследуется влияние периода квантования на стабилизируемость и приведены условия невырожденности применительно к одноконтурной импульсной системе управления движением подводным аппаратом. Настоящая статья обобщает результаты указанной работы на случай, когда при исследовании системы учитывается вычислительное запаздывание, неизбежно в системе присутствующее. При этом в качестве цифроаналогового преобразователя (ЦАП) системы в данной статье вместо традиционного фиксатора нулевого порядка используется обобщенный ЦАП. Ряд исследований показывает, что во многих случаях использование обобщенного ЦАП может оказаться целесообразным [8–10].

В статье исследуются свойства характеристического уравнения одноконтурных импульсных систем с запаздыванием и обобщенным ЦАП и строится множество патологических значений периодов, при которых система становится вырожденной. По результатам исследования в явном виде получены условия непатологичности периода квантования и формулируются условия невырожденности для рассматриваемых систем. В качестве примера получены расчетные формулы, позволяющие найти множества значений патологических периодов квантования для одноконтурных импульсных систем с запаздыванием и с экстраполятором первого порядка, а также с так называемым интерполятором первого порядка (интерполятором Кливленда), предложенным в работе [9]. Рассмотренный случай сопровождается расчетом, выполненным для системы управления по курсу подводного аппарата. Результаты сравниваются с аналогичными результатами для системы с традиционно используемым фиксатором нулевого порядка.

### Параметрическая передаточная функция разомкнутой импульсной системы с обобщенным ЦАП и запаздыванием

В настоящем разделе на основе методики [5] выполним построение ППФ разомкнутой импульсной системы с обобщенным ЦАП и постоянным запаздыванием. Структура такой системы приведена на рис. 1.

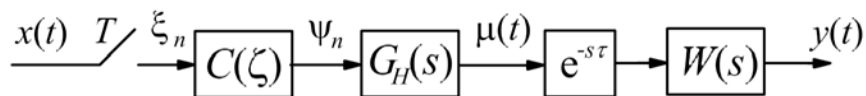


Рис. 1. Разомкнутая система с регулятором, обобщенным ЦАП и запаздыванием

В системе преобразование непрерывного входного сигнала  $x(t)$  в дискретную последовательность  $\xi_n$  выполняется элементом квантования, функционирующим с периодом  $T$ . Для управления используется цифровой регулятор, также функционирующий с периодом  $T$  и заданный своей дискретной передаточной функцией (ПФ)

$$C(\zeta) = \frac{A(\zeta)}{B(\zeta)} = \frac{\sum_{r=0}^R a_r \zeta^r}{\sum_{r=0}^R b_r \zeta^r}, \quad (1)$$

где  $A(\zeta)$  и  $B(\zeta)$  – полиномы степени  $R$  (число  $R$  называется порядком регулятора); коэффициент  $b_0 \neq 0$ , а  $\zeta = e^{-sT}$  – оператор сдвига на один такт назад.

Обобщенный ЦАП  $G_H(s)$  осуществляет преобразование последовательности  $\psi_n$  в непрерывный управляющий сигнал  $\mu(t)$  согласно закону

$$\mu(t) = \sum_{\ell=0}^H \psi_{n-\ell} h_{\ell}(t - nT), \quad nT < t < (n+1)T, \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $H$  – целое неотрицательное число, называемое порядком ЦАП;  $h_{\ell}(t)$  – модулирующие функции, которые полагаются заданными.

В настоящей работе исследуются системы, в которых порядок  $H > 0$ . Кроме того, в системе имеет место запаздывание управляющего сигнала на величину  $\tau \neq T$ , причем будем полагать, что  $\tau = \text{const}$ . Также будем полагать, что ПФ непрерывного элемента системы  $W(s)$  представляет собой строго правильную дробно-рациональную функцию, у которой степень полинома числителя строго меньше степени полинома знаменателя. Далее будем использовать обозначение

$$W_{\tau}(s) = W(s)e^{-s\tau}. \quad (3)$$

ППФ  $W_p(s, t)$  системы на рис. 1 равна

$$W_p(s, t) = \tilde{C}(s) \Phi_{G_H W_{\tau}}(T, s, t), \quad (4)$$

где  $\tilde{C}(s) = C(\zeta)|_{\zeta=e^{-sT}}$ , а  $\Phi_{G_H W_{\tau}}(T, s, t)$  – смещенная импульсно-частотная характеристика (СИЧХ), которая определяется как сумма ряда

$$\Phi_{G_H W_{\tau}}(T, s, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_H(s + ki\omega) W_{\tau}(s + ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (5)$$

