

◆ В ПОМОЩЬ ИССЛЕДОВАТЕЛЯМ И РАЗРАБОТЧИКАМ ◆

Уважаемые читатели!

Начиная с этого номера, в журнале вводится новая рубрика «В помощь исследователям и разработчикам». В ней планируется размещать статьи и информационные материалы, имеющие научно-методическую и образовательную направленность и носящие, в том числе, обзорный характер. Здесь предполагается публиковать заметки о новых навигационных приложениях, особенностях различных программных пакетов, новых учебных материалах, полезных аспирантам и разработчикам навигационных систем. В этом разделе могут также обсуждаться вопросы терминологии и перевода новых англоязычных терминов и многое другое.

Предлагаем присылать в редакцию материалы для новой рубрики.

УДК 621.391.14

Р. И. ИВАНОВСКИЙ

ПРОБЛЕМЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрены приложения теории чувствительности к анализу систем обработки информации и управления в нерасчетных режимах функционирования, к задачам упрощения математических моделей погрешностей, упрощения фильтров в системах обработки информации и регуляторов в системах управления, к задачам синтеза систем с малой или минимальной чувствительностью к погрешностям моделирования.

Введение

Чувствительность – одна из важнейших характеристик технических устройств различной функциональности, определяющих качество этих устройств, возможность их практического применения. Представляя подобные устройства некими операторами, преобразующими входную информацию в соответствующие выходы, чувствительность удобно связывать с реакцией устройства или системы на некоторое изменение входной информации. В понятие «входная информация» при анализе качества систем на основе теории чувствительности включаются не только входные сигналы или возмущения, но и параметрические искажения, ошибки моделирования и др.

Ивановский Ростислав Игоревич. Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Действительный член Академии навигации и управления движением.

Статья по докладу на 3-й мультikonференции по проблемам управления.

Для некоторых приложений высокое качество системы ассоциируется с высокой чувствительностью как способностью системы значимо реагировать на слабые входные сигналы. К ним относятся измерительные системы, чувствительные элементы и комплексы на их основе, обладающие прецизионной точностью. Для других приложений, к которым относятся системы управления и обработки информации, высокое качество означает низкую или минимальную чувствительность к возможным структурным и/или параметрическим вариациям операторов и обрабатываемых сигналов. Эти приложения будут доминирующими в рамках настоящей статьи.

Помимо прямого использования в составе технических характеристик систем чувствительность служит важной составной частью современного системного анализа, обеспечивающей исследователю возможность решения широкого круга практических задач анализа и синтеза, таких как:

- выбор состава и технических характеристик датчиков на начальной стадии проектирования информационно-управляющих систем;
- анализ свойств систем при вариации априорных данных;
- ранжирование факторов, влияющих на результирующее качество систем;
- упрощение состава и структуры погрешностей датчиков информации и математических моделей входных (для блоков обработки) сигналов;
- упрощение математических моделей объектов на основе аппроксимации операторов подсистем;
- определение возможности упрощения структуры фильтров в системах обработки информации и регуляторов в системах управления;
- синтез упрощенных фильтров и регуляторов;
- синтез фильтров с малой или минимальной чувствительностью к погрешностям моделирования.

Теоретической основой проведенного анализа перечисленных задач служат: концепция дополнительного движения; сопоставление качества систем с использованием относительных функций чувствительности; анализ устойчивости функций чувствительности при определении возможности упрощения фильтров и регуляторов; использование оригинального подхода, основанного на дифференцировании следа передаточной матрицы и следа ковариационной матрицы при синтезе упрощенных многомерных систем управления и синтезе малочувствительных фильтров соответственно.

Основные элементы теории чувствительности

Теория чувствительности во многом обязана исследованиям Р.М.Юсупова, Е.Н.Розенвассера, последние монографии которых содержат систематическое изложение теории и прикладных аспектов анализа чувствительности динамических систем [1–4]. Среди отечественных работ, посвященных проблемам теории чувствительности при анализе и синтезе технических систем в условиях неопределенности исходной информации, заслуживают внимания [5–8]. Отмечая вклад зарубежных ученых в развитие теории чувствительности, нельзя не упомянуть объемную монографию Мансура Исла-

ми [9], в которой рассматривается анализ и синтез динамических систем с использованием теории чувствительности. В последние годы интерес к проблемам чувствительности применительно к техническим, экономическим, химическим и другим системам продолжает нарастать [10–13].

В завершение укажем ссылку [14], в которой размещена библиография по различным аспектам применения теории чувствительности.

Прикладные задачи анализа чувствительности как задачи изучения свойств системы при наличии параметрических и/или структурных вариациях предполагают введение понятий расчетного и действительного режимов работы, расчетной (РМ) и действительной (ДМ) моделей. В качестве РМ выступают модели, учитывающие некие номинальные режимы, принятые исследователем в качестве опорных для принятия решений, разработки алгоритмов и т.д. Эти режимы в РМ учитывают расчетные параметры исследуемой системы и внешней среды как источника возможных возмущений. В ДМ вводятся те изменения, которые отражают вероятные вариации этих параметров в реальных условиях функционирования. Таким образом, РМ и ДМ отражают свойства расчетных (РУ) и действительных (ДУ) условий функционирования системы соответственно.

Будем считать, что РМ используется для разработки расчетных алгоритмов (функционирования, обработки информации или управления), которые будем обозначать $P_{\text{алг}}$. Эти алгоритмы могут быть как оптимальными (для расчетного режима), так и субоптимальными; важно, что они опираются на РМ. Поэтому расчетное качество системы можно анализировать, используя пару (РМ + $P_{\text{алг}}$). Анализ действительного качества расчетной системы в реальных условиях функционирования будет опираться на пару (ДМ + $P_{\text{алг}}$).

