

3. **Фрейман, Э.В.** Особенности построения алгоритмов ориентации гироскопических инклинометров на базе одноосного гиросtabilизатора / Э.В.Фрейман, С.В.Кривошеев, В.В.Лосев // Гироскопия и навигация.- 1999.-№ 1.
4. **Киселев, М.И.** Геодезия / М.И.Киселев, Д.Ш.Михелев.- М.: Издательский центр «Академия», 2009.- 384 с.
5. **Биндер, Я.И.** Об использовании различных схем гироинклинометров для непрерывной съемки скважин произвольной ориентации / Я.И.Биндер [и др.] // Гироскопия и навигация.- 2010.-№4.
6. **Биндер Я.И.** Инклинометр непрерывного действия на основе бесплатформенного гироскопа направления. Ч. I / Я.И.Биндер, Т.В.Падерина // Изв. вузов. Приборостроение.- 2003.- № 12.

Abstract. The structure of the mobile inclinometric station performing continuous inclinometric survey of the relative position of the wellbore trajectories of the underground mine borehole group, and its algorithmic description and software are considered. New engineering solutions obtained when designing the stations are analyzed. The results of the station tests under excavation conditions are presented.

Материал поступил 4.04.11

УДК 621.391.172

К. С. АМЕЛИН, О. Н. ГРАНИЧИН

ВОЗМОЖНОСТИ РАНДОМИЗАЦИИ В АЛГОРИТМАХ ПРЕДСКАЗАНИЯ КАЛМАНОВСКОГО ТИПА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВНЕШНИХ ПОМЕХАХ В НАБЛЮДЕНИИ

Рассматривается задача предсказания значений случайного процесса, при которой предполагается, что порождающие исследуемый процесс неопределенности имеют статистическую природу, а наблюдения производятся с неизвестными, но ограниченными помехами. Предлагается рандомизированный алгоритм, отфильтровывающий произвольные внешние помехи в наблюдении. Работоспособность нового алгоритма при нерегулярных помехах в наблюдениях иллюстрируется примерами имитационного моделирования в сравнении с традиционными подходами.

Введение

Любая модель никогда не бывает совершенным описанием реальной системы. Очень важно определить в модели те пределы, при которых моделью еще можно пользоваться. Разработка методов и процедур анализа качества моделей – центральный вопрос в идентификации систем [1, 2].

Амелин Константин Сергеевич. Аспирант Санкт-Петербургского государственного университета.

Граничин Олег Николаевич. Доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета.

Статья по докладу на 3-й мультikonференции по проблемам управления.

Задача предсказания значений случайного процесса, порождаемого белым шумом, пропущенным через линейный фильтр, является наиболее типичной для калмановской фильтрации. Изучение случая наблюдений со статистическими погрешностями восходит к пионерским работам Калмана и Бьюси и к настоящему времени представляется вполне законченным. Наряду со статистическими развиваются и минимаксные постановки задач, в которых о неопределенностях предполагается только ограниченность в каком-либо смысле, а в остальном они могут быть произвольными. В таких постановках при априорной известности уровня возмущений обычно удовлетворяются получением предсказаний в виде множеств, у которых размеры стабилизируются с течением времени [3–10]. При этом фактически не рассматриваются возможности получения обоснованных точечных оценок. Дальнейшее практическое использование оценок-множеств ведет к сложным задачам робастной устойчивости.

В статье рассматривается смешанная постановка задачи, при которой предполагается, что порождающие исследуемый процесс $\{\theta^n\}$ неопределенности $\{w^n\}$ имеют статистическую природу

$$\theta^{n+1} = A\theta^n + w^{n+1},$$

а наблюдения $\{y_n\}$ производятся с неизвестными, но ограниченными внешними помехами $\{v_n\}$

$$y_n = \varphi_n^T \theta^n + v_n.$$

Сложность проблемы фильтрации в этом случае часто обусловлена недостаточной вариативностью последовательности наблюдений. Классическая теория калмановской фильтрации хорошо развита для случая помех наблюдения с известными «хорошими» статистическими свойствами (независимость, центрированность и т. п.). При этом последовательность «входов» (регрессоров) $\{\varphi_n\}$ в модели наблюдения обычно предполагается детерминированной.

Для «обогащения» последовательности наблюдений (повышения их вариативности) в работах [11, 12] предложено выбрать процесс получения данных с использованием специальных пробных сигналов в качестве входов. Поясним, что в широком смысле рандомизированными называются алгоритмы, в которых один или несколько шагов базируются на случайном выборе одного из многих детерминированных правил. В рассматриваемом случае при решении задачи фильтрации это случайный выбор набора коэффициентов φ_n на этапе получения данных измерений.