В формуле (5)  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – частота квантования. Для случая, когда  $H = 0$ , замкнутые выражения для СИЧХ (5) приведены в работах [4, 5]. Для случая, когда  $H > 0$ , с учетом (2) можно показать, что (5) допускает представление [5]

$$\Phi_{G_H W_{\tau}}(T, s, t) = \sum_{\ell=0}^H e^{-\ell sT} \Phi_{G_{\ell} W_{\tau}}(T, s, t), \quad (6)$$

где

$$\Phi_{G_{\ell} W_{\tau}}(T, s, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{\ell}(s + ki\omega) W_{\tau}(s + ki\omega) e^{ki\omega t}. \quad (7)$$

В формуле (7)

$$G_{\ell}(s) = \int_0^T h_{\ell}(t) e^{-st} dt \quad - \quad (8)$$

передаточная функция формирующего элемента ЦАП нулевого порядка с модулирующей функцией  $h_{\ell}(t)$ , т. е. разомкнутую систему с обобщенным ЦАП можно представить в виде параллельного соединения систем с ЦАП нулевого порядка с соответствующими модулирующими функциями и запаздыванием на

соответствующее количество тактов квантования. При этом в силу допущения, принятого относительно функции  $W(s)$ , ряд (7) сходится и с учетом (3) можно записать

$$\Phi_{G_\ell W_\tau}(T, s, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_\ell(s + ki\omega) W(s + ki\omega) e^{-(s+ki\omega)\tau} e^{ki\omega t}. \quad (9)$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} \Phi_{G_\ell W_\tau}(T, s, t) e^{st} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_\ell(s + ki\omega) W(s + ki\omega) e^{-(s+ki\omega)\tau} e^{(s+ki\omega)t} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_\ell(s + ki\omega) W(s + ki\omega) e^{-(s+ki\omega)(t-\tau)} = D_{p_\ell}(T, s, t - \tau), \end{aligned} \quad (10)$$

где обозначено

$$D_{p_\ell}(T, s, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_\ell(s + ki\omega) W(s + ki\omega) e^{(s+ki\omega)t} \quad (11)$$

дискретная передаточная функция (ДПФ) в смысле [5] для разомкнутой импульсной системы, состоящей из элемента квантования, ЦАП нулевого порядка с модулирующей функцией  $h_\ell(s)$  и непрерывного элемента  $W(s)$ . В результате для СИЧХ  $\Phi_{G_\ell W_\tau}(T, s, t)$  имеем

$$\Phi_{G_\ell W_\tau}(T, s, t) = D_{p_\ell}(T, s, t - \tau) e^{-st}. \quad (12)$$

Дискретную передаточную функцию  $D_{p_\ell}(T, s, t)$  можно представить в замкнутой форме. При этом для упрощения будем полагать, что среди полюсов функции  $W(s)$  нет кратных, и  $W(s)$  допускает представление

$$W(s) = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{s - s_j}, \quad (13)$$

где  $N \geq 1$  – целое число;  $s_j$  – полюса функции  $W(s)$ ;  $\gamma_j$  – коэффициенты.

В [5] показано, что при выполнении (13) для  $nT < t < (n+1)T$  сумма ряда (11) будет равна

$$D_{p_\ell}(T, s, t) = \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j G_\ell(s_j) e^{s_j(t-nT)}}{e^{(s-s_j)T} - 1} + h_\ell^*(t - nT) \right] e^{nsT}, \quad (14)$$

где

$$h_\ell^*(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^N \gamma_j e^{s_j(t-t_1)} h_\ell(t_1) dt_1. \quad (15)$$

Окончательно с учетом (4), (6) и (12) выражение для искомой ПФ  $W_p(s, t)$  системы на рис. 1 имеет вид

$$W_p(s, t) = C(\zeta) \Big|_{\zeta=e^{-sT}} \sum_{\ell=0}^H e^{-\ell sT} D_{p_\ell}(T, s, t - \tau) e^{-st}, \quad (16)$$

где функции  $D_{p_\ell}(T, s, t - \tau)$  определяются по формулам (14), (15).