Наибольший практический интерес представляет анализ потенциально достижимого качества системы в действительных условиях. Этот анализ предполагает разработку оптимальных алгоритмов $O_{\text{алг}}$, которые учитывают свойства ДМ, поэтому при анализе потенциального качества используется пара (ДМ + $O_{\text{алг}}$). Результаты такого анализа позволяют получить «отсчетный ноль», с которым может сравниваться действительное качество, полученное с использованием пары (ДМ + $P_{\text{алг}}$). На основе сопоставления действительного и потенциально достижимого качества могут быть решены многие задачи прикладного анализа, такие как выбор вариантов упрощения РМ, упрощения $P_{\text{алг}}$, выбор состава датчиков информации, ранжирования влияющих факторов.

В случае, когда рассогласование расчетных и действительных условий определяется вариацией параметров системы и внешних условий, информацию о степени влияния этих параметров на результат несут функции чувствительности (ФЧ). Для непрерывных систем ФЧ представляют собой коэффициенты разложения в ряд Тэйлора по степеням вариаций, например:

$$y[\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}(k)] \approx y_0 + \sum_k f_k \cdot \Delta p_k + \dots; \quad f_k = \partial y(p) / \partial p_k, \quad (1)$$

где $y(\mathbf{p}_0) = y_0$ – исходное состояние переменной y ; $\Delta \mathbf{p}(k)$ – вектор вариаций параметров относительно исходных значений $\mathbf{p}_0$, единственный ненулевой элемент которого равен Δp_k ; Δp_k – вариация k -го параметра; f_k – функция чувствительности первого порядка.

При анализе дискретных систем в качестве ФЧ f_k выступают следующие выражения:

$$f_k = [y(p_0 + \Delta p(k)) - y_0] / \Delta p_k. \quad (2)$$

Наряду с абсолютными ФЧ f_k (1) и (2) в практике прикладного анализа удобно использовать относительные их значения

$$r_k = f_k \cdot p_k / y_0, \quad (3)$$

позволяющие проводить не только межвариантный, но и межсистемный анализ чувствительности. В (3) p_k и y_0 выбраны в качестве одного из вариантов обеспечения безразмерности r_k .

Сопоставляя значения ФЧ при вариации различных параметров, осуществляют их ранжирование, т. е. сортировку по степени влияния на результирующее качество системы. Это дает возможность исключить ряд малозначимых параметров или факторов из модели и в результате упростить модель и/или расчетные алгоритмы. Ранжирование составляет сущность одного из важных этапов создания и настройки имитационных моделей сложных систем, поскольку выявление частных коэффициентов влияния позволяет не только упростить математическое ядро модели, но и осуществлять ее оперативную калибровку в целях повышения достоверности.

В общем случае ФЧ (1) и (2) могут входить в состав векторов и матриц соответствующей размерности. Универсальный способ анализа чувствительности систем общего вида заключается в проведении натурных экспериментов с реальными системами, однако этот путь является весьма затратным и не всегда возможным. Поэтому такой анализ чаще всего проводят с имитационными моделями, которые выступают в качестве виртуальных объектов исследования. При этом для линейных моделей анализ чувствительности проводят на основе дифференциальных или разностных уравнений, что резко упрощает задачу анализа. Такая возможность рассматривается ниже для линейных систем обработки информации.

Чувствительность при анализе систем обработки информации

Сложные информационно-измерительные системы составляют одну из весьма обширных областей практического применения аппарата теории чувствительности. Они содержат некоторое количество датчиков, с помощью которых собирается информация о состоянии некоторого подвижного объекта, и используют принцип комплексирования.

В задачу устройств обработки информации в таких комплексных системах входит обеспечение необходимой точности оценивания (выработки) состояний, надежности и требуемого времени готовности. Хорошо известны традиционные системы обработки информации (СОИ), простейшая структура которых изображена на рис. 1. На вход блока обработки (БОИ) поступает смесь инструментальных погрешностей датчиков 1 и 2; на выходе БОИ формируется оценка погрешности ведущего датчика. Эффект повышения точности выработки параметров в таких схемах достигается простой компенсацией инструментальных погрешностей датчиков на выходе схемы; Y – измеряемый параметр. Теория таких систем хорошо известна [15–18], одна-

ко проблемы анализа их чувствительности и упрощения технической реализации остаются актуальными.

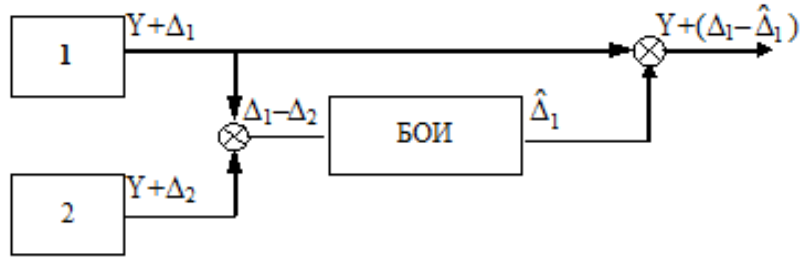


Рис. 1. Структура простейшей комплексной СОИ

Линейная модель погрешностей подобной системы имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w}; \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}; \mathbf{y} = \mathbf{H}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \quad (4)$$

$$M[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{m}_x(0), \mathbf{P}(0) = \text{cov}[\mathbf{x}(0)],$$

где $\mathbf{x}$ – n -мерный вектор состояний; $\mathbf{z}$ – m -мерный вектор измеряемых параметров; $\mathbf{y}$ – вектор выходных переменных, определяющих качество СОИ; $\mathbf{w}$ – вектор порождающих белых шумов; $\mathbf{v}$ – вектор белых шумов в канале измерений. Матрицы интенсивностей шумов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ обозначим $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ соответственно.

