

В. Э. ДЖАШИТОВ, В. М. ПАНКРАТОВ

## УПРУГИЙ ПОДВЕС СУПЕРМИНИАТЮРНОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА

*Построены и исследованы математические модели для расчета и анализа частот собственных колебаний распределенной системы «упругий подвес – чувствительный элемент» суперминиатюрного (объем ЧЭ с подвесом  $<0,2 \text{ мм}^3$ ) микромеханического гироскопа. Разработано необходимое алгоритмическое и программное обеспечение. Осуществлен автоматизированный выбор на основе определения частот собственных колебаний, геометрических параметров упругого подвеса, обеспечивающих выполнение условия датчика резонансной настройке. Получены оценки влияния технологических допусков на характеристики упругого подвеса.*

### Введение и постановка задач

Известные конструкции [1–3] микромеханических гироскопов содержат дополнительные рамки и имеют сложную многокомпонентную структуру упругих элементов подвеса, что приводит к высоким технологическим требованиям при изготовлении приборов и к их дополнительным погрешностям. Поэтому представляется перспективной схема (рис. 1) суперминиатюрного «простого» микромеханического гироскопа (СММГ) без дополнительных рамок с поступательными малыми движениями чувствительного элемента (ЧЭ).

Конструкция осциллятора содержит ЧЭ 1, который крепится к корпусу 2 с помощью двух упругих элементов 5, 6 (двухсторонний симметричный подвес) или одного упругого элемента (консольный подвес). Наиболее простые формы упругих элементов подвеса – прямолинейные стержни квадратного поперечного сечения, но могут быть и криволинейные формы. Наиболее простая форма ЧЭ – это куб.

*Принцип действия* такого «простого» датчика инерциальной информации следующий. На противоположных гранях ЧЭ и корпусе располагаются микро-электромеханические (МЭМС) структуры для возбуждения первичных колебаний по оси  $x$  заданной амплитуды и частоты и для съема выходной информации – вторичных колебаний по оси  $y$ , обусловленных кориолисовыми силами инерции при наличии измеряемой угловой скорости  $\Omega$ .

В работе [4] выведены и проанализированы уравнения движения рассматриваемого микромеханического многофункционального (гироскоп + акселерометр) датчика на произвольно движущемся основании с учетом линейных ускорений и перекрестных движений основания.

---

**Джашитов** Виктор Эмануилович. Доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Института проблем точной механики и управления РАН (г. Саратов). Действительный член Академии навигации и управления движением.

**Панкратов** Владимир Михайлович. Доктор технических наук, профессор, зам. директора по науке Института проблем точной механики и управления РАН. Действительный член Академии навигации и управления движением.

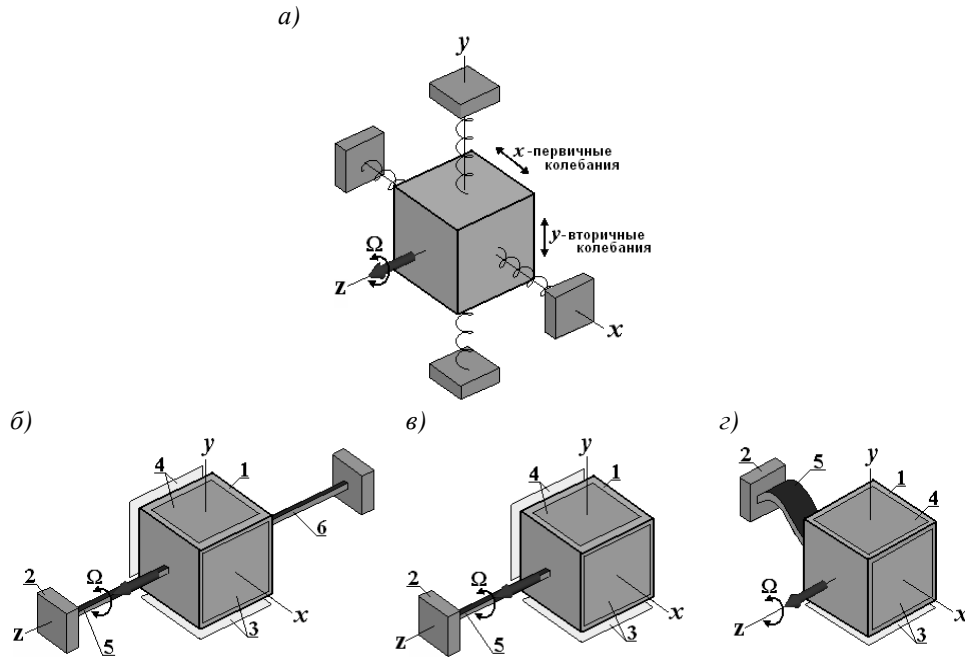


Рис. 1. Обобщенная кинематическая схема (а) и конструктивные схемы СММГ с двумя прямолинейными упругими элементами (б), с консольным прямолинейным упругим элементом (в), с консольным криволинейным упругим элементом (г): 1 – ЧЭ; 2 – корпус; 3, 4 – МЭМС структуры для возбуждения первичных колебаний и съема выходной информации; 5, 6 – упругие элементы

Из этих результатов и полных уравнений движения [4], описывающих гироскоп как динамическую систему со сосредоточенными параметрами, получаются, как частный случай, следующие уравнения движения «идеального» (без погрешностей) СММГ на вращающемся с постоянной измеряемой угловой скоростью  $\Omega$  основании:

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + \left( \frac{c}{m} - \Omega^2 \right) y + 2\Omega \dot{x} = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \left( \frac{c}{m} - \Omega^2 \right) x - 2\Omega \dot{y} = F \cos pt, \quad (2)$$

где  $m$  – масса ЧЭ,  $c$  – жесткость упругих элементов,  $\mu$  – коэффициент демпфирования,  $F, p$  – амплитуда и частота вынуждающей силы.