### Построение ППФ и характеристической функции замкнутой системы с запаздыванием и обобщенным ЦАП

Перейдем к рассмотрению замкнутой импульсной системы с запаздыванием и обобщенным ЦАП. В работе будем рассматривать одноконтурную систему со структурой, приведенной на рис. 2. К такой структуре может быть сведено большинство систем, рассматриваемых при решении практических задач.

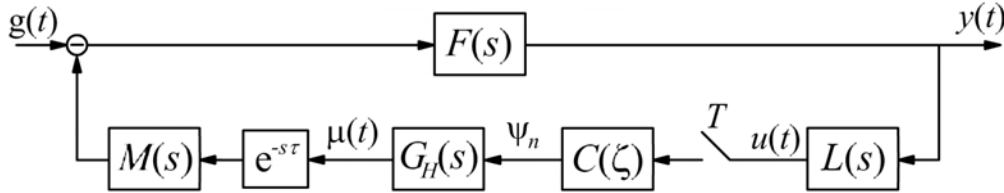


Рис. 2. Замкнутая импульсная система с обобщенным ЦАП и запаздыванием

На рис. 2 обозначено:  $F(s)$  – ПФ непрерывного объекта управления;  $M(s)$  – ПФ исполнительного привода и  $L(s)$  – ПФ измерительной системы, причем будем полагать, что  $F(s)$  – строго правильная, а  $M(s)$  и  $L(s)$  – правильные дробно-рациональные функции.

Основываясь на методике [5], выполним построение ППФ  $W_{gy}(s, t)$  системы на рис. 2 от входа  $g(t)$  к выходу  $y(t)$ . Для этого положим  $g(t) = e^{st}$ . Кроме того, введем в рассмотрение дополнительный выход  $u(t)$  и будем использовать вспомогательную ППФ  $W_{gu}(s, t)$  от входа  $g(t)$  к выходу  $u(t)$ .

По определению [5] для ППФ при  $g(t) = e^{st}$  имеем

$$W_{gy}(s, t) = y(t)e^{-st}, \quad W_{gu}(s, t) = u(t)e^{-st}, \quad (17)$$

причем в силу периодичности системы на рис. 2

$$W_{gy}(s, t) = W_{gy}(s, t + T), \quad W_{gu}(s, t) = W_{gu}(s, t + T). \quad (18)$$

С учетом стробоскопического свойства импульсного элемента [5] сигналы  $u(t)$  и  $y(t)$  можно представить как выходные сигналы разомкнутой системы, структура которой приведена на рис. 3.

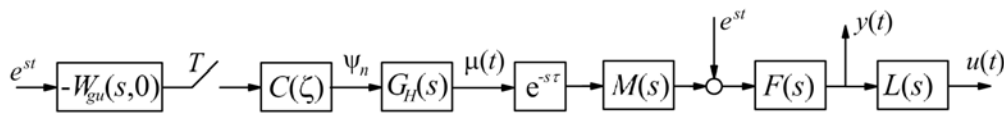


Рис. 3. Формирование сигналов  $y(t)$  и  $u(t)$

Обозначения на рис. 3 аналогичны обозначениям, принятым на рис. 2. Кроме того, далее будем использовать обозначения

$$K_\tau(s) = F(s)L(s)M(s)e^{-s\tau}, \quad M_\tau(s) = M(s)e^{-s\tau}. \quad (19)$$

Выходной сигнал  $u(t)$  системы на рис. 3 определяется по формуле

$$u(t) = [F(s)L(s) - W_{gu}(s, 0)\phi_{G_H K_\tau}(T, s, t)\tilde{C}(s)]e^{st}, \quad (20)$$

где  $\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, t)$  – СИЧХ (5), построенная для функции  $K_\tau(s)$ .