Для схемы рис. 1 с учетом обозначений (4) имеем:

$$\Delta_1 = \mathbf{H}_1\mathbf{x}, \mathbf{y} = (\Delta_1 - \hat{\Delta}_1); \mathbf{z} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2; \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1.$$

В блоке обработки информации (см. рис. 1) используются фильтры калмановского типа (ФКТ) [5, 15], в множество которых входят оптимальные (ОФК), редуцированные (РФК), упрощенные (УФК), стационарные (СтФ) и другие фильтры этого класса, обобщенное уравнение которых имеет вид

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)[\mathbf{z} - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}]; \hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (5)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}$ – $(n \times 1)$ – вектор оценок состояний; $\mathbf{K}(t)$ – $(n \times m)$ – матрица коэффициентов усиления фильтра, структура которой определяет тип используемого ФКТ. Для стационарных фильтров (СтФ) $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}$.

Качество оценок состояний отражает вектор ошибок оценки $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ согласно (4) и (5)

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}]\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{K}(t)\mathbf{v}; M[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{0}; \text{cov}[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{P}(0). \quad (6)$$

Полагая для простоты независимость шумов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$, запишем ковариационное уравнение для $\text{cov}[\mathbf{e}] = \mathbf{P}$ при произвольной матрице $\mathbf{K}(t)$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}^T + \mathbf{BQ}\mathbf{B}^T + \mathbf{K}(t)\mathbf{R}\mathbf{K}^T(t); \mathbf{I} = \mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}; \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (7)$$

Заканчивая общую характеристику рассматриваемой модели, укажем, что для ОФК матрица коэффициентов усиления фильтра

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}. \quad (8)$$

Подставив (8) в выражение (7), получим уравнение Риккати для ковариационной матрицы ОФК

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}\mathbf{B}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t), \mathbf{P}(0)=\mathbf{P}_0. \quad (9)$$

Анализ чувствительности в СОИ, уравнения согласованного режима работы которой приведены в (4)–(9), предполагает существование расчетной и действительной моделей, каждая из которых соответствует уравнению (4), однако параметры этих моделей различаются. Учитывая, что структурные особенности РМ и ДМ можно отразить параметрическими (например, обнуляя некоторые блоки матриц), будем считать, что РМ и ДМ имеют следующие множества параметров:

$$\chi = [\mathbf{P}_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}]; \quad \chi_\partial = [\mathbf{P}_{\partial 0}, \mathbf{A}_\partial, \mathbf{B}_\partial, \mathbf{H}_\partial, \mathbf{Q}_\partial, \mathbf{R}_\partial], \quad (10)$$

причем в ДМ вектор состояний и шумы обозначим как $\mathbf{x}_\partial$, $\mathbf{w}_\partial$, $\mathbf{v}_\partial$.

Функционирование ФКТ, созданного по данным РМ и работающего в действительных условиях в структуре СОИ (см. рис. 1), описывает выражение

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)[\mathbf{z}_\partial - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}]; \hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (11)$$

Учитывая, что $\mathbf{z}_\partial = \mathbf{H}_\partial \cdot \mathbf{x}_\partial + \mathbf{v}_\partial$, уравнения для действительных ошибок оценки $\mathbf{e}_\partial = (\mathbf{x}_\partial - \hat{\mathbf{x}})$ и его ковариационной матрицы $\text{cov}[\mathbf{e}_\partial] = \mathbf{P}_\partial$ удобно формировать, используя составные векторы и матрицы.[5]. Приведем их в окончательном виде ($\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}_\partial - \mathbf{A}$; $\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H}_\partial - \mathbf{H}$):

$$\dot{\mathbf{P}}_\Sigma = \mathbf{A}_\Sigma \cdot \mathbf{P}_\Sigma + \mathbf{P}_\Sigma \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_\Sigma \mathbf{Q}_\Sigma \mathbf{B}_\Sigma^T; \mathbf{P}_\Sigma(0); \mathbf{Q}_\Sigma = \text{cov}(\mathbf{w}_\Sigma); \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} & \Delta\mathbf{A} - \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\partial \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\partial & \Delta\mathbf{A} - \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{H} \\ \mathbf{B}_\partial & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\partial & \mathbf{P}_c \\ \mathbf{P}_c^T & \mathbf{P}_{x\partial} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{x\partial} = \text{cov}[\mathbf{x}_\partial]; \quad \mathbf{P}_\Sigma = \text{cov}[\mathbf{e}_\Sigma]; \quad \dot{\mathbf{e}}_\Sigma = \mathbf{A}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_\Sigma + \mathbf{B}_\Sigma \cdot \mathbf{w}_\Sigma; \quad \mathbf{e}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\partial \\ \mathbf{x}_\partial \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\partial \\ \mathbf{v}_\partial \end{bmatrix}.$$

Типовой результат анализа дополнительных погрешностей при работе расчетного ФКТ в действительных условиях, проведенный на основе уравнений (9) и (12), представлен на рис. 2, а. Сплошная кривая соответствует дисперсии ошибки оптимальной оценки $\mathbf{H}_0 \mathbf{P}_{\partial \text{opt}}(\mathbf{H}_0)^T$, полученной решением уравнения Риккати (9); штриховая линия – дисперсия действительной ошибки оценки $\mathbf{H}_0 \mathbf{P}_\partial(\mathbf{H}_0)^T$, полученная интегрированием ковариационного уравнения (12).

Аналогичные кривые на рис. 2, б характеризуют качество стационарного ФКТ, матрица коэффициентов усиления которого выбрана из равенства $K = K_{\partial \text{opt}}(\infty)$. Сопоставление кривых на каждом графике позволяет оценить потери точности при использовании расчетного фильтра ($\mathbf{P}_{\text{алг}}$) в действительных условиях функционирования, выбрать вариант упрощения.