Предложенный алгоритм позволяет осуществить фильтрацию при аддитивно действующей в канале наблюдения помехе, которая может не обладать какими-либо «полезными» статистическими свойствами и вообще не быть случайной. (Здесь под «полезными» подразумеваются те свойства, которые можно использовать в алгоритме). Предложенный в [11, 12] новый рандомизированный алгоритм при малых неконтролируемых возмущениях $\{w^n\}$ в динамике модели позволяет получать почти точные оценки даже при высоком уровне помех наблюдения. При этом процедура работает для произвольных внешних помех в наблюдении и не требует априорного знания их характеристик. Необходимым условием является только их независимость от рандомизации в канале наблюдения (в математическом смысле последовательности внешних помех наблюдения $\{v_n\}$ и рандомизированных «входов» $\{\varphi_n\}$ некоррелированы). Помехи могут быть белыми шумными или коррелированными, с нулевым средним или

смещенные (среднее не ноль), уровень сигнал–шум может быть высоким или низким. В задаче трекинга новый рандомизированный алгоритм детально изучен в работах [13–15].

Основная идея обоснования оригинального нового способа базируется на преобразовании уравнения модели наблюдений. Если левую и правую части соответствующего уравнения домножить на рандомизированный центрированный вектор коэффициентов преобразования сигнала в канале наблюдения, то для новой последовательности наблюдений получается модель с центрированной статистической неопределенностью. Применение к этой модели традиционных калмановских подходов к прогнозированию позволяет сформулировать и обосновать новые алгоритмы прогнозирования. Серия проведенных авторами имитационных экспериментов показывает, что рандомизированный фильтр дает при определенных условиях лучшее качество фильтрации по сравнению с минимаксными алгоритмами.

Статья организована следующим образом. Вначале дан иллюстрирующий предварительный пример. Далее описывается способ предсказания значений случайного процесса, наблюдаемого на фоне произвольных помех. Обосновывается разумность его применения в той ситуации, когда можно реально рандомизировать последовательность входов модели наблюдения (измерений) – коэффициентов преобразования изучаемого процесса. Предлагаемый фильтр имеет структуру, похожую на упрощенный вариант фильтра Калмана, что может говорить о его определенных оптимальных свойствах. Приведены результаты по оптимизации выбора параметров алгоритма при априорном задании характеристик динамики изменений фильтруемого процесса и уровня помех в наблюдениях. Показан пример имитационного моделирования. В заключение подведены итоги и формулируются ближайшие планы дальнейших исследований.

Предварительный пример

Рассмотрим задачу оценки неизвестной случайной скалярной величины θ , принимающей значения 0 или 1, которая последовательно $n = 1, 2, \dots$ регистрируется с выбираемыми экспериментатором скалярными весами φ_n в зашумленном канале наблюдения (измерения производятся с помехами)

$$y_n = \varphi_n \theta + v_n.$$

С исторической точки зрения эта задача является классической. Иногда она трактуется как задача об обнаружении (детектировании) сигнала $\{\varphi_n\}$, который, может быть, попадает в устройство регистрации (случай $\{\theta = 1\}$) или не попадает (случай $\{\theta = 0\}$). Оцениваемая величина θ представляет собой характеристику типа «да – нет». Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на этой задаче, поэтому набор возможных способов её решения при различных предположениях о статистических свойствах сигнала $\{\varphi_n\}$ и «хороших» помехах $\{v_n\}$ достаточно обширен [4].

Будем считать, что возможен случайный (рандомизированный) выбор весов φ_n . Пусть $\{\varphi_n\}$ – последовательность значений независимых между собой случайных величин с известным ненулевым средним значением $M_\varphi \neq 0$ и положительной ограниченной дисперсией $\sigma_\varphi^2 > 0$ и $\varphi_1 \neq M_\varphi$. Просуммировав и усред-

нив n последовательных данных наблюдения, получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi_k \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

В силу усиленного закона больших чисел [16] последовательность величин $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi_k$ стремится к среднему значению M_Φ . Если взять $\hat{\theta}^0 = 0$ и в качестве очередной оценки выбрать

$$\hat{\theta}^n = \frac{1}{nM_\Phi} \sum_{k=1}^n y_k,$$

то, предполагая случайную природу помех наблюдения, их независимость, одинаковую распределенность и ограниченность вторых статистических моментов, можно также доказать сходимость с вероятностью единица последовательности оценок $\{\hat{\theta}^n\}$ к значению $\theta + \frac{M_v}{M_\Phi}$, где M_v – среднее значение помехи.

В момент времени n при выборе гипотезы о значении величины θ разумно взять операцию сравнения величины текущей оценки $\hat{\theta}^n$ с некоторым *пороговым значением* δ . Если $\hat{\theta}^n < \delta$, то принимается гипотеза $\{\theta = 0\}$, в противном случае $\{\theta = 1\}$. При известной величине M_v , естественно, в *решающем правиле* задать пороговое значение $\delta = \frac{1}{2} + \frac{M_v}{M_\Phi}$.