Из (17) и (20) имеем

$$W_{gu}(s, t) = F(s)L(s) - W_{gu}(s, 0)L(s)\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, t)\tilde{C}(s). \quad (21)$$

В силу (21) для ППФ  $W_{gu}(s, t)$  при  $t = 0$  будет справедливо

$$W_{gu}(s, 0) = F(s)L(s) - W_{gu}(s, 0)\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0)\tilde{C}(s). \quad (22)$$

Из (22) непосредственно имеем

$$W_{gu}(s, 0) = \frac{F(s)L(s)}{1 + \Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0)\tilde{C}(s)}. \quad (23)$$

Аналогично можно показать, что сигнал  $y(t)$  системы на рис. 3 определяется по формуле

$$y(t) = [F(s) - W_{gu}(s, 0)\Phi_{G_H FM_\tau}(T, s, t)\tilde{C}(s)]e^{st}, \quad (24)$$

где  $\Phi_{G_H FM_\tau}(T, s, t)$  – СИЧХ (5), построенная для произведения  $F(s)M_\tau(s)$ , поэтому для  $W_{gy}(s, t)$  с учетом (17), (23) и (24) получаем

$$W_{gy}(s, t) = F(s) \left[ 1 - \frac{L(s)\Phi_{G_H FM_\tau}(T, s, t)\tilde{C}(s)}{1 + \Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0)\tilde{C}(s)} \right]. \quad (25)$$

Обозначим

$$\tilde{\lambda}(s) = 1 + \Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0)\tilde{C}(s). \quad (26)$$

Функция  $\tilde{\lambda}(s)$  является характеристической функцией системы на рис. 2. В работах [4, 5] показано, что в случае несократимости характеристической функции необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости импульсной системы является расположение всех корней  $\tilde{s}_j$  характеристического уравнения

$$\tilde{\lambda}(s) = 0 \quad (27)$$

в левой полуплоскости.

#### Построение множества патологических периодов квантования для системы с обобщенным ЦАП и запаздыванием

Для случая применения в системе фиксатора нулевого порядка (т.е. для  $H = 0$ ,  $h_0(t) = 1$ ) и отсутствия запаздывания условия невырожденности (т.е. условия непатологичности периода) приведены в работе [4]. Рассмотрим получение условий непатологичности периода квантования для случая применения в импульсной системе обобщенного ЦАП (1), где  $H > 0$ , и наличия в ней запаздывания. Для этого исследуем свойства уравнения (27), при этом будем полагать, что произведение  $F(s)L(s)M(s)$  допускает представление (13).

Фигурирующая в (25) СИЧХ  $\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, t)$  при  $t = 0$  будет равна

$$\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0) = \sum_{\ell=0}^H e^{-\ell s T} \Phi_{G_\ell K_\tau}(T, s, 0). \quad (28)$$

В свою очередь, СИЧХ  $\Phi_{G_\ell K_\tau}(T, s, 0)$  с учетом (12), (14) при  $nT < -\tau < (n+1)T$  имеет вид

$$\Phi_{G_\ell K_\tau}(T, s, 0) = \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j G_\ell(s_j) e^{s_j(-\tau-nT)}}{e^{(s-s_j)T} - 1} + q_\ell \right] e^{nsT}, \quad (29)$$

где исходя из (15) при  $t = -\tau$

$$q_\ell = \int_0^{-\tau-nT} \sum_{j=1}^N \gamma_j e^{s_j(-\tau-nT-t_1)} h_\ell(t_1) dt_1 = \text{const}. \quad (30)$$

Подставляя (29) в (28), получаем

$$\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0) = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \sum_{\ell=0}^H e^{-\ell s T} G_\ell(s_j) e^{-s_j(\tau-nT)} e^{nsT}}{e^{sT} e^{-s_j T} - 1} + \sum_{\ell=0}^H q_\ell e^{-\ell s T} e^{nsT}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что при подстановке  $\zeta = e^{-sT}$  СИЧХ  $\Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0)$  допускает представление

$$\tilde{\Phi}_{G_H K_\tau}(T, \zeta, 0) = \Phi_{G_H K_\tau}(T, s, 0) \Big|_{\zeta=e^{-sT}} = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)}, \quad (32)$$

где  $\alpha(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  – полиномы.

Рассматриваемая система невырождена (период  $T$  – непатологический), когда полиномы  $\alpha(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  являются взаимно простыми, т. е. дробь  $\frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)}$  в правой части (32) несократима.

**Утверждение.** Дробь  $\frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)}$  в (32) несократима при одновременном выполнении условий непатологичности периода.