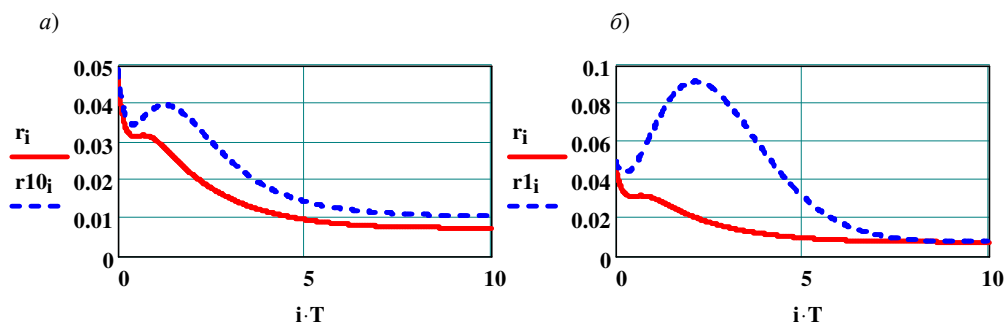


Рис. 2. Анализ дисперсии действительных ошибок

Чувствительность в задачах разработки алгоритмов СОИ

Проблема создания алгоритмического обеспечения СОИ, учитывая множество видов этих систем, весьма обширна. Это связано с тем, что специфика каждой конкретной СОИ предъявляет свои требования к алгоритмам обработки информации, что налагает отпечаток на технологию разработки алгоритмического обеспечения. Поэтому в рамках настоящего материала остановимся лишь на общих принципах применения элементов теории чувствительности при создании алгоритмического обеспечения СОИ, укажем те моменты, в которых теория чувствительности может принести практическую пользу.

Согласно общему подходу, изложенному выше, системы функционируют в некоторых неопределенных условиях, в лучшем случае известных с точностью до диапазонов изменения параметров. В этих условиях требуемое качество СОИ может быть достигнуто двумя путями: априорной настройкой алгоритмов на возможные вариации параметров и оперативной адаптацией алгоритмов. Первому направлению уделим больше внимания, поскольку практическая реализация оперативной адаптации связана с известными трудностями, вызванными асимптотическим характером процессов оперативной оценки параметров; неопределенностью темпа изменения параметров, интервалов их квазипостоянства; неопределенностью распределений параметров. Однако второй путь имеет перспективы практического применения, о чем будет сказано ниже.

Априорный выбор параметров алгоритмов обработки информации в условиях неопределенности предполагает снижение чувствительности к вариациям, существенно влияющим на качество СОИ факторов. Среди возможных подходов к синтезу с минимальной чувствительностью отметим методы, связанные с предварительным ранжированием факторов и использованием критериев, включающих помимо точностных составляющих еще и функции чувствительности. Часть из этих подходов требует расширения векторов состояний системы.

Так, один из этих подходов основан на введении вектора ФЧ в модель погрешностей [5] и выполнении далее обычной процедуры синтеза алгоритма по двум известным критериям (несмещенности и минимума суммы дисперсий ошибок оценки). Это позволяет снизить чувствительность к выбранным

параметрам, но возникает дополнительная необходимость упрощать полученный алгоритм.

Близким по смыслу к указанному, но не требующим расширения модели служит подход, в котором минимизируется критерий качества [5]

$$\text{sp}[\mathbf{P} + \beta \mathbf{P}_\mu], \quad (13)$$

где матрица $\mathbf{P}$ удовлетворяет уравнению (7), а $\mathbf{P}_\mu$ – ковариационная матрица вектора $\mathbf{e}_\mu$, элементы которого – ФЧ вектора ошибок оценки (6). Минимизация (13) по матрице $\mathbf{K}$ дает результирующее выражение вида $\mathbf{K} = (\mathbf{P} + \beta \mathbf{P}_\mu) \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \beta \mathbf{R}_\mu)^{-1}$, где β – весовой коэффициент.

Качество системы обработки первого порядка в установившемся режиме видно из рис. 3. Номинальное значение параметра $\sigma_{\text{ном}} = 10$.

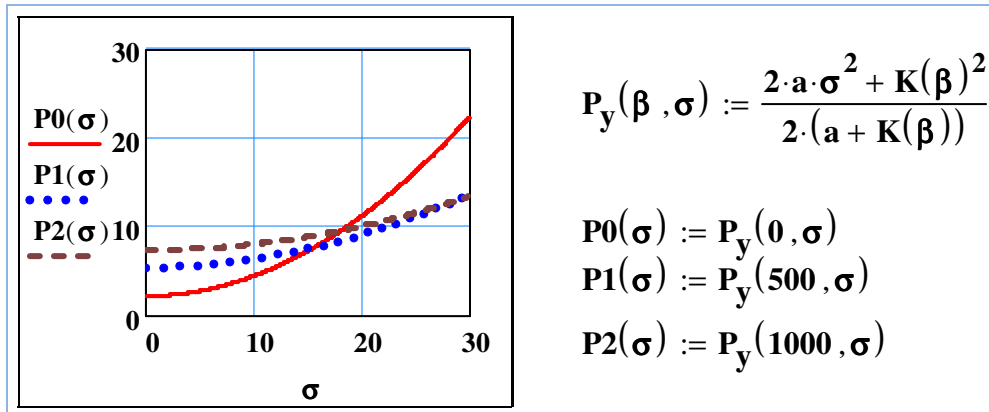


Рис. 3. Качество системы с локальной нечувствительностью

Несомненное прикладное значение имеет серия минимаксных постановок синтеза алгоритмов СОИ. Обозначим множество неопределенных параметров $\chi = (\mathbf{A} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{P}_0)$ и след матрицы $\mathbf{P}_\delta$ (12) как $\text{sp } \mathbf{P}_\delta = I(\mathbf{K}, \chi)$. В правой части рис. 4 приведены критерии, которые удобно использовать в случаях, если параметры известны с точностью до диапазонов.