При произвольных помехах в наблюдении этот простой алгоритм не годится. Даже если помехи случайные, независимые, одинаково распределенные, но с неизвестным средним значением, то при $\left| \frac{M_v}{M_\Phi} > \frac{1}{2} \right|$ рассмотренный выше алгоритм в пределе будет давать неправильные ответы.

Как все-таки подступиться к решению такой задачи? Пусть помехи представляют собой значения неизвестной, но ограниченной детерминированной функции: $|v_n| \leq C_v, n = 1, 2, \dots$. Обозначим $\Delta_n = \Phi_n - M_\Phi, n = 1, 2, \dots$ – центрированные входы. Предположим дополнительно ограниченность четвертого центрального момента: $E\{|\Delta_n|^4\} < \infty$. Здесь и далее $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания (усреднения).

Домножим на Δ_n обе части соотношения, определяющего наблюдаемые величины y_n , и, произведя несложные преобразования, получим

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2 \theta + \Delta_n M_\Phi \theta + \Delta_n v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Рандомизация $\{\Phi_n\}$ при произвольных внешних помехах $\{v_n\}$ обеспечивает центрированность погрешностей в полученной новой модели наблюдений. Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k M_\Phi \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Первое и второе слагаемые в правой части при сделанных предположениях в силу усиленного закона больших чисел [16] при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица стремятся к $\sigma_\Phi^2 \theta$ и к нулю соответственно. Можно показать, что по той же причине и последнее слагаемое с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Отсюда следует, что последовательность оценок $\{\hat{\theta}^n\}$, формируемых по правилу

$$\hat{\theta}^n = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k^2} = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{1}{\sum_{k=1}^n \Delta_k^2} (\Delta_k \hat{\theta}^{n-1} - y_k) \approx \hat{\theta}^{n-1} - \frac{1}{n \sigma_\Phi^2} (\Delta_k \hat{\theta}^{n-1} - y_k), \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится с вероятностью единица к θ . Зададим некоторое пороговое значение $\delta = 1/2$. В качестве решающего правила в момент времени n можно выбрать операцию сравнения величины текущей оценки $\hat{\theta}^n$ с выбранным пороговым значением δ . Если $\hat{\theta}^n < \delta$, то принимается гипотеза о том, что $\{\theta = 0\}$, в противном случае $\{\theta = 1\}$. Заметим, что домножение на Δ_n обеих частей соотношения, определяющего наблюдаемые величины y_n , не является составной частью алгоритма, а используется лишь для его обоснования.

Выведенное правило фактически представляет собой рандомизированный итеративный алгоритм, в котором на каждой итерации наблюдение является результатом «взвешивания» со случайным коэффициентом скалярной величины θ вместе с аддитивной ограниченной помехой. Далее идея рандомизации процесса наблюдений будет использована при решении задачи фильтрации общего вида.

Предсказание случайного процесса, наблюдаемого на фоне произвольных ограниченных помех

Ограничимся рассмотрением следующей постановки задачи: наблюдается скалярный сигнал, удовлетворяющий уравнению

$$y_n = \Phi_n^T \theta^n + v_n, \quad (1)$$

представляющий собой преобразованный векторный процесс $\{\theta^n\}$, $\theta^n \in R^r$ и помеху наблюдения $\{v_n\}$. Здесь Φ_n – r -мерный вектор, известный в момент времени n . Векторный процесс $\{\theta^n\}$ порождается устойчивым линейным фильтром

$$\theta^{n+1} = A \theta^n + w^{n+1}, \quad (2)$$

в котором A – известная матрица: $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)} \leq 1$; $\{w^n\}$ – реализация последовательности центрированных независимых случайных величин. Здесь и далее $\|\cdot\|$ – норма; $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\lambda_{\min}(\cdot)$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы A .

Перечислим основные условия, при которых будут формулироваться основные результаты.

А. Входы $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с ограниченными известными математическими ожиданиями: $\|E\{\varphi_n\}\| \leq M_\varphi < \infty$, $\forall n$ векторы φ_n не зависят от случайных величин $\{w^1, \dots, w^n\}$ и от $\{v_1, \dots, v_n\}$, если $v_1, \dots, v_n$ – случайные. Случайные векторы

$$\Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\}$$

имеют симметричные функции распределения с матрицами ковариаций, удовлетворяющими условиям:

$$E\{\Delta_n \Delta_n^T\} = B > 0, \quad \|B\| \leq \sigma_\Delta^2 < \infty,$$

и ограниченным четвертым статистическим моментом

$$E\{\|\Delta_n\|^4\} = M_4^4 < \infty.$$

Б. $\forall n$ – случайные векторы w^{n+1} , независимые и центрированные ($E\{w^{n+1}\} = 0$), удовлетворяющие условию