У с л о в и е 1.  $e^{-s_j T} \neq e^{-s_m T} \quad \forall j \neq m, \quad j = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, N;$

У с л о в и е 2.  $G_H(s_j) = \sum_{\ell=0}^H G_\ell(s_j) e^{-\ell s_j T} \neq 0 \quad \forall j.$

Доказательство утверждения приведено в приложении.

**Замечание 1.** Поскольку для произвольного вещественного числа  $\varphi$  имеет место  $e^{i\varphi} = e^{i(2\pi+\varphi)}$ , то условие 1 не выполняется в случае, если среди множества полюсов непрерывных элементов системы существует пара комплексных  $[s_{K1}, s_{K2}]$ , для которой  $\text{Im } s_{K1} = \text{Im } s_{K2} + 2\pi k/T$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

**Замечание 2.** Выполнение условия 1 определяется только величиной периода квантования и свойствами непрерывных элементов системы и не зависит от вида ЦАП. Выполнение условия 2 зависит как от величины периода квантования и свойств непрерывных элементов, так и от вида ЦАП.

**С л е д с т в и е.** Из условия 1 следует, что если среди полюсов непрерывных элементов системы на рис. 2 есть комплексные, то всегда существуют значения периода квантования, являющиеся патологическими. При этом если среди множества комплексных полюсов есть неустойчивые, то существуют такие значения периода квантования, при которых система при любом выборе ЦАП будет нестабилизируема.

Аналогично тому, как это сделано в [4, 5], можно показать, что в случае, когда период  $T$  – непатологический, каждому корню  $\tilde{s}_j$  уравнения (27) однозначно соответствует корень  $\zeta_j$  уравнения

$$\lambda(\zeta) = 1 + \tilde{\Phi}_{G_H W_\tau}(T, \zeta, 0)C(\zeta) = 1 + \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)} \frac{A(\zeta)}{B(\zeta)} = 0. \quad (33)$$

При этом условием устойчивости рассматриваемой системы будет являться отсутствие корней  $\zeta_j$  уравнения (33) внутри единичного круга и на его границе. При выполнении условий 1 и 2 полиномы  $\alpha(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  используются для стабилизации системы: множество ПФ стабилизирующих регуляторов вида (1) определяется множеством решений полиномиального уравнения вида

$$\alpha(\zeta)A(\zeta) + \beta(\zeta)B(\zeta) = \Delta_+(\zeta) \quad (34)$$

относительно полиномов  $A(\zeta)$  и  $B(\zeta)$ , где  $\Delta_+(\zeta)$  – устойчивый полином (не имеющий корней на границе и внутри единичного круга). Если полиномы  $\alpha(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  являются взаимно простыми, то период  $T$  является непатологическим и уравнение (33) разрешимо при произвольном выборе полинома  $\Delta_+(\zeta)$ . В противном случае (33) разрешимо только тогда, когда общие корни полиномов  $\alpha(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  одновременно являются корнями полинома  $\Delta_+(\zeta)$ . Поэтому в случае, когда  $T$  – патологический, часть полюсов системы неуправляема. Если неуправляемые полюса неустойчивы, то система оказывается нестабилизируемой.

**П р и м е ч а н и е.** Полученные условия непатологичности периода для систем с обобщенным ЦАП и с запаздыванием по структуре аналогичны условиям, полученным в [6] для систем с обобщенными ЦАП и без запаздывания. Последнее означает, что для стабилизируемости импульсной системы с обобщенным ЦАП и запаздыванием необходимо и достаточно, чтобы стабилизируемой была соответствующая система без запаздывания.

#### Условия невырожденности и непатологичности периода для систем с обобщенными ЦАП первого порядка и запаздыванием

Для конкретности рассмотрим систему со структурой на рис. 2, где в качестве ЦАП используются экстраполятор первого порядка, реализующий преобразование

$$\mu_{extra}(t) = \psi_n + \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{T}(t - nT), \quad nT < t < (n+1)T, \quad (35)$$

и интерполятор Кливленда первого порядка [9], реализующий преобразование

$$\mu_{inter}(t) = \psi_{n-1} + \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{T}(t - nT), \quad nT < t < (n+1)T. \quad (36)$$

Здесь и далее все обозначения, относящиеся к экстраполятору (35), помечены индексом *extra*, а относящиеся к интерполятору (36) – индексом *inter*.