Для увеличения чувствительности датчик настраивается на резонанс. При этом обеспечивается практическая близость частот собственных первичных и вторичных колебаний.

Собственные частоты гироскопа определяются [1, 5] из характеристического уравнения, соответствующего системе (1), (2), и квадраты этих частот при отсутствии демпфирования  $\mu = 0$  имеют вид

$$k^2 = c/m + \Omega^2 \pm 2\Omega \sqrt{c/m}. \quad (3)$$

Собственные частоты зависят от измеряемой угловой скорости  $\Omega$ , но в реальных условиях  $\Omega^2 \ll c/m$ , поэтому при резонансной настройке можно полагать  $c/m = p^2$ .

Численное интегрирование системы (1), (2) и выражение (3) позволяют приближенно оценить возможный диапазон измеряемых гироскопом угловых скоростей. Для такой оценки примем как исходные следующие характеристики СММГ:  $m = 10^{-8}$  кг,  $p = 2\pi \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>,  $F = 1,256 \cdot 10^{-7}$  Н,  $\mu = 10^{-6}$  кг/с.

При принятых исходных данных диапазон измеряемых угловых скоростей составил  $\Omega \leq 3,5$  с<sup>-1</sup>. Для увеличения диапазона измерения можно, например, увеличить частоты колебаний, но, как известно [1], частоты собственных колебаний микромеханических гироскопов сильно зависят от геометрических параметров подвеса чувствительного элемента.

Для теоретической и практической разработки СММГ и обеспечения его эффективного функционирования важны следующие задачи:

1) построение и исследование математических моделей для расчета и анализа частот собственных колебаний и оценок прочности и вибропрочности распределенной системы «упругий подвес – ЧЭ» СММГ;

2) автоматизированный выбор, на основе определения частот собственных колебаний с помощью построенных моделей и разработанного алгоритмического и программного обеспечения, геометрических и других параметров упругого подвеса;

3) анализ влияния технологических погрешностей изготовления упругого подвеса на характеристики гироскопа.

Такого рода задачи в определенной степени исследовались в [6] для планарного (LL-типа) микромеханического гироскопа (ММГ). Однако рассматриваемый перспективный суперминиатюрный микромеханический гироскоп существенно отличается от планарного ММГ как по габаритам (объем ЧЭ с подвесом менее 0,2 мм<sup>3</sup>), так и по конструкции упругого подвеса. Поэтому необходимо проведение новых исследований.

### **Математические модели для расчета и анализа частот собственных колебаний и оценок вибропрочности упругих подвесов СММГ**

В качестве исходной ситуации на первом этапе будем полагать, что колебательная система СММГ с распределенными параметрами представляет собой кубический ЧЭ, симметрично или консольно подвешенный на прямолинейных стержнях квадратного поперечного сечения (рис. 1, б, в).

Применим к определению частот и форм собственных колебаний рассматриваемых распределенных систем приближенные методы [5] с дискретизацией системы методом конечных элементов. Для свободных колебаний рассматриваемой дискретизированной системы уравнения движения имеют матричный вид [5]  $m\ddot{\bar{X}} + c\bar{X} = 0$ . Отыскивая решение этого уравнения в форме  $\bar{X} = \bar{U}(z)\cos\lambda t$ , где  $\bar{U}(z)$  – вектор амплитудных перемещений, придем к уравнению  $(c - \lambda^2 m)\bar{U} = 0$ .

Это уравнение может быть решено, когда определитель

$$\det(c - \lambda^2 m) = 0. \quad (4)$$

где  $c, m$  – матрицы жесткости и массы.

Решив (4), получим четыре действительных корня, определяющие частоты  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  собственных колебаний системы «упругий подвес – ЧЭ» СММГ с

двумя прямолинейными упругими элементами.

Аналогично можно получить приближенные формулы для собственных частот СММГ с консольным прямолинейным упругим элементом [5]

$$\lambda_1 = 0,22 \frac{h_0^2}{\ell \ell_0} \sqrt{\frac{E}{\rho \ell \ell_0}}, \quad \lambda_2 = 5,08 \frac{h_0^2}{\ell \ell_0} \sqrt{\frac{E}{\rho \ell \ell_0}}, \quad (5)$$

где  $\rho, E$  – плотность и модуль упругости упругих элементов и ЧЭ;  $h_0, \ell_0$  – сторона квадратного сечения упругого элемента и его длина;  $\ell$  – сторона кубического ЧЭ.

Практический интерес представляют первые формы колебаний ЧЭ СММГ и соответствующие им низшие частоты собственных колебаний, поскольку именно эти формы и частоты определяют реальные колебания чувствительного элемента датчика, вызванные кориолисовыми силами инерции. Другие формы колебаний обуславливают погрешности СММГ.

Таким образом, уравнение  $(c - \lambda^2 m) \bar{U} = 0$  и выражения (4)–(5) представляют собой математическую модель для расчета частот собственных колебаний системы «упругий подвес – ЧЭ» СММГ. Эта математическая модель реализована в программном модуле SK1. Данный модуль позволяет осуществить автоматизированный выбор геометрических и других параметров упругого подвеса СММГ с прямолинейными упругими элементами.

Для оценки прочности упругих подвесов с рассматриваемыми прямолинейными упругими стержневыми элементами (рис. 1, б, в) определяются согласно [7] изгибающие моменты в сечениях подвесов.