$$E\{w^n w^{nT}\} \leq Q_w \leq \sigma_w^2 I < \infty.$$

В. Последовательность помех наблюдения $\{v_n\}_{n \geq 1}$ представляет собой либо значения детерминированной неизвестной ограниченной функции $|v_n| \leq C_v$, $n = 1, 2, \dots$, либо $\forall n$ – реализацию случайных векторов, которые независимы с Δ_n и ограничены в среднеквадратическом смысле

$$E\{v_n^2\} \leq C_v^2 < \infty.$$

Здесь и далее $B > 0$ означает, что B – положительно-определенная матрица.

Задача *фильтрации с прогнозом на один шаг* состоит в нахождении оценки $\hat{\theta}^{n+1}$ значения процесса $\{\theta^n\}$ в момент времени $n+1$ по наблюдениям $y_k, \varphi_k, k \leq n$. Качество фильтрации определяется средней величиной квадрата невязки

$$E\{\|\hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1}\|^2\}.$$

Обычно считают, что в модели наблюдений векторы $\{\varphi_n\}$ задаются детерминированной последовательностью. Предположим, что последовательность векторов $\{\varphi_n\}$ случайная и удовлетворяет условию **А**.

При сделанном предположении **А** процесс (1) измерения процесса θ^n является фактически рандомизированным, так как искомый сигнал «взвешивается» со случайно выбираемым набором коэффициентов φ_n , значения которых в текущий момент известны.

Рассмотрим следующий алгоритм построения очередной оценки

$$\hat{\theta}^{n+1} = A\hat{\theta}^n - \alpha A \Gamma \Delta_n (\varphi_n^T \hat{\theta}^n - y_n), \quad \Delta_n = \varphi_n - E\{\varphi_n\}, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, \dots$, $\alpha > 0$ – размер шага и Γ – положительно определенная симметричная матрица.

Будем считать, что начальные данные $\hat{\theta}^0$ заданы произвольным неслучайным вектором из R^r . Алгоритм (3) называем рандомизированным, так как текущее измерение выполняется с рандомизированным входом (набором весов), и изменение текущей оценки происходит в выбираемом случайно (рандомизированном) направлении $\Delta\Gamma_n$.

В приложении приведено доказательство следующей теоремы о свойствах оценок алгоритма (3).

Т е о р е м а . Пусть последовательности $\{y_n\}, \{\varphi_n\}, \{v_n\}, \{\theta^n\}$ и $\{w^n\}$ связаны уравнениями (1) и (2), $\alpha > 0$, Γ – положительно определенная матрица и $\hat{\theta}^0$ – произвольный неслучайный вектор из R^r [12].

Если выполнены предположения **А–В**, тогда для ошибок предсказания оценок $\{\hat{\theta}^n\}$, генерируемых по алгоритму (3), для любого $\rho > 0$ и достаточно малого α такого, что

$$\psi(\alpha, \rho) = (1 - 2\alpha\lambda_{\min}(\mathbf{B}\Gamma) + \alpha^2 \|\Gamma\|^2 (M_4^4 + (M_\varphi + \frac{1}{\rho})M_\varphi \text{Tr}[\mathbf{B}])) \|\mathbf{A}\|^2 < 1, \quad (4)$$

выполняются неравенства

$$E\{\|\hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1}\|^2\} \leq \frac{r\sigma_w^2 + \alpha^2(1 + M_\varphi\rho)\|\mathbf{A}\Gamma\|^2 \text{Tr}[\mathbf{B}]C_v^2}{1 - \psi(\alpha, \rho)} + \psi(\alpha, \rho)^n E\{\|\hat{\theta}^0 - \theta^0\|^2\}. \quad (5)$$

Заметим, что полученная в теореме оценка является точной в том смысле, что при замене в условиях неравенств на равенства выражение (5) в типичных случаях также превращается в равенство.

Второе слагаемое в правой части неравенства (5) показывает вклад неопределенности о начальных данных и экспоненциально стремится к нулю с течением времени.

Интересно проанализировать первое слагаемое. Обычно в предположениях ограниченности помех при решении задач минимаксной фильтрации удовлетворяются результатами, точность которых пропорциональна характерным размерам множества неопределенности. Из формулы (5) следует неожиданное новое свойство рандомизированного алгоритма (точнее, алгоритма с рандомизированным процессом измерений и изменяющим текущую оценку в выбираемом случайном направлении). При малом уровне неконтролируемого изменения исследуемого процесса (малом σ_w^2) за счет выбора меньшего параметра шага алгоритма α возможно достижение малой среднеквадратичной невязки по сравнению с уровнем помех наблюдения C_v .