Сопоставляя (35) и (36) с выражением (2), замечаем, что функции  $h_\ell(t)$  в случае использования экстраполятора имеют вид:

$$h_{0extra}(t) = 1 + \frac{t}{T}, \quad h_{1extra}(t) = -\frac{t}{T}, \quad (37)$$

а в случае использования интерполятора:

$$h_{0inter}(t) = \frac{t}{T}, \quad h_{1inter}(t) = 1 - \frac{t}{T}. \quad (38)$$

С использованием выражений (37), (38) можно по формуле (8) определить функции  $G_H(s)$  и сформулировать для систем с экстраполятором и интерполятором условия 2. Эти условия имеют вид:

для системы с экстраполятором

$$G_{Hextra}(s_j) = \frac{(e^{-s_j T} - 1)^2 (s_j T + 1)}{s_j^2 T} \neq 0, \quad \forall j \quad (39)$$

и для системы с интерполятором

$$G_{Hinter}(s_j) = \frac{(e^{-s_j T} - 1)^2}{s_j^2 T} \neq 0, \quad \forall j. \quad (40)$$

В случае наличия в системе традиционно используемого фиксатора нулевого порядка условие 2 имеет вид

$$\frac{1 - e^{-s_j T}}{s_j} \neq 0, \quad \forall j; \quad (41)$$

в случае любого из рассмотренных ЦАП патологическими являются значения периода

$$T_j = \frac{2k\pi i}{s_j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (42)$$

Выражение (42) имеет смысл только в случае, если полюса  $s_j$  – чисто мнимые. При этом для значений (42) периода квантования система будет неустойчивой. Отметим также, что значения (42) одновременно являются патологическими согласно условию 1. Кроме того, для системы с экстраполятором (35) патологическими значениями периода квантования, при которых не выполняется условие 2, являются

$$T_j = -1/s_j. \quad (43)$$

Отметим, что (43) имеет смысл только тогда, когда непрерывные элементы системы имеют устойчивые вещественные полюса. Поэтому система при значении периода квантования (43), несмотря на наличие неуправляемых полюсов, является стабилизируемой.

### Численный пример

Проиллюстрируем полученные результаты на примере задачи стабилизации на курсе гипотетического подводного аппарата, параметры которого характер-

ны для используемых на практике [11]. Пусть ПФ  $F(s)$  рассматриваемого подводного аппарата от угла перекладки руля к углу рысканья, а также ПФ  $M(s)$  и  $L(s)$  имеют вид:

$$F(s) = \frac{0,0015}{s(s+0,066)}, \quad M(s) = \frac{1}{s+1}, \quad L(s) = 1. \quad (44)$$

Кроме того, пусть величина запаздывания  $\tau = 0,3$  с.

В данном случае  $N = 3$  и полюсами непрерывных элементов системы являются числа  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -0,066$ ,  $s_3 = 0$ . Поскольку среди этих полюсов отсутствуют комплексные, то условие 1 выполняется всегда и система стабилизируема при любом периоде квантования.

Условие 2 для данного объекта при использовании в качестве ЦАП экстраполятора (39) не будет выполняться при патологических значениях периода квантования, равных  $T_1 = 1$  с,  $T_2 = -1/0,066 = 15$  с.

Значение периода, равное 15 с, маловероятно на практике, поэтому рассмотрим поведение системы при значении периода, равном 1 с. Действительно, в случае использования в качестве ЦАП экстраполятора первого порядка и при  $T = 1$  функция (32) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{G_{extra}W_\tau}(T, \zeta, 0) &= \frac{\alpha_{extra}(\zeta)}{\beta_{extra}(\zeta)} = \\ &= \frac{6.784\zeta(\zeta+76.91)(\zeta-2.718)(\zeta+1.656)(\zeta+0.105)}{(\zeta-2.718)(\zeta-1.068)(\zeta-1)} 10^{-6}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из (45) очевидно, что в данных условиях полиномы  $\alpha_{extra}(\zeta)$  и  $\beta_{extra}(\zeta)$  не являются взаимно простыми, поскольку содержат общий корень  $\zeta_1 = 2.718$ , который соответствует полюсу  $s_1 = -1$  ПФ  $M(s)$ , поэтому система является вырожденной и полиномиальное уравнение (34) будет разрешимо только в том случае, если среди корней полинома  $\Delta_+(\zeta)$  будет корень, равный корню  $\zeta_1$ . Следовательно, при  $T = 1$  этот корень будет входить в множество полюсов замкнутой системы при любом выборе стабилизирующего регулятора, то есть полюс  $s_1 = -1$  является неуправляемым. При использовании в системе фиксатора нулевого порядка или интерполятора все полюса замкнутой системы будут управляемыми.