Нормальные главные напряжения в точках опасного поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, при проверочном расчете на прочность [7] находятся как отношение максимального изгибающего момента к моменту сопротивления  $\sigma_{\max} = M_{\max} / W$ . Выберем  $M_{\max}$  (они имеют место в местах крепления упругих элементов к корпусу). Учтем момент сопротивления  $W = h^3 / 6$  для квадратных поперечных сечений упругого элемента. Тогда для оценки максимальных напряжений от статической нагрузки  $F$  при использовании в двухстороннем или консольном подвесе прямолинейных элементов (длина  $\ell$ ) и с квадратной (сторона  $h$ ) формой поперечного сечения получим соответственно:

$$\sigma_{\max}^{\text{двух}} = \frac{6,5 F \ell}{3 h^3}, \quad \sigma_{\max}^{\text{конс}} = \frac{9 F \ell}{h^3}. \quad (6)$$

В реальном приборе действует динамическая нагрузка и датчик работает на резонансных частотах, поэтому необходимо проводить оценки упругого подвеса на вибропрочность. Эта проверка в простейшем случае [7] состоит в сопоставлении наибольших динамических напряжений  $\sigma_{\max}^{\text{дин}}$ , возникающих в настроенной на резонанс колеблющейся упругой системе, с допускаемым значением напряжения  $[\sigma]$

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = \frac{m p}{\mu} \sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (7)$$

где  $\sigma_{\max}$  – максимальное напряжение при статической нагрузке;  $m$  – масса ЧЭ,  $p$  – частота вынужденных колебаний,  $\mu$  – коэффициент демпфирования.

**Пример 1** расчета геометрических параметров прямолинейных двухстороннего и консольного упругого подвеса СММГ на основе определения частот собственных колебаний системы.

Обычно частоты колебаний, которые выбираются в качестве резонансных для СММГ, находятся [1–4] в диапазоне  $p \approx 10^3 - 10^4$  Гц.

Полагаем, что упругие элементы подвеса и ЧЭ состоят из кремния: плотность  $\rho = 2230 \text{ кг/м}^3$ ; модуль упругости  $E = 190 \text{ ГПа}$ ;  $m = 10^{-8} \text{ кг}$ ;  $F = 1,256 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ ;  $\mu = 10^{-6} \text{ кг/с}$ . Геометрические и массовые характеристики кубического ЧЭ заданы: длина его стороны  $\ell = \sqrt[3]{m/\rho} = 165 \text{ мкм}$ . Длина одного упругого прямолинейного элемента задана и составляет  $\ell_0 = \ell = 165 \text{ мкм}$ .

Сторона  $h_0$  квадратного сечения упругого элемента может варьироваться в заданных пределах, обусловленных технологическими возможностями его изготовления  $2 \leq h_0 \leq 20 \text{ мкм}$  и прочностью подвеса.

*Ставится задача:* варьируя в заданном диапазоне сторону  $h_0$  упругого прямолинейного элемента квадратного сечения, определить величины  $h_0$ , обеспечивающие выбранный диапазон низших частот собственных колебаний, равных заданной частоте вынужденных колебаний  $\lambda = p$ ; провести оценку вибропрочности подвесов.

После расчетов с использованием программного модуля SK1 получены следующие результаты (рис. 2).

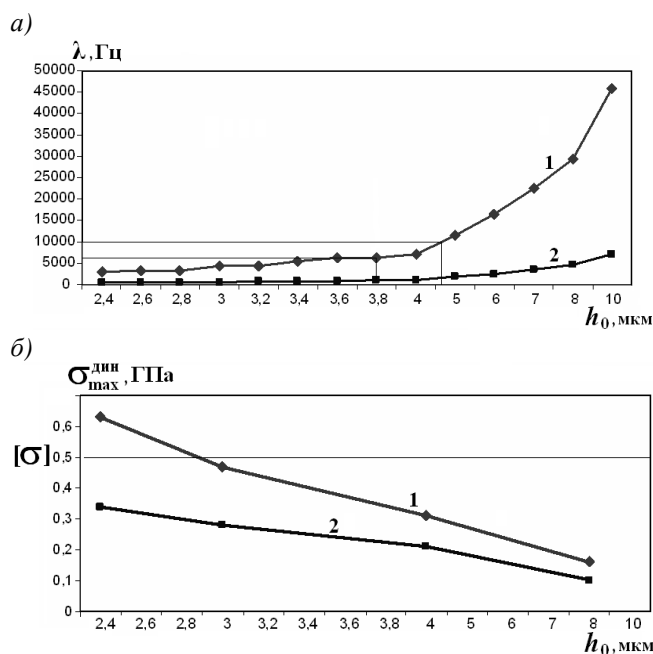


Рис. 2. Зависимости частот собственных колебаний системы (а) и максимальных динамических напряжений (б) от стороны  $h_0$  квадратного сечения прямолинейного упругого элемента: 1 – двухсторонний упругий подвес; 2 – консольный упругий подвес

Программный модуль SK1 (0,2 Мб) реализует численные расчеты на основе рассмотренной математической модели (4)–(7).

- Частота  $\lambda = 10^4$  Гц, равная принятому *верхнему* пределу заданного диапазона изменения частоты  $p$  вынужденных колебаний, достигается применением *двухстороннего* подвеса при стороне сечения упругого прямолинейного элемента  $h_0 \approx 4,6 \text{ мкм}$ . Частота  $\lambda = 10^3$  Гц, равная принятому *нижнему* пределу заданного диапазона изменения частоты  $p$  вынужденных колебаний,

достигается применением консольного подвеса при стороне сечения упругого прямолинейного элемента  $h_0 \approx 3,8$  мкм. Условие (8) вибропрочности подвеса при таком выборе выполняется.