Оптимизация выбора параметров алгоритма

При известных априори характеристиках динамики изменений процесса $\{\theta^n\}$ и уровня помех $\{v_n\}$ в наблюдениях можно поставить и решить задачу оптимизации выбора параметров алгоритма.

Результат теоремы дает возможность изучить зависимость качества фильт-

рации от величины размера шага алгоритма α . Пусть $\Gamma = B^{-1}$, $E\{\|\hat{\theta}^0 - \theta^0\|^2\} = 0$, $\|A\| = 1$. Введем обозначения:

$$c = \frac{r\sigma_w^2}{2}, \quad d(\rho) = \frac{M_4^4 + (M_\Phi + 1/\rho)M_\Phi \text{Tr}[B]}{2\lambda_{\min}^2(B)}.$$

В этом случае для достаточно малых α из теоремы следует, что

$$E\{\|\hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1}\|^2\} \leq D(\alpha, \rho) + O(\alpha^2),$$

где

$$D(\alpha, \rho) = c\left(\frac{1}{\alpha} + d(\rho)\right) + \left(d(\rho)^2 + \frac{(1 + M_\Phi \rho)\text{Tr}[B]C_v^2}{2c\lambda_{\min}^2(B)}\right)\alpha.$$

Последнее выражение характеризует взаимное влияние возможности фильтрации и чувствительности к помехам при достаточно малых α . На практике дискретные модели обычно используются как приближения непрерывных. Малость размера шага алгоритма α естественным образом «увязывается» с малым шагом дискретизации.

Оптимизируя по α и ρ выражение для $D(\alpha, \rho)$, находим

$$\alpha^* = \left(d(\rho^*)^2 + \frac{(1 + M_\Phi \rho^*)\text{Tr}[B]C_v^2}{2c\lambda_{\min}^2(B)}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где ρ^* – точка минимума функции

$$\bar{D}(\rho) = c\left(d(\rho) + 2\sqrt{d(\rho)^2 + (1 + M_\Phi \rho)\text{Tr}[B]C_v^2\lambda_{\min}^{-2}(B)/(2c)}\right). \quad (6)$$

Если $M_\Phi = 0$, то функция $D(\alpha, \rho)$ не зависит от ρ . В такой ситуации получаем

$$\alpha^* = \frac{2\sigma_w\lambda_{\min}^2(B)}{\sqrt{M_4^8\sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(B)\text{Tr}[B]\sigma_v^2/r}}$$

и

$$\bar{D}^* = \bar{D}(0) = \frac{r\sigma_w}{4\lambda_{\min}^2(B)}(M_4^4\sigma_w + 2\sqrt{M_4^8\sigma_w^2 + 4\lambda_{\min}^2(B)\text{Tr}[B]C_v^2/r}).$$

Пусть $r = 1$, $\{\phi_n\}$ – последовательность скалярных значений независимых бернуллиевских (равных $\pm\phi$ с одинаковой вероятностью) случайных величин и $\sigma_w^2 \ll C_v^2$, тогда

$$\alpha^* A \Gamma \approx \frac{\sigma_w}{|\phi| C_v}.$$

Интересно заметить, что это значение приблизительно совпадает с предельной величиной калмановского коэффициента усиления для фильтра Калмана, если помехи наблюдения $\{v_n\}$ независимые и равны $\pm C_v$ с равной вероятностью.

Пример

Рассмотрим пример применения рандомизированного алгоритма фильтрации (3) к решению задачи о предсказании значения скалярного процесса $\{\theta^n\}$, порождающегося устойчивым линейным фильтром

$$\theta^{n+1} = \theta^n + w^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta^1 = 0,$$

где $\{w^n\}$ представляет собой реализацию независимых равномерно распределенных на интервале $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ случайных величин

$$E\{w^n\} = 0, \quad E\{(w^n)^2\} = \frac{2}{81}.$$

Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta^n + v_n,$$

представляющие собой смесь преобразованного процесса $\{\theta^n\}$ и *неизвестной, но ограниченной* детерминированной помехи $\{v_n\} : |v_n| \leq 2$.

При компьютерном моделировании рандомизация процесса наблюдений достигалась за счет выбора в качестве последовательности коэффициентов преобразования оцениваемого процесса в канале наблюдения $\{\varphi_n\}$ последовательности значений независимых между собой случайных величин, порождаемых равномерным распределением на интервале $[0, 5; 1, 5]$.