Теперь исследуем функционирование импульсной системы при значениях периода квантования, близких к патологическим. Пусть, например, для системы с непрерывными элементами (44) значение периода квантования  $T = 1.02$  с. В этом случае система невырождена и уравнение (34) разрешимо при произвольном полиноме  $\Delta_+(\zeta)$ .

Пусть корнями  $\Delta_+(\zeta)$  являются числа:  $\tilde{s}_1 = -1,65$ ,  $\tilde{s}_2 = -1,42$ ,  $\tilde{s}_3 = -1,38$ ,  $\tilde{s}_4 = -0,78$ ,  $\tilde{s}_5 = -0,23$ . Решая для заданных условий уравнение (34), найдем (с использованием [12]) для соответствующих ЦАП регуляторы в виде (1) и выполним моделирование динамики систем, подавая на вход  $g(t)$  единичную ступень. Результаты моделирования приведены на рис. 4.

Из рисунка видно, что в системе с экстраполятором (для которой значение периода квантования близко к патологическому) наблюдается наибольшее перерегулирование и качество переходного процесса хуже, чем в системах с интерполятором и фиксатором нулевого порядка. Последнее обстоятельство говорит о том, что при проектировании импульсных систем следует избегать не только патологических значений периода квантования, но и близких к ним значений.

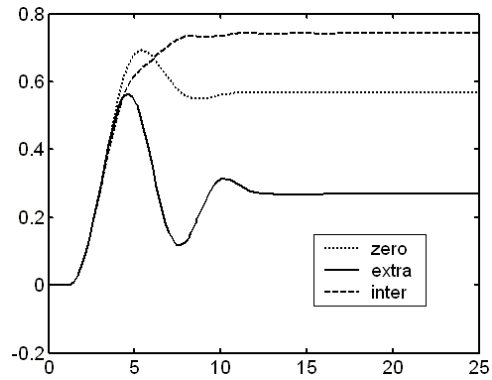


Рис. 4. Реакция систем с различными ЦАП на единичную ступень

### Заключение

В статье рассматриваются одноконтурные замкнутые импульсные системы с обобщенными ЦАП и запаздыванием, которое полагается постоянным. Для рассматриваемых систем построено выражение для ППФ. На основе этого выражения определена характеристическая функция и получены общие условия невырожденности, при выполнении которых все полюса замкнутой импульсной системы являются управляемыми. Показано, что в случае комплексных полюсов непрерывных объектов всегда существуют значения периода квантования, являющиеся патологическими. Кроме того, если среди множества комплексных полюсов есть неустойчивые, то всегда существуют значения периода, при которых система неустойчива.

В качестве примера рассмотрены системы с запаздыванием, содержащие в своем составе в качестве ЦАП экстраполятор и интерполятор первого порядка. Для указанных систем в явном виде получены условия непатологичности периода и построены множества патологических периодов квантования. Полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами для традиционного ЦАП – фиксатора нулевого порядка. Показано, что при использовании в качестве ЦАП экстраполятора первого порядка существуют патологические значения периодов, определяемые вещественными устойчивыми полюсами непрерывных элементов, что снижает эффективность использования таких ЦАП. На численном примере показано, что при значении периода квантования, близком к патологическому, качество функционирования системы может оказаться низким.