- Достичь частоты  $\lambda=10^3$  Гц, равной принятому нижнему пределу заданного диапазона изменения, используя прямолинейный двухсторонний подвес, не удастся. При уменьшении стороны сечения упругого элемента в двухстороннем подвесе до значения менее 3 мкм нарушается условие вибропрочности и не выполняются принятые технологические пределы изготовления упругих элементов. Применением двухстороннего подвеса удастся обеспечить частоту собственных колебаний системы на уровне не менее  $\approx 3200$  Гц.

Как видим из примера 1, добиться заданного выполнения резонансной настройки при частотах, близких к нижним частотам в диапазоне их возможных значений, не всегда удастся. Дальнейшее уменьшение частоты собственных колебаний реализуется, если, например, увеличивать длину  $\ell_0$  прямолинейных упругих элементов, но это приведет к увеличению габаритов датчика.

Есть ли другой выход? Положительный ответ на этот вопрос дает построенная математическая модель, в которой предлагается использовать упругие элементы заданной криволинейной конфигурации. Для построения такой модели будем использовать основные положения динамики пространственно-криволинейных стержней [8, 9].

Рассмотрим колебательную систему с одним консольно закрепленным криволинейным упругим элементом и подвешенной массой – ЧЭ (рис. 3).

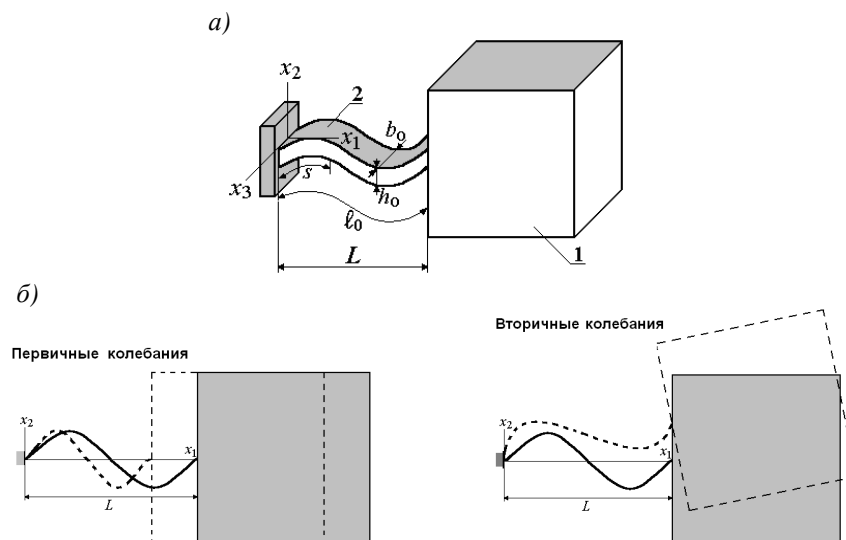


Рис. 3. Колебательная система с упругим элементом (а), первичные и вторичные колебания (б):  
1 – чувствительный элемент; 2 – криволинейный упругий элемент

При введении ряда допущений [6, 8] система безразмерных уравнений, описывающая малые колебания по первой форме в направлении  $x_2$  плоскости ( $x_1$ ,  $x_2$ ) пространственно-криволинейного стержня (упругого элемента подвеса) постоянного поперечного сечения, имеет вид:

$$\frac{dQ_1}{d\epsilon} - \kappa_{30}(\epsilon)Q_2 + \lambda^2 u_1 = 0, \quad \frac{dQ_2}{d\epsilon} + \kappa_{30}(\epsilon)Q_1 + \lambda^2 u_2 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dM_3}{d\varepsilon} + Q_2 + \lambda^2 J_{33} \vartheta_3 = 0, \quad \frac{d\vartheta_3}{d\varepsilon} - \frac{M_3}{A_{33}} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{du_1}{d\varepsilon} - \kappa_{30}(\varepsilon)u_2 = 0, \quad \frac{du_2}{d\varepsilon} - \vartheta_3 + \kappa_{30}(\varepsilon)u_1 = 0, \quad (10)$$

где  $u_1(\varepsilon)$ ,  $u_2(\varepsilon)$ ,  $\vartheta_3(\varepsilon)$  – составляющие векторов малых перемещений и углов поворота сечений стержня;  $Q_1(\varepsilon)$ ,  $Q_2(\varepsilon)$ ,  $M_3(\varepsilon)$  – составляющие векторов малых отклонений перерезывающих сил и изгибающих моментов;  $\kappa_{30}(\varepsilon)$  – кривизна упругого элемента;  $A_{33}$  – составляющая обратной матрицы жесткостей;  $J_{33}$  – составляющая матрицы моментов инерции;  $\lambda$  – числа, определяющие собственные частоты;  $\varepsilon \in [0; 1]$  – безразмерная координата стержня.

Граничные условия (при  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ) уравнений (8)–(10) с учетом массы ЧЭ и колебаний системы в направлении  $x_2$  имеют вид [8]:

$$\vartheta_3(0) = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad Q_1(1) = 0, \quad Q_2(1) = m\lambda^2 u_2(1), \quad M_3(1) = 0, \quad (11)$$

где  $m$  – безразмерная масса ЧЭ, отнесенная к массе упругого элемента.