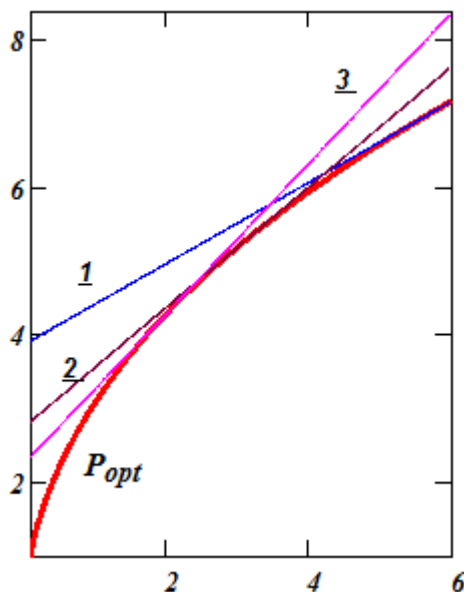
Критерий S_1 – классический минимаксный, обеспечивающий гарантированное качество системы на всем диапазоне вариаций параметров, и при $\chi = (\mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{P}_0)$ минимизирует след матрицы $\mathbf{P}_\delta$ на правой границе диапазона неопределенных параметров, т. е. будет обеспечивать гарантированный результат.

Критерий S_2 позволяет искать минимакс для следа разности матриц $\mathbf{P}_\delta$ и матрицы $\mathbf{P}_{\delta \text{ опт}}$, которая удовлетворяет уравнению Риккати (9). Критерий S_3 обеспечивает получение значений, усредненных на диапазоне параметров. Иллюстрацией свойств этих критериев служит график в левой части рис. 4.

Нижняя кривая на графике соответствует оптимальным значениям дисперсии ошибки оценки для каждого из значений параметра в заданном диапазоне. Прямые линии имеют номера, соответствующие номеру критерия.

Так, прямая 1 (критерий S_1) свидетельствует о том, что алгоритм обработки настроен на правую границу диапазона; для других значений параметра в рамках этого диапазона качество системы не будет хуже достигнутого на правой границе, однако оценки будут все больше отличаться от оп-

тимальных при вариациях параметров от правой границы влево. Линии 2 и 3 показывают, что такой способ настройки алгоритмов обработки позволяет получить усредненные на диапазоне оценки; приемлемость таких способов определяется допустимостью качества обработки на правой границе диапазона.



$$S_1 = \min_{\mathbf{K}(t)} \max_{\chi} I(\mathbf{K}, \chi)$$

$$S_1 = \min_{\mathbf{K}(t)} I(\mathbf{K}, \chi_{\max});$$

$$S_2 = \min_{\mathbf{K}(t)} \max_{\chi} [I(\mathbf{K}, \chi) - I_{\text{opt}}(\chi)]$$

$$S_3 = \min_{\mathbf{K}(t)} \int \text{sp } \mathbf{P}(\chi) d\chi$$

$$I(\mathbf{K}, \chi) = \text{sp } \mathbf{P}_\delta$$

$$\chi = (\mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{P}_0)$$

Рис. 4. Критерии минимаксного типа

В практике создания алгоритмов СОИ распространены задачи, связанные с синтезом упрощенных фильтров (УФ), которые формируются на основе упрощенных моделей. Если полная (в данном случае действительная) модель имеет $(n \times 1)$ -вектор состояний $\mathbf{x}$ и множество параметров χ_δ (10), то УФ синтезируется по упрощенной модели с $(n_1 \times 1)$ -вектором состояний $\mathbf{x}_1$ ($n_1 < n$), которая в данном случае выступает в качестве расчетной модели с множеством параметров χ (10). Проводя для такой модели обычный синтез и минимизируя след расчетной (упрощенной) модели ($\min (\text{sp } \mathbf{P}_\delta)$) по $\mathbf{K}_\delta$, получаем фильтр (11), матрица $\mathbf{K}_\delta = f(\chi)$ которого – $(n_1 \times m)$ -матрица.

Вследствие упрощения модели такой фильтр имеет дополнительные погрешности, для анализа которых используются уравнения (12). Уровень этих дополнительных помех можно снизить использованием модифицированного критерия синтеза вида $\min (\text{sp } \mathbf{P}_\delta)$ по $\mathbf{K}_m$, где матрица $\mathbf{P}_\delta$ удовлетворяет уравнениям (12). Полученный таким образом фильтр может быть назван модифицированным упрощенным (МУФ), имеет структуру и размерность УФ, но $(n_1 \times m)$ -матрица его коэффициентов усиления $\mathbf{K}_m = (\mathbf{P}_\delta \mathbf{H}^T + \mathbf{P}_c \Delta \mathbf{H}^T) \cdot \mathbf{R}_\delta^{-1}$.

Модифицированные упрощенные фильтры в действительных условиях функционирования обладают более высоким (по сравнению с УФ) качеством, поскольку их коэффициенты усиления $\mathbf{K}_m$ учитывают параметры действительной модели.

Оперативная коррекция алгоритмов обработки в СОИ, несмотря на отмеченные в начале этого раздела факторы, может быть реализована на основе известных канонических свойств невязок $v = [z - H \cdot \hat{x}]$ в алгоритмах (5) [19]. Так, для дискретного аналога алгоритма (5) вектор невязок должен иметь нулевой вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу B_k

$$M(v_k) = 0; \quad \text{cov}(v_k) = B_k = (HS_k H^T + R), \quad (14)$$

оценка которых в процессе обработки не вызывает затруднений. Если в реальных условиях свойства невязок отличаются от (14), это свидетельствует о несоответствии расчетной и действительной моделей, о необходимости соответствующих изменений параметров алгоритма (5).

Дополнительные возможности для такой коррекции дают и другие индикаторы рассогласования процедур обработки. Если помехи в модели системы – гауссовы, квадратичная форма вектора невязок $\rho_k = (v_k)^T (B_k)^{-1} v_k$ должна иметь распределение с m степенями свободы, математическое ожидание, равное m , и единичную дисперсию:

$$M(\rho_k) = m; \quad D(\rho_k) = 1. \quad (15)$$

Здесь m – размерность вектора измерений.

Оперативная оценка параметров (15) в процессе обработки также может быть проведена без затруднений (рис. 5) ($m = 1$).