*Автор благодарит д.т.н. профессора Е.Н. Розенвассера за ценные указания при написании данной работы.*

*П р и л о ж е н и е*

**Доказательство условия 1.** Полином  $\beta(\zeta)$  получается в результате приведения к общему знаменателю дробей вида  $\alpha_j(\zeta)/(1 - \zeta e^{s_j T})$ , где

$$\alpha_j(\zeta) = \gamma_j e^{-s_j T} \sum_{\ell=0}^H e^{-\ell s_j T} G_\ell(s_j) e^{-s_j(\tau - nT)} e^{ns_j T} \Big|_{e^{-s_j T} = \zeta} \quad (\text{П.1})$$

полином. Корнями этого полинома  $\beta(\zeta)$  являются числа  $\tilde{\zeta}_j = e^{-s_j T}$ .

Несократимость дроби в правой части (32) соответствует выполнению условия  $\deg \beta(\zeta) = N$ . Последнее имеет место в том случае, если среди множества чисел  $\tilde{\zeta}_j$  нет равных, откуда вытекает условие 1.

**Доказательство условия 2.** Пусть выполнено условие 1. Тогда дробь в правой части (32) будет сократима, если среди множества чисел  $\tilde{\zeta}_j$  существует хотя бы одно число, для которого  $\alpha_j(\tilde{\zeta}_j) = 0$ , или с учетом (П.2)

$$\alpha_j(\zeta_j) = \gamma_j e^{-s_j T} \sum_{\ell=0}^H e^{-\ell s_j T} G_{\ell}(s_j) e^{-s_j(\tau-nT)} e^{ns_j T} = 0, \quad (\text{П.2})$$

где число  $s_j : e^{-s_j T} = \tilde{\zeta}_j$ , откуда вытекает условие 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Веремей, Е.И.** Применение метода  $H_{\infty}$ -оптимизации для синтеза фильтров морского волнения / Е.И.Веремей, М.В.Сотникова // Гирокоспия и навигация. - 2009.- № 2.
2. **Цыпкин, Я.З.** Теория линейных импульсных систем.- М.: Физматгиз, 1963
3. **Chen, T. and Francis, B. A.,** Optimal Sampled-Data Control Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.
4. **Розенвассер, Е.Н.** Линейная теория управления в непрерывном времени.- М.: Наука, 1994.
5. **E.N Rosenwasser, B.P. Lampe,** Computer-Controlled Systems: Analysis and Design with Process-orientated Models, London: Springer Verlag, 2000.
6. **Lampe, B.P. and Rosenwasser, E.N.:** Modal control for sampled-data systems with generalized higher-order hold and time delay. Proc. 6th IFAC Workshop on Time-Delay Systems, L'Aquila, Italy, WeA2\_c(1-6), July 2006.
7. **Животнев, Н.С.** Влияние периода квантования на стабилизируемость импульсных систем с экстраполяторами высших порядков / Н.С.Животнев, В.О.Рыбинский // XIV КМУ «Навигация и управление движением».- СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012.
8. **Hagiwara T.** Preservation of Reachability and Observability under Sampling with a First-Order Hold, IEEE Trans. on automatic control, vol.40, N.1, pp.104-107, Jan., 1995.
9. **William B.** Cleveland, First-order-hold interpolation digital-to-analog converter with application to aircraft simulation, NASA techn. notes, Wash. DC, 1976.
10. **Rybinskii V.O., Rosenwasser E.N., Lampe B.P.** Guaranteed Performance for Sampled-Data Systems with Generalized Higher-Order Hold, 8th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, September 15-17, 2010, Rostock-Warnemünde, Germany.
11. **Диомидов, М.Н.** Подводные аппараты. Проектирование и конструкция.- Л.: Судостроение, 1987.
12. **Rybinskii V.O., Rosenwasser, E.N. and Lampe, B.P.** Extension of the GarSD-toolbox: Polynomial method for guaranteed performance design of sampled-data control systems with non-zero static error and pure delays, IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD), 28-30 Sept. 2011 Denver, CO, pp 450 – 455

**Abstract.** The paper investigates how sampling period affects the modal controllability and stabilizability of a sampled-data submarine motion control system. Systems with a computation delay using generalized DAC as a digital-to-analog converter are considered. A set of pathological periods, when the system may turn unstabilizable, is constructed. Selection of a sampling period for a system with first-order extrapolator and interpolator is shown by a numerical example.

**Key words:** sampled-data systems, modal controllability, stabilizability, sampling period nonpathology

Материал поступил 21.06.12