Аналитическое решение уравнений (8)–(10) с граничными условиями (11) получить затруднительно, поэтому используем метод начальных параметров [8]. Зададим числовое значение  $\lambda$  и найдем численное решение (8)–(10). Представим это решение с учетом первых трех граничных условий (11) в виде:

$$\bar{Z}_0 = K(\varepsilon)\bar{C} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ M_3 \\ \vartheta_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(\varepsilon) & Q_{12}(\varepsilon) & Q_{13}(\varepsilon) & Q_{14}(\varepsilon) & Q_{15}(\varepsilon) & Q_{16}(\varepsilon) \\ Q_{21}(\varepsilon) & Q_{22}(\varepsilon) & Q_{23}(\varepsilon) & Q_{24}(\varepsilon) & Q_{25}(\varepsilon) & Q_{26}(\varepsilon) \\ M_{31}(\varepsilon) & M_{32}(\varepsilon) & M_{33}(\varepsilon) & M_{34}(\varepsilon) & M_{35}(\varepsilon) & M_{36}(\varepsilon) \\ \vartheta_{31}(\varepsilon) & \vartheta_{32}(\varepsilon) & \vartheta_{33}(\varepsilon) & \vartheta_{34}(\varepsilon) & \vartheta_{35}(\varepsilon) & \vartheta_{36}(\varepsilon) \\ u_{11}(\varepsilon) & u_{12}(\varepsilon) & u_{13}(\varepsilon) & u_{14}(\varepsilon) & u_{15}(\varepsilon) & u_{16}(\varepsilon) \\ u_{21}(\varepsilon) & u_{22}(\varepsilon) & u_{23}(\varepsilon) & u_{24}(\varepsilon) & u_{25}(\varepsilon) & u_{26}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{Q_1} \\ C_{Q_2} \\ C_{M_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $K(\varepsilon)$  – фундаментальная матрица решений однородного уравнения;  $\bar{C}$  – вектор начальных данных.

Каждый столбец матрицы  $K(\varepsilon)$  в выражении (12) получается путем численного интегрирования исходной системы уравнений (8)–(10) при заданном числе  $\lambda$  и при начальных условиях вида

$$\bar{Z}_{0(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{Z}_{0(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{Z}_{0(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots \quad \bar{Z}_{0(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

С учетом вторых трех граничных (11) условий получим систему алгебраических уравнений относительно  $C_{Q_1}, C_{Q_2}, C_{M_3}$ :

$$\begin{aligned} a_{11}(\lambda)C_{Q_1} + a_{12}(\lambda)C_{Q_2} + a_{13}(\lambda)C_{M_3} &= 0, \\ a_{21}(\lambda)C_{Q_1} + a_{22}(\lambda)C_{Q_2} + a_{23}(\lambda)C_{M_3} &= 0, \\ a_{31}(\lambda)C_{Q_1} + a_{32}(\lambda)C_{Q_2} + a_{33}(\lambda)C_{M_3} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(\lambda) &= Q_{21}(1) - m\lambda^2 u_{21}(1), \quad a_{12}(\lambda) = Q_{22}(1) - m\lambda^2 u_{22}(1), \\ a_{13}(\lambda) &= Q_{23}(1) - m\lambda^2 u_{23}(1), \quad a_{21}(\lambda) = Q_{11}(1), \quad a_{22}(\lambda) = Q_{12}(1), \\ a_{23}(\lambda) &= Q_{13}(1), \quad a_{31}(\lambda) = M_{31}(1), \quad a_{32}(\lambda) = M_{32}(1), \quad a_{33}(\lambda) = M_{33}(1). \end{aligned}$$

Из условия обращения в нуль определителя этой системы и вычисляются частоты собственных колебаний  $\lambda$ :

$$Det(1, \lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Соотношения и уравнения (12)–(15) реализуют алгоритм определения частот собственных колебаний системы «упругий подвес – ЧЭ» СММГ.

Вычислим переменную кривизну упругого элемента.

Полагаем (см. рис. 3), что форма упругого элемента СММГ аппроксимируется плоской кривой с заданными геометрическими параметрами

$$x_2 = B \sin(2\pi\omega x_1/L), \quad (16)$$

где  $x_1, x_2$  – размерные координаты;  $B, \omega$  – «амплитуда» и «частота» функции, описывающей геометрическую форму упругого элемента;  $L$  – зазор между ЧЭ и корпусом датчика.

Принимая  $x_1/L = s/\ell_0 = \epsilon$ , кривизну упругого элемента можно рассчитать по формулам дифференциальной геометрии

$$\kappa_{30}(\epsilon) = -4\pi^2 \omega^2 B \sin(2\pi\omega\epsilon) / \ell_0 \sqrt{\left[1 + 4\pi^2 \omega^2 B^2 \cos^2(2\pi\omega\epsilon) / \ell_0^2\right]^3}, \quad (17)$$

В формулах (16), (17) геометрические параметры  $B, \omega, L$  задаются как исходные данные, а длина  $\ell_0$  упругого элемента криволинейной формы (16) рассчитывается по формуле дифференциальной геометрии

$$\ell_0 = L \int_0^1 \sqrt{1 + 4\pi^2 \omega^2 B^2 \cos^2(2\pi\omega\epsilon) / L^2} d\epsilon. \quad (18)$$

Таким образом, выражения (8)–(18) представляют собой математическую модель для расчета частот собственных колебаний распределенной системы СММГ с консольно закрепленными криволинейными упругими элементами. Построенная математическая модель реализована в программном модуле SK2.

**Пример 2** автоматизированного расчета геометрических параметров консольного подвеса СММГ с криволинейными упругими элементами.

Рассмотрим систему с распределенными параметрами «упругий подвес – ЧЭ» СММГ при тех же основных параметрах и геометрических характеристиках упругого элемента и ЧЭ, как в примере 1. Полагаем высоту  $h_0$  и ширину  $b_0$  сечения криволинейного упругого элемента равными  $h_0 = b_0 = 3,8$  мкм и считаем габариты осциллятора, определяемые величиной зазора между ЧЭ и корпусом, заданными ( $\ell = 165$  мкм).

*Ставится задача:* варьируя в заданном диапазоне геометрические характеристики  $B$  и  $\omega$  упругого криволинейного элемента квадратного сечения, найти их значения, обеспечивающие выбранный диапазон низших частот собственных колебаний  $\lambda = p \leq 1000$  Гц.