Процесс $\{\theta^n\}$ наблюдался на интервале времени от 1 до 200. Качество предсказания определялось средней величиной невязки

$$\tilde{D}(\{\hat{\theta}^n\}) = \frac{1}{199} \sum_{n=1}^{199} \|\hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1}\|^2.$$

Оптимизация по ρ функции $\bar{D}(\rho)$ из (6) дает значение $\rho^* = 0,269$. Подставив это значение в формулу для α^* , получаем для алгоритма (3) оптимальное в данном случае значение размера шага: $\alpha^* \approx 11,3808$, $\Gamma = 1/48$, и ошибка прогнозирования не превосходит $D(\alpha^*, \rho^*) = 1,3699 < C_v^2 = 4$.

При этом $\alpha^* \Gamma = 11,3808 / 48 = 0,2371$.

В типичных случаях для четырех разных помех показано сравнительное поведение оценок предсказания, формируемых по трем алгоритмам (рис. 1–4):

по рандомизированному

$$\hat{\theta}^{n+1} = \hat{\theta}^n - 0,2371(\varphi_n - 1,0)(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n), \quad (7)$$

по алгоритму LMS [1] (упрощенному фильтру Калмана [4])

$$\hat{\theta}^{n+1} = \hat{\theta}^n - 0,2371\varphi_n(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n) \quad (8)$$

и фильтру Калмана:

$$\hat{\theta}^{n+1} = \hat{\theta}^n - K_n \varphi_n (\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n), \quad (9)$$

$$K_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2}, \gamma_n = \gamma_{n-1} - \frac{\varphi_n^2 \gamma_{n-1}^2}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2} + \frac{2}{81}, \gamma_0 = 0.$$

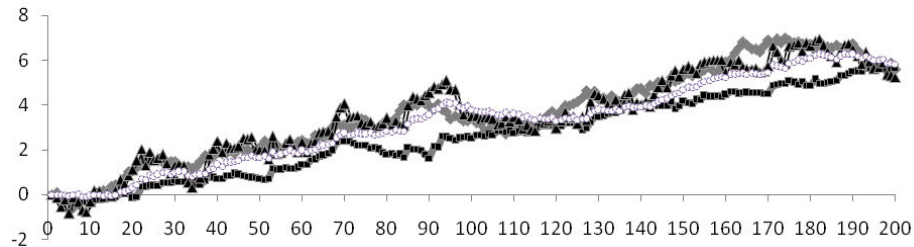


Рис. 1. Фильтрация при белом шумных помехах $v_n = 4,0 * (\text{rand}() - 0,5)$

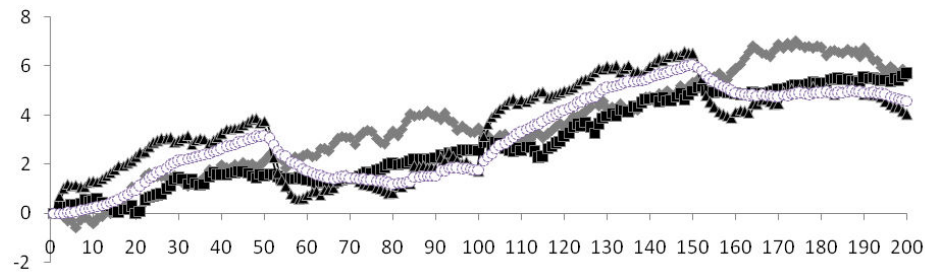


Рис. 2. Фильтрация при нерегулярных помехах $v_n = 0,1 * \sin(n) + 1,9 * \text{sign}(50 - n \bmod 100)$

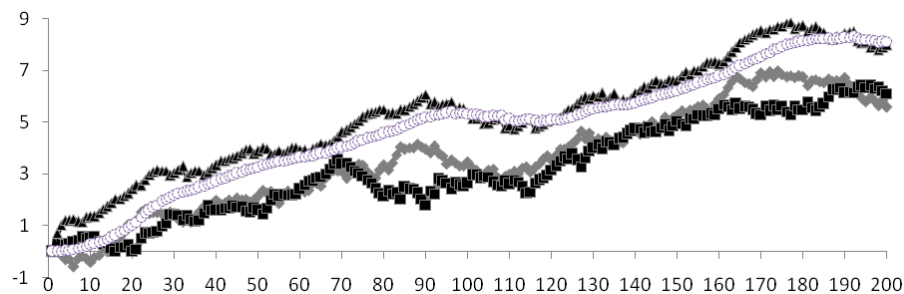
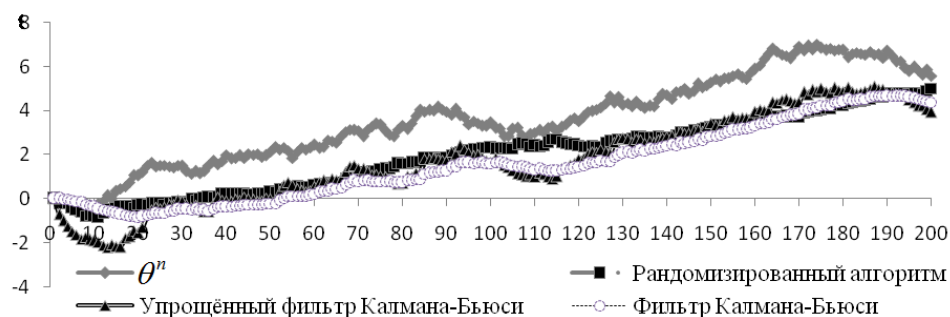