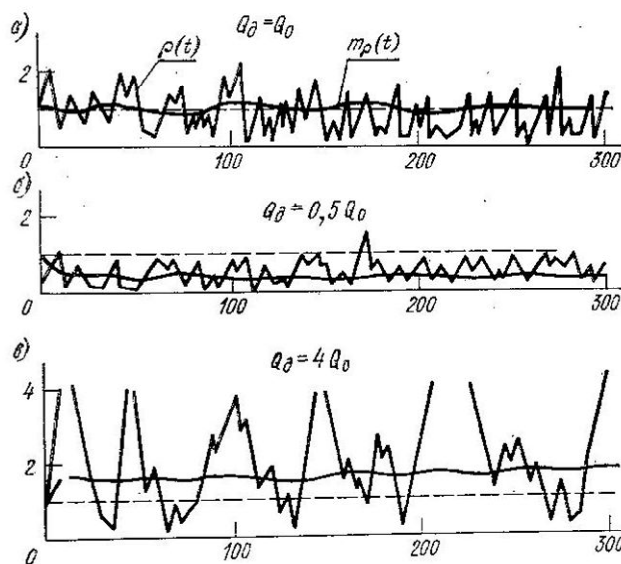


Рис. 5. Индикаторы качества процессов обработки

График (рис. 5, а) содержит текущие значения ρ_k и их математические ожидания при согласованности свойств измеряемых сигналов и алгоритма обработки. Графики б) и в) показывают, как реагируют индикаторы (15) на нерасчетный режим обработки при уменьшении и увеличении одного из параметров действительной модели.

Чувствительность при анализе и синтезе систем управления (СУ)

Применительно к системам управления аппарат теории чувствительности может быть использован аналогично описанному выше. Это объясняется не только дуальностью систем оценки и управления, но и тем, что как СОО, так и СУ являются динамическими системами, описываются дифференциальными или разностными уравнениями, создаются на основе расчетных моделей и функционируют в действительных условиях, как правило, отличных от расчетных. По этой причине большая часть того, что было описано применительно к СОО, может быть повторено и для СУ. Однако для СУ в понятие качества управления наряду с точностью на первый план выступает устойчивость реакций СУ на различные воздействия, которая в случае СОО гарантировалась применением ФКТ. Это определяет известную особенность анализа СУ. Поэтому, не повторяя отмеченные выше аспекты приложения теории чувствительности к анализу и синтезу СУ, остановимся лишь на некоторых аспектах устойчивости СУ при выборе вариантов регуляторов для технической реализации. Так же, как и для СОО, анализ нелинейных СУ, включающий анализ их чувствительности, возможен лишь численными методами или методами имитационного моделирования с проведением серий компьютерных экспериментов. Однако идеи и выводы могут быть раскрыты и при анализе линейных СУ, поскольку при таком анализе возможен аналитический подход, поэтому рассмотрим линейные одномерные и многомерные системы управления.

На рис. 6 приведена структура СУ с задающими сигналами λ , возмущениями β и выходными переменными y ; H и R — передаточные функции (одномерные системы) или передаточные матрицы (многомерные СУ) объекта управления и регулятора.

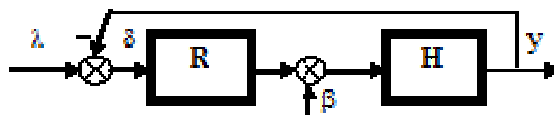


Рис. 6. Структура СУ

Проблема анализа (выбора) вариантов технической реализации заключается в том, что при любом подходе к синтезу многомерных или одномерных систем полученная по результатам синтеза информация не может быть непосредственно использована в реальных системах или моделях. Причина этого связана со сложностью полученных выражений, высоким порядком звеньев, входящих в структуру.

В этих условиях возникает необходимость введения упрощений в полученные при синтезе решения. Подобные упрощения могут быть связаны как с исключением некоторых звеньев из структуры регулятора, так и с аппроксимацией его переходной характеристики.

В общем случае необходимо обосновывать возможность и допустимость конкретных упрощений эталонных (полученных в результате синтеза) вари-

антов. Предварительный анализ этих проблем показал, что такое обоснование можно получить методами теории чувствительности.

Любое из принимаемых упрощений полученных решений так или иначе связано с параметрической или структурной вариацией элементов эталонных передаточных матриц (или функций) регуляторов. При наличии подобных вариаций динамическая система приобретает дополнительное движение, которое вызовет изменение свойств системы относительно исходного (заданного, желаемого).

Анализ чувствительности систем должен опираться на передаточные матрицы (многомерные СУ) или передаточные функции (одномерные СУ) замкнутых систем. При этом имеет место очевидное предположение, что синтезированная (эталонная) замкнутая система устойчива.

Одномерные системы. Передаточная функция замкнутой СУ (см. рис. 6) имеет вид

$$W(p) = y(p)/\lambda(p) = [1 + H(p) R(p)]^{-1} H(p) R(p). \quad (16)$$

Реакция этой системы на единичное ступенчатое воздействие $\lambda^0(p) = 1/p$, т.е. ее переходная характеристика $h(p) = W(p)/p$ служит исчерпывающей основой для анализа качества и устойчивости реакций замкнутой системы. Таким же свойством обладает и $h(p) \cdot p = W(p)$, т.е. передаточная функция (16). Поэтому, обозначая $W(p)$ (16) при эталонном регуляторе как $W(R)$, разложим эту функцию в ряд Тэйлора по степеням вариаций R , ограничиваясь членами первого порядка

$$W(R + \Delta R) = W(R) + [\partial W(R) / \partial R](\Delta R) = W(R) + [S(R)](\Delta R). \quad (17)$$

Выражение (17) определяет возможность структурного упрощения полученного регулятора. Действительно, если первое слагаемое $W(R)$ в этом выражении является передаточной функцией эталонной системы, устойчивой по условиям синтеза, то устойчивость второго слагаемого будет определяться видом ФЧ $S(R)$ и принимаемым вариантом структурной вариации ΔR . Понятно, что возможность структурного упрощения будет зависеть от конкретных условий решаемой задачи анализа.