По результатам расчетов с использованием программного модуля SK2, на рис. 4 построены зависимости частот ( $\lambda \leq 10^3$  Гц) собственных колебаний системы «упругий подвес – ЧЭ» СММГ от геометрических характеристик  $B$  и  $\omega$  при постоянном значении  $\ell = 165$  мкм. Здесь, для примера, также показаны, с соблюдением относительных масштабов, геометрические характеристики упругих криволинейных элементов, обеспечивающих выбранную частоту собственных колебаний  $\lambda = 800$  Гц.

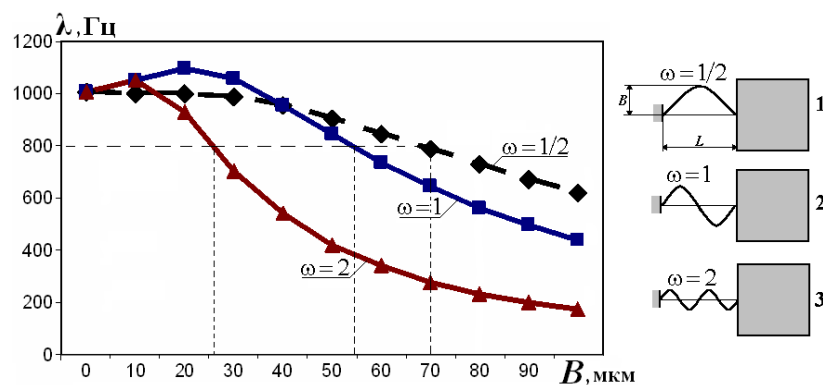


Рис. 4. Зависимости собственных частот  $\lambda(B, \omega)$  и геометрические характеристики криволинейных упругих элементов при  $\lambda \leq 1000$  Гц,  $\ell = 165$  мкм;

1-я форма –  $\omega = 1/2$ ,  $B = 70$  мкм; 2-я форма –  $\omega = 1$ ,  $B = 55$  мкм; 3-я форма –  $\omega = 2$ ,  $B = 25$  мкм

Для достижения, например, частоты колебаний  $\lambda = 800$  Гц при сохранении размеров поперечного сечения  $h_0 = b_0 = 3,8$  мкм и зазора  $\ell = 165$  мкм можно выбрать упругий криволинейный элемент формы 1 ( $\omega = 1/2$  и  $B = 70$  мкм).

Представим теперь, что требуется обеспечить более высокие частоты собственных колебаний на уровне  $\lambda \leq 10^4$  Гц при сохранении размеров поперечного сечения упругого элемента ( $h_0 = b_0 = 3,8$  мкм) и уменьшении габаритов осциллятора, определяемых характерным размером  $L$ .

Для обеспечения максимальной частоты  $\lambda = 10^4$  Гц, можно выбрать криволинейный упругий элемент с уменьшенной длиной и зазором между ЧЭ и корпусом  $\ell_0 = \ell = 35$  мкм.

На рис. 5 по результатам расчета по программе SK2 построены зависимости частот ( $\lambda \leq 10^4$  Гц) колебаний системы «упругий подвес – ЧЭ» от геометрических характеристик  $B$  и  $\omega$  при постоянном значении  $\ell = 35$  мкм. Здесь также по-

казаны, с соблюдением относительных масштабов, геометрические характеристики криволинейного упругого элемента, обеспечивающие выбранную частоту собственных колебаний на уровне  $\lambda=3000$  Гц.

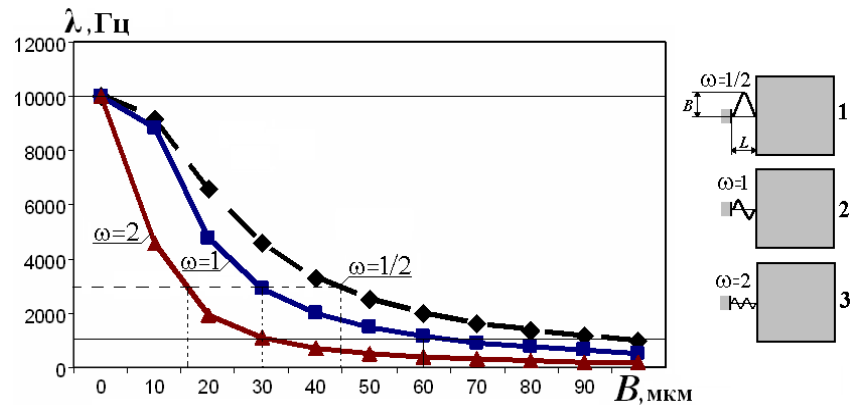


Рис. 5. Зависимости собственных частот  $\lambda(B, \omega)$  и геометрические характеристики криволинейных упругих элементов при  $\lambda \leq 10000$  Гц,  $\ell=35$  мкм:  
1 –  $\omega = 1/2$ ,  $B = 45$  мкм; 2 –  $\omega = 1$ ,  $B = 30$  мкм; 3 –  $\omega = 2$ ,  $B = 15$  мкм

Таким образом, построенные модели позволяют выбирать геометрические параметры упругого подвеса так, чтобы обеспечивать заданные частотные свойства системы.

С помощью этих моделей, можно решать и задачи анализа влияния на частоту собственных колебаний СММГ технологических допусков на геометрические параметры упругого подвеса.

**Пример 3** решения такой задачи.

Пусть имеем систему «упругий подвес – ЧЭ» СММГ при тех же параметрах упругого элемента и ЧЭ, как в примере 1. Исследуем, как влияют на частоту собственных колебаний отклонения от номинальных значений  $h_0$  прямолинейных упругих элементов, вызванные технологическими возможностями изготовления.