Рис. 3. Фильтрация при постоянной помехе $v_n = 2,0$

Рис. 4. Фильтрация при постоянной помехе $v_n = -2,0$

Известно, что фильтр Калмана (9) дает оптимальные оценки в случае гауссовых независимых помех в наблюдении, метод (8) достаточно эффективен при центрированных независимых помехах. Поэтому при центрированных случайных помехах поведение оценок, генерируемых по алгоритмам (8), (9) хорошее, несмотря на высокий уровень помех наблюдения (см. рис. 1). В ситуациях с постоянной неизвестной помехой или при нулевой в среднем, но недостаточно «разнообразной», средние значения ошибок алгоритмов (8) и (9) соизмеримы с квадратом уровня помехи (см. рис. 2–4). В то же время средний уровень ошибок оценок, доставляемых рандомизированным алгоритмом, во всех ситуациях примерно одинаковый и в несколько раз лучше квадрата уровня помехи.

В таблице сведены результаты средних значений ошибок типичных компьютерных экспериментов.

Помехи	(7)	(8)	(9)
$v_n = 4,0 * (\text{rand}() - 0,5)$	0,5478	0,2571	0,2603
$v_n = 0,1 * \sin(n) + 1,9 * \text{sign}(50 - n \bmod 100)$	0,5332	2,8912	2,0125
$v_n = 2,0$	0,6132	3,1256	2,2248
$v_n = -2,0$	0,6812	3,6812	3,6020

Заметим, что в самом рандомизированном алгоритме (3) не используются характеристики помех, и при их ошибочном выборе работоспособность алгоритма не пострадает. Формула (5) все равно будет соблюдаться, и ее вид показывает возможность достижения более низкого уровня ошибки, чем действительный уровень помех.

Выводы

В статье представлена рандомизированная процедура фильтрации изменяющегося процесса. С теоретической точки зрения наиболее примечательной особенностью представленной процедуры является то, что она работает без каких-либо существенных предположений о помехах. Это очень важно и с практической точки зрения, так как в реальных приложениях трудно получить априорные знания о характеристиках помех.

Практическим примером является навигационная система легкого беспилотного летательного аппарата, разработанного авторами при поддержке корпорации Интел и лаборатории СПРИНТ математико-механического факультета СПбГУ (<http://sites.google.com/site/smartyflyllc/>). Обычно динамика движения ле-

тательного аппарата в воздухе возмущается горизонтальными и вертикальными порывами воздушных масс, которые обоснованно можно считать случайными. В проекте используется планер с размахом крыла 2 м и массой 2,5 кг, поэтому даже небольшие порывы могут заметно повлиять на смещение изначально заданной траектории полета.

В разработанной авторами модели позиционирование осуществляется с помощью GPS-датчика, который на практике часто выдает смещенные координаты. Если коэффициенты преобразования сигнала в канале наблюдения являются известными случайными независимыми величинами, то теоретически возможно построение и хороших точечных прогнозов.

С практической точки зрения для задач идентификации представляет интерес возможность использования предлагаемого алгоритма, включающего этап изменения свойств самих измерений и их последующую обработку с учетом введенных изменений.

Авторы выражают благодарность рецензентам за конструктивные замечания и комментарии, которые позволили существенно улучшить содержание статьи.

Приложение

Доказательство теоремы. Подставив формулы (1) и (2) в (3), для ошибки предсказания получаем

$$\hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1} = A(I - \alpha \Gamma \Delta_n \Delta_n^T)(\hat{\theta}^n - \theta^n) - \alpha A \Gamma \Delta_n (E\{\varphi_n\}^T (\hat{\theta}^n - \theta^n) - v_n) - w^{n+1}.$$

Обозначим через $D_n := \|\hat{\theta}^{n+1} - \theta^{n+1}\|^2$. В силу независимости случайных векторов Δ_n и w^{n+1} , усредняя условно по отношению к предыстории всех случайных процессов до момента времени n кроме Δ_n и используя предположение **Б**, выводим

$$E\{D_n \mid w^1, \dots, w^n, v_1, \dots, v_n, \Delta_1, \dots, \Delta_n\} = \|A(I - \alpha \Gamma \Delta_n \Delta_n^T)(\hat{\theta}^n - \theta^n) - \alpha A \Gamma \Delta_n (E\{\varphi_n\}^T (\hat{\theta}^n - \theta^n) - v_n)\|^2 + r\sigma_w^2.$$