В общем случае на основании выражения (17) могут быть сделаны выводы о возможности структурного упрощения, если ФЧ $S(R)$ и вариация ΔR по отдельности – передаточные функции устойчивых звеньев и если произведение $S(R)$ на ΔR – передаточная функция устойчивого звена.

Функция чувствительности $S(R)$ для рассматриваемого случая имеет вид

$$S(R) = H(p) / [1 + H(p) R(p)]^2. \quad (18)$$

В силу исходной устойчивости замкнутой СУ полюса передаточной функции $W(p) = W(R)$ (т.е. нули передаточной функции $[1 + H(p) R(p)]$) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости. Отсюда следует, что выражение (18) для ФЧ соответствует передаточной функции устойчивого звена, поскольку эта функция имеет полюса исходной (не варьированной) системы, что позволяет сделать несколько очевидных утверждений.

У т в е р ж д е н и е 1. Устойчивость ФЧ (18) свидетельствует о том, что для любых вариантов регуляторов R , полученных в результате синтеза, в

одномерных системах возможны упрощения путем структурных вариаций ΔR , касающихся устойчивых звеньев в составе эталонной передаточной функции $R(p)$.

Так, например, если передаточная функция регулятора $R(p)$ может быть представлена суммой нескольких апериодических (устойчивых) звеньев и интегратора (неустойчивого звена), то вариациям могут быть подвергнуты апериодические (устойчивые) звенья, т. е. вариация $\Delta R(p)$ должна быть устойчивой передаточной функцией. Однако в общем случае дополнительное движение $[S(R)](\Delta R)/p$ переходной характеристики может иметь ненулевое установившееся значение, т. е. подобные вариации могут вызвать статизм замкнутой системы.

У т в е р ж д е н и е 2. При вариации устойчивых составляющих в структуре регулятора $R(p)$ астатизм замкнутой системы сохраняется в том случае, если полином числителя функции чувствительности $S(R)$ (18) будет иметь хотя бы один нулевой корень.

Среди звеньев, входящих в структуру эталонной функции $R(p)$, могут присутствовать и неустойчивые интегрирующие звенья, часто встречающиеся при синтезе астатических систем. На вопрос, можно ли варьировать и неустойчивые звенья (например, менять коэффициент усиления интеграторов), ответа для общего случая дать нельзя, поскольку такая возможность существенным образом зависит от конкретных параметров и структуры системы. Единственным утверждением, которое можно сделать применительно к неустойчивым звеньям в структуре эталонного регулятора, является следующее.

У т в е р ж д е н и е 3. Возможность вариации неустойчивых звеньев в составе $R(p)$ определяется устойчивостью передаточной функции $[S(R)](\Delta R)$, образованной произведением ФЧ и вариации ΔR .

Подобный случай может включать, например, рассмотренную выше структуру регулятора, состоящего из суммы апериодических звеньев и интегратора k/p . Вариация Δk коэффициента усиления k интегратора возможна в том случае, если $S(R)$ будет иметь хотя бы один нулевой корень. Тогда произведение $S(R)$ на вариацию $\Delta R(p) = \Delta k/p$ образует устойчивую передаточную функцию. Более того, если $R(p)$ имеет интегратор, то вариация его коэффициента усиления не нарушает астатизм замкнутой системы. В этом легко убедиться, рассматривая полиномы в составе $H(p)$, $R(p)$:

$$H(p) = a(p) / b(p); \quad R(p) = c(p)/d(p),$$

для которых $S(R)$ (18) принимает вид

$$S(R) = a(p)b(p)[d(p)]^2 / [b(p)d(p) + a(p)c(p)]^2.$$

При наличии интегратора в $R(p)$ числитель $S(R)$ будет иметь множитель p^2 , что при $\Delta R(p) = \Delta k/p$ обеспечит нулевой установившийся уровень переходной характеристике $[S(R)](\Delta R)/p$.

Аналогичные вариации передаточной функции синтезированного регулятора могут иметь место при аппроксимации его переходной характеристики в целях получения упрощенного варианта [20].

Многомерные системы. Передаточная матрица замкнутой многомерной СУ (МСУ) согласно схеме на рис. 6 имеет вид [21, 22]

$$\mathbf{W}(p) = \mathbf{y}(p)/\mathbf{u}(p) = [1 + \mathbf{H}(p) \mathbf{R}(p)]^{-1} \mathbf{H}(p) \mathbf{R}(p). \quad (19)$$

Так же, как и для одномерного случая, реакции МСУ на единичные воздействия следующие: $\lambda_{\Sigma}^0(p) = E_n/p$ (λ_{Σ}^0 – $(n \times n)$ -матрица; E_n – единичная матрица порядка n , где n – число основных каналов МСУ), т.е. матрица ее переходных характеристик $h(p) = W(p)/p$ служит исчерпывающей основой для анализа качества и устойчивости реакций замкнутой системы. Таким же свойством обладает и $h(p) \cdot p = W(p)$, т. е. передаточная матрица (19). Для МСУ существенно то, что устойчивость замкнутых систем устанавливает числитель $s(p)$ определителя матрицы $[1 + H(p) R(p)]$, выступающий в роли характеристического полинома таких динамических систем [22]. Полином $s(p)$ присутствует в выражениях для каждого элемента матрицы $W(p)$, поэтому анализ устойчивости может проводиться на основе как отдельных элементов $W(p)$, так и их линейных форм, например следа матрицы $W(p)$. При анализе чувствительности МСУ целесообразно выбрать именно вариант $\text{sp}[W(p)]$, поскольку аппарат дифференцирования следа матриц по вектору или матрице достаточно хорошо разработан. Известные формулы для таких преобразований следа можно найти в работе [23]. Эти формулы включают варианты дифференцирования следа отдельных матриц, произведений и суммы произведений матриц. Однако в данном случае для дифференцирования следа матрицы $W(p)$ (19) по матрице $R(p)$ нужны формулы дифференцирования следа обратных матриц. Такие формулы были получены автором, однако в данном материале их вывод не приводится ввиду весьма большой громоздкости выкладок. Опуская вывод, приведем лишь одну из таких формул, которая необходима для анализа чувствительности МСУ (19) в данной постановке

$$S(R) = \partial \text{sp}[W(R)] / \partial(R) = [1 + H(p) R(p)]^{-1} \cdot H(p) \cdot [1 + H(p) R(p)]^{-1}, \quad (20)$$

где $W(R)$ — матрица $W(p)$ (19) МСУ при эталонном регуляторе $R(p)$.