Проведя расчеты по программе SK1, получим, что  $\pm 10\%$  отклонения высоты сечения  $h_0$  прямолинейного упругого элемента от номинального значения вызывают для двухстороннего подвеса соответственное увеличение собственной частоты  $\lambda$  на 12% или уменьшение  $\lambda$  на 13%. Для консольного подвеса отклонения составили  $\Delta\lambda = \pm 15\%$ .

Влияние отклонений ширины сечения  $b_0$  прямолинейного упругого элемента на частоту  $\lambda$  собственных колебаний менее значимо. Так, 10%-ное отклонения  $b_0$  от номинального значения вызывают отклонения частоты  $\lambda$  для двухстороннего подвеса  $|\Delta\lambda| \leq 0,2\%$ , для консольного подвеса  $|\Delta\lambda| \leq 5\%$ .

Важным представляется и вопрос оценки влияния технологических погрешностей изготовления упругих элементов (например, геометрические допуски  $\pm\Delta\ell_1$ ,  $\pm\Delta h$  выбираемых длины  $\ell_1$  и стороны  $h$  стержневых упругих элементов с квадратным сечением) на жесткость подвеса, на максимальные прогибы ЧЭ и на максимальные напряжения в системе.

Такая оценка проведена для консольного подвеса датчика.

Для каждого сочетания знаков допусков  $\pm\Delta\ell_1\%$ ,  $\pm\Delta h\%$  рассчитывались на

основе формул теории упругости и прочности [3, 7] относительные отклонения  $\Delta c\%$  жесткости консольного упругого подвеса от номинальных значений, относительные отклонения  $\Delta x_{\max}\%$  прогибов ЧЭ и относительные отклонения  $\Delta \sigma_{\max}\%$  напряжений. Данные расчетов представлены в таблице.

**Влияние технологических погрешностей изготовления упругих элементов СММГ на характеристики упругого подвеса**

| № | Знаки 10%-ного отклонения изготовления упругих элементов от номинальных значений |            | Относительные отклонения жесткости | Относительные отклонения прогибов | Относительные отклонения напряжений |
|---|----------------------------------------------------------------------------------|------------|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
|   | $\Delta \ell_1$                                                                  | $\Delta h$ |                                    |                                   |                                     |
| 1 | +                                                                                | +          | +22%                               | -18%                              | -20%                                |
| 2 | +                                                                                | -          | -45%                               | +83%                              | +46%                                |
| 3 | -                                                                                | -          | -20%                               | +25%                              | +28%                                |
| 4 | -                                                                                | +          | +78%                               | -44%                              | -30%                                |

Максимальное увеличение жесткости подвеса (до 78%) имеет место при 10%-ном увеличении стороны  $h$  сечения и одновременном 10%-ном уменьшении длины  $\ell_1$  упругого элемента от их номинальных значений (см. выделенную тенью 4-ю строку таблицы). При этом прогиб ЧЭ уменьшается на 44%. Это наиболее неблагоприятное сочетание допусков.

Максимальное увеличение прогиба ЧЭ (до 83%) имеет место при обратном сочетании допусков (см. выделенную тенью 2-ю строку таблицы). Это наиболее благоприятное сочетание допусков.

Зависимости относительных (к номинальным значениям) характеристик упругого подвеса  $\Delta f_h = 100\%(f(h) - f_{\text{ном}})/f_{\text{ном}}$  и  $\Delta f_{\ell_1} = 100\%(f(\ell_1) - f_{\text{ном}})/f_{\text{ном}}$  от относительных технологических погрешностей изготовления упругих элементов по стороне сечения  $\Delta h = 100\%h/h_{\text{ном}}$  и по длине  $\Delta \ell_1 = 100\%\ell_1/\ell_{1\text{ном}}$  упругого элемента представлены на рис. 6.

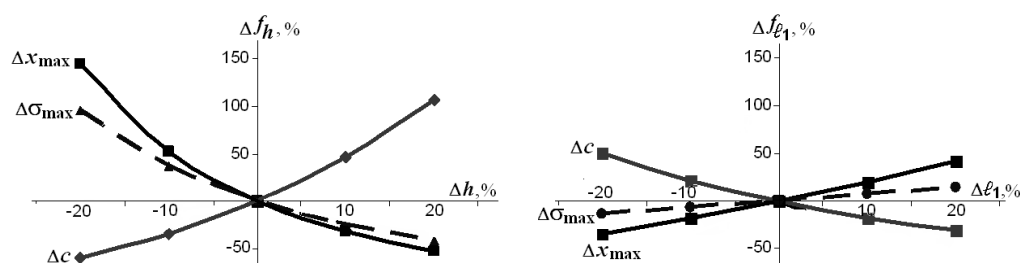


Рис. 6. Зависимости характеристик упругого подвеса от технологических погрешностей изготовления упругих элементов СММГ:  $\Delta c$ ,  $\Delta x_{\max}$ ,  $\Delta \sigma_{\max}$  – относительные отклонения жесткости, максимальных прогибов и напряжений

Зависимости характеристик упругого подвеса от относительного изменения  $\Delta h$  стороны сечения упругого элемента носят нелинейный характер. Они более существенны, чем близкие к линейным зависимости характеристик упругого подвеса от относительного изменения  $\Delta \ell_1$  длины упругого элемента.

В целом влияние технологических погрешностей изготовления упругих элементов на характеристики подвеса СММГ представляется *весьма значительным*.

Анализ рассматриваемых двухстороннего и консольного упругих подвесов СММГ позволил выявить их основные особенности.

Двухсторонний подвес более жесткий, и его применение целесообразно при выборе собственных частот ближе к верхнему пределу частоты вынужденных колебаний  $p = 10^4$  Гц.