Из-за симметричности распределения для Δ_n имеем

$$(\hat{\theta}^n - \theta^n)^T E\{(I - \alpha \Delta_n \Delta_n^T \Gamma) A^T \alpha A \Gamma \Delta_n \mid F_n\} (E\{\varphi_n\}^T (\hat{\theta}^n - \theta^n) - v_n) = 0.$$

Следовательно, усреднив по отношению к Δ_n в силу предположения **А**, можно заключить, что

$$E\{D_n \mid w^1, \dots, w^n, v_1, \dots, v_n, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}\} \leq (1 - 2\alpha \lambda_{\min}(B\Gamma) + \alpha^2 \|\Gamma\|^2 M_4^4) \|A\|^2 D_{n-1} + \alpha^2 (E\{\varphi_n\}^T (\hat{\theta}^n - \theta^n) - v_n)^2 \|\alpha \Gamma\|^2 \text{Tr}[B] + r\sigma_w^2.$$

Далее, взяв безусловное математическое ожидание от обеих частей послед-

ней формулы, используя предположение **B** и выполнение при любом $\rho > 0$ неравенства: $2E\{\varphi_n\}^T(\hat{\theta}^n - \theta^n)v_n \leq \rho M_{\varphi} v_n^2 + \frac{M_{\varphi}}{\rho} D_{n-1}$, для среднего значения ошибки предсказания получаем оценку

$$E\{D_n\} \leq \psi(\alpha, \rho) E\{D_{n-1}\} + \alpha^2 (1 + M_{\varphi} \rho) \|A\Gamma\|^2 \text{Tr}[B] C_V^2 + r \sigma_W^2.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует заключение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ljung, L.** System Identification-Theory for the User. 2nd ed. Englewood Cliffs. – NJ: Prentice Hall. 1999.
2. **Soderstrom, T.** System Identification/ T.Soderstrom, P.Stoica// Englewood Cliffs. – NJ: Prentice Hall. 1998.
3. **Куржанский, А.Б.** Управление и наблюдения в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.- 392 с.
4. **Фомин, В.Н.** Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. – М.: Наука, 1984.- 288 с.
5. **Чернуоско, Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. - 319 с.
6. **Bai, E.W.** Bounded-error parameter estimation: Noise models and recursive algorithms / E.W.Bai, K.M.Nagpal, R.Tempo // Automatica. Vol. 32. 1996. P. 985-999.
7. **Kibzun, A.I.** Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions / A.I.Kibzun, Yu.S.Kan. – Chichester (UK): Wiley, 1996.
8. **Панков, А.Р.** Минимаксная идентификация обобщенной неопределенно-стохастической линейной модели / А.Р.Панков, К.В.Семенихин // Автоматика и телемеханика. -1998. - № 11.- С. 158-171.
9. **Поляк, Б.Т.** Робастная устойчивость и управление/ Б.Т.Поляк, П.С.Щербаков. - М.: Наука.- 2002.- 303 с.
10. **Степанов, О.А.** Нечеткие и байесовские алгоритмы в задаче нелинейного оценивания/ О.А.Степанов, А.В.Осипов, В.А.Васильев // Гирокоспия и навигация.- 2009.- № 1.- С. 16-29.
11. **Граничин, О.Н.** Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах / О.Н.Граничин, Б.Т.Поляк. – М.: Наука. 2003.
12. **Granichin, O.N.** Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 49. Oct. 2004. P. 1830--1835.
13. **Вахитов, А.Т.** Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации / А.Т.Вахитов, О.Н.Граничин, Л.С.Гуревич // Автоматика и телемеханика.- 2009. - 11. - С. 70-79.
14. **Granichin, O.** Discrete-time minimum tracking based on stochastic approximation algorithm with randomized differences / O.Granichin, L.Gurevich, A.Vakhitov // Proc. of the Combined 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, December 16-18, 2009, Shanghai, P.R. China. P. 5763-5767.
15. **Granichin, O.** Adaptive control of SISO plant with time-varying coefficients based on random test perturbation / O.Granichin, A.Vakhitov, V.Vlasov // In Proc. of the 2010 American Control Conference, June 30-July 02, 2010, Baltimore, MD, USA. P. 4004-4009.
16. **Ширяев, А.Н.** Вероятность.- М.: Наука, 1980.- 574 с.

Abstract. A random process value prediction problem is considered. In this problem the assumption is made that the uncertainties generating the process analyzed have a statistic nature and that observations are carried out with unknown but bounded noise. A randomized algorithm filtering arbitrary external noise in observation is proposed. Examples of simulation in comparison with traditional approaches are presented.