Учитывая (20), разложение следа $W(R)$ в ряд Тэйлора по степеням вариаций R , ограничиваясь членами первого порядка примет вид

$$\text{sp}[W(R + \Delta R)] = \text{sp}[W(R)] + \text{sp}[S(R) \cdot (\Delta R)] = \text{sp}[W(R) + W(\Delta R)]. \quad (21)$$

Здесь $W(\Delta R) = S(R) \cdot \Delta R$ — матрица вариаций свойств МСУ.

Анализ матриц $S(R)$ и $W(\Delta R)$ показал, что возможности структурного упрощения многомерных регуляторов $R(p)$ в МСУ в целом аналогичны описанному выше для одномерных систем. Это сходство опирается на очевидную устойчивость передаточной матрицы чувствительности (20) для исходной устойчивой МСУ (19). Так же, как и для одномерных систем, при анализе МСУ могут быть сформулированы утверждения, приведенные выше [20].

Из анализа поставленных проблем следует, что рассмотренные вопросы, конечно, не исчерпывают все области практического приложения теории чувствительности. В представленном материале автор остановился лишь на отдельных вопросах практики создания СОИ и СУ с применением теории чувствительности, каждый из которых заслуживает отдельного рассмотрения.

Материал подготовлен при поддержке АВЦП

«Развитие научного потенциала высшей школы», грант № 2.1.2/5534.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Розенвассер, Е.Н.** Чувствительность систем автоматического управления / Е.Н.Розенвассер, Р.М. Юсупов. М.: Наука. 1981.- 464 с.
2. **Yusupov, R.** Sensitivity of Automatic Control Systems / R.Yusupov, E.Rozenwasser // CRS Press, Roca Raton, London, New York, Washington, DC, 1999, p. 436.
3. **Городецкий, В.И.** Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / В.И.Городецкий [и др.].- Л.: Энергия. 1971.- 345 с.
4. **Розенвассер, Е.Н.** Чувствительность систем автоматического управления / Е.Н.Розенвассер, Р.М. Юсупов.- Л.: Энергия, 1969.- 208 с.
5. **Ивановский, Р.И.** Теория чувствительности в задачах управления и оценки / Р.И.Ивановский, А.А.Игнатов.- Л.: ЦНИИ «Румб», 1986. 111 с.
6. **Фетисов, В.Н.** Теория чувствительности в задачах стохастического управления // Тезисы докл. 6-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности, теории чувствительности и их применениям. - М.: ИПУ, 1982. С. 114-115.
7. **Фетисов, В.Н.** Построение алгоритмов управления технологическими процессами при неточных результатах идентификации / В.Н.Фетисов, Ш.Е.Штейнберг // Вопросы промышленной кибернетики (Тр. ЦНИИКА).- 1973. Вып. 36.- С. 64-67.
8. **Фетисов, В.Н.** К задаче управления объектом с неизвестным параметром // АиТ. 1973. № 8. С. 64-67.
9. **Eslami, M.** Theory of sensitivity in dynamic systems. An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1994. 600 pp.
10. **Global Sensitivity Analysis The Primer** Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D. Saisana, M., and Tarantola, S., 2008.
11. **Chan, K., Tarantola, S., Saltelli, A., Sobol', I. M.** In Sensitivity Analysis; Chan, K., Scott, M., Eds.; John Wiley & Sons, Chichester, 2000; p 167
12. **M. Kleiber, H. Antunez, T. D. Hien and P. Kowalczyk,** Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics: Theory and Finite Element Computations, John Wiley & Sons, New York, NY, 1997.
13. **Saltelli, K. Chan and E. M. Scott,** eds., Sensitivity Analysis, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, New York, NY, 2000.
14. <http://mas.exponenta.ru/literature/LSens.pdf>
15. **Ривкин, С.С.** Статистическая оптимизация / С.С.Ривкин, Р.И.Ивановский, А.В.Костров.- Л.: Судостроение, 1976, 280 с.
16. **Дмитриев С.П.** Высокоточная морская навигация.- Л.: Судостроение, 1991,-222 с.
17. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задаче обработки навигационной информации.- СПб.: ГНЦ РФ «Электронприбор», 2009. – 496 с.
18. **Синицын, И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева.- М.: Логос, 2007.- 772 с.
19. **Ивановский, Р.И.** Оценка параметров движения маневрирующих объектов / Р.И.Ивановский, М.К.Эпштейн.- Л.: ЦНИИ «Румб», 1982. 96 с.
20. <http://mas.exponenta.ru/>
21. **Ивановский, Р.И.** Синтез многомерных систем (с заданными свойствами) / Р.И.Ивановский, А.Г.Таранов.- М.: Наука, 1970.- 172 с.
22. **Ивановский, Р.И.** Синтез многомерных систем управления. Проблема устойчивости / Р.И.Ивановский, А.В.Нестеров // Тр. Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2005). СПб., 2005.
23. **Ивановский, Р.И.** Теория вероятностей и математической статистики. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. — СПб.: БХВ, 2008. - 528 с.

Abstract. The paper presents the sensitivity theory applications to the analysis of data processing and controls systems under off-design operating conditions; to the problems of simplifying the mathematical error models, simplifying the filters in data processing systems and the regulating devices in controls systems; to the problems of synthesizing the systems with low or minimal sensitivity to simulation errors.