Консольные подвесы с прямолинейными и криволинейными упругими элементами позволяют выбирать геометрические параметры подвеса во всем принятом диапазоне частот  $p \approx 10^3 - 10^4$  Гц.

С другой стороны, квадратурная погрешность консольных подвесов существенно больше, чем двухстороннего подвеса. В консольном подвесе (см. рис. 1) имеет место не поступательное, а малое угловое движение ЧЭ под некоторым малым углом  $\gamma$  ( $\cos \gamma \approx 1$ ,  $\sin \gamma \approx \gamma$ ).

Чувствительный элемент совершает [1] колебания  $A \sin pt$  ( $A$ ,  $p$  – амплитуда и частота колебаний), и при имеющейся измеряемой угловой скорости  $\Omega$  вдоль оси чувствительности действует ускорение Кориолиса  $W_K = 2\Omega A p \sin pt$ .

Одновременно вдоль этой же оси действует составляющая ускорения вынужденных колебаний  $W_{KB} = -\gamma A p^2 \sin pt = \gamma A p^2 \cos(pt + \pi/2)$ . Это ускорение измеряется так же, как и ускорение Кориолиса, и вносит погрешность, называемую квадратурной, поскольку имеется сдвиг фаз на  $\pi/2$  по отношению к  $W_K$ .

Представим эту погрешность в виде отношения амплитуд

$$W_{KB}/W_K = \eta = 0,5\gamma p/\Omega.$$

Полагая  $\eta = 0,01$  (1%),  $\Omega = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $p = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ , получаем  $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$  рад, т.е. при этом должна быть обеспечена малость угла  $\gamma$ .

Все эти факторы необходимо принимать во внимание при выборе оптимального упругого подвеса СММГ.

### Заключение

Предложен подход и построены математические модели для расчета и анализа частот собственных колебаний и геометрических параметров распределенной системы суперминиатюрного микромеханического гироскопа с прямолинейными и криволинейными упругими элементами в двухстороннем и консольном подвесах. Разработано соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение.

На основе определения частот собственных колебаний осуществлен автоматизированный выбор геометрических параметров двухстороннего и консольного упругих подвесов, обеспечивающих выполнение условий резонансной настройки СММГ.

Получены оценки влияния на частоту собственных колебаний и другие параметры СММГ технологических погрешностей изготовления упругих элементов подвеса.

На основании исследований характеристик упругого подвеса показана возможность создания суперминиатюрного (объемом ЧЭ с подвесом  $< 0,2 \text{ мм}^3$  и без учета сервисной электроники) достаточно вибропрочного «простого» микромеханического гироскопа класса точности на уровне сотен и менее градусов в час.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по проекту 10-08-00119а.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Распопов, В.Я.** Микромеханические приборы: Учебное пособие. 2-е издание, перераб. и доп. Тул. гос. университет, Московский гос. технологический ун-т им. К.Э. Циолковского. - Тула: Гриф и К, 2004. - 476 с.
2. **Инерциальные** модули на микромеханических датчиках. Разработка и результаты испытаний / В.Г.Пешехонов [и др.] //Юбилейная XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. - СПб.: ЦНИИ «Электроприбор» 2008. - С.9-15.
3. **Джашитов, В.Э.** Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий / В.Э.Джашитов, В.М. Панкратов. / Под общей ред. академика РАН В.Г. Пешехонова. - СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. -404 с.
4. **Джашитов, В.Э.** Теоретические основы разработки и создания суперминиатюрного микромеханического многофункционального датчика инерциальной информации / В.Э.Джашитов, В.М.Панкратов, М.А. Барулина //Нано- и микросистемная техника. - 2010. - №5 (118). - С. 46-54.
5. **Бидерман, В.Л.** Теория механических колебаний. Учебник для вузов. - М.: Высш. шк., 1980. - 408с.
6. **Джашитов, В.Э.** Выбор параметров упругого подвеса планарного микромеханического гироскопа на основе определения частот его собственных колебаний / В.Э.Джашитов, В.М. Панкратов. //Гироскопия и навигация. - 2005. - №4. - с. 42-56.
7. **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов / А. В.Дарков, Г.С. Шпиро. - М.: Высш. шк., 1969. - 734 с.
8. **Светлицкий, В.А.** Механика стержней: Учеб. Для вузов. В 2 ч. Ч.II. Динамика. - М.: Высш. шк., 1987.- 304 с.
9. **Разработка** и оптимизация схемы построения микроакселерометра на поверхностных акустических волнах. Часть I / Д.П.Лукиянов [и др.] // Гироскопия и навигация. - 2005. - №2. - С. 79-94.

**Abstract.** The given work develops the researches [1-4, 6], devoted to designing, creation and research of the superminiature micromechanical gyroscope (SMMG) (fig. 1).

*The purpose of work are* maintenance of effective functioning of the SMMG.

For achievement of the purpose *are delivered and solved the following problems.*

– Construction and research of mathematical models for calculation and the analysis of frequencies own oscillations (1)-(5) and for estimations of strength and vibration strength (6), (7) distributed systems SMMG with *rectilinear* elastic elements (fig. 2).

– Construction and research of mathematical models for calculation and the analysis of frequencies own oscillations (8)-(18) distributed systems SMMG with *curvilinear* elastic elements (fig. 3-5).

– The analysis of influence of the technological errors of manufacturing elastic elements on characteristics support (table. 1, fig. 6) is conducted.

During realization of activity it is developed supporting software.

The conducted analysis of bilateral and console elastic support SMMG has allowed to reveal the main features and frequency properties of such support.

On the basis of the conducted researches of elastic support, the capability of creation superminiature (by a volume  $<0,2 \text{ mm}^3$  without of service electronics) the micromechanical gyro with set frequency and strength properties is shown.

Материал поступил 28.03.11