

УДК 531.768

А. М. ЛЕСТЕВ, М. В. ФЕДОРОВ

### О ВИБРАЦИОННОЙ ПОГРЕШНОСТИ МАЯТНИКОВОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

*Приводятся результаты исследований динамики и погрешностей маятникового микромеханического акселерометра (ММА) при полигармоническом вибрационном воздействии, вызванном колебаниями основания. Оценивается вибрационное смещение положения равновесия чувствительного элемента ММА.*

Явление вибрационного смещения положений равновесия маятниковых систем и электромеханических приборов рассматривалось во многих публикациях [1–5]. Основополагающей работой в этом направлении является статья

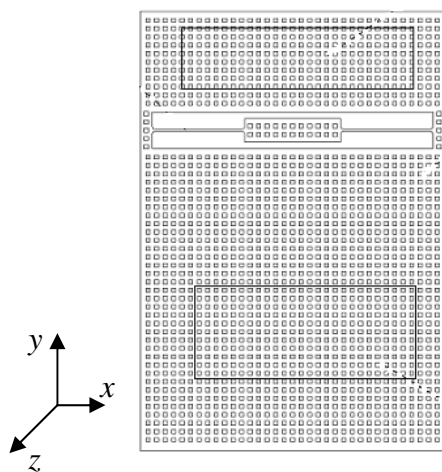


Рис. 1. Конечно-элементная модель чувствительного элемента ММА

П. Л. Капицы [1]. Аналогичные явления наблюдаются в динамике чувствительных элементов ММА при вибрационных воздействиях, вызванных колебаниями основания. В данной статье излагаются результаты исследования динамики и приводятся оценки погрешностей маятникового ММА при полигармоническом вибрационном воздействии. Чувствительный элемент прибора представляет собой пластину размером  $1 \times 1 \times 0,5$  мм, подвешенную на двух упругих торсионах сечением  $0,01 \times 0,05$  мм и длиной 0,2 мм. Чувствительный элемент изготовлен из монокристаллического кремния по технологии «кремний на изоляторе». Ось чувствительности ортогональна плоскости пластины. В данном рассмотрении примем, что тор-

**Лестев** Александр Михайлович. Доктор физико-математических наук, профессор ОАО «Гирооптика» (С.-Петербург). Действительный член Академии навигации и управления движением.

**Федоров** Максим Вячеславович. Дипломированный инженер Санкт-Петербургского университета аэрокосмического приборостроения.

сионы обладают конечной жесткостью на кручение и изгиб и бесконечной жесткостью на растяжение, поэтому положение чувствительного элемента ММА, в отличие от публикаций [3–5], определяется двумя координатами центра масс чувствительного элемента и тремя углами Эйлера – Крылова.

Конечно-элементная модель чувствительного элемента рассматриваемой конструкции ММА [6] приведена на рис. 1. Модель была построена с использованием восьми узловых элементов Solid 64, которые поддерживают анизотропные свойства материала и требуют упорядоченной сетки. Чувствительный элемент расположен таким образом, чтобы направление продольной оси торсионов соответствовало направлению кристаллографической решетки кремния. Первые пять собственных частот колебаний чувствительного элемента ММА на упругом подвесе, рассчитанные с применением вычислительной системы ANSYS, имеют значения: 1322, 2892, 5762, 26406, 28503 Гц.

Для аналитического исследования динамики и оценки погрешности ММА приведем дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента. С основанием прибора свяжем систему координат  $Oxyz$  с началом в центре упругого подвеса в положении статического равновесия чувствительного элемента. Ось  $z$  направим вдоль оси чувствительности прибора, ось  $x$  – вдоль оси торсионов. Движение основания зададим проекциями  $V_{ox}, V_{oy}, V_{oz}$  скорости точки  $O$  на оси системы координат  $Oxyz$  и проекциями  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  угловой скорости основания на эти же оси.

С пластиной ММА свяжем систему координат  $Cx'y'z'$  с началом в центре масс пластины, ось  $z'$  направим ортогонально плоскости пластины, оси  $x'$  и  $y'$  – в плоскости пластины (рис. 2).

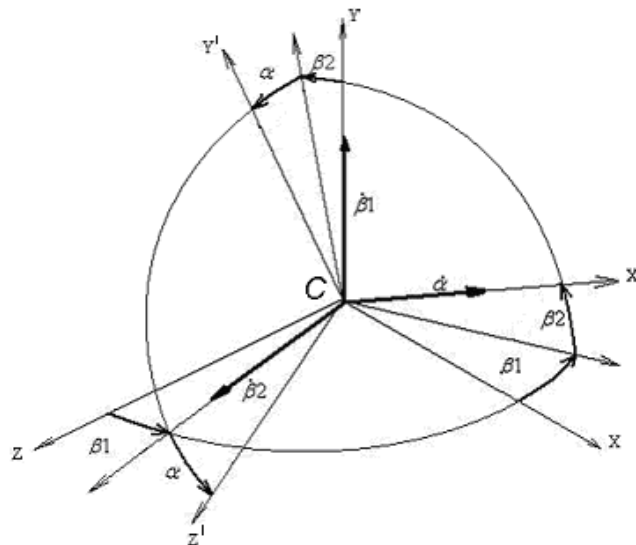


Рис. 2. Системы координат

Положение чувствительного элемента относительно корпуса прибора будем определять перемещениями  $Y$  и  $Z$  центра масс пластины, отсчитываемыми от положения статического равновесия, и углами  $\alpha$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Примем, что центр масс пластины расположен на оси  $y'$  на расстоянии  $l$  от оси торсионов и обо-

значим через  $m$ ,  $J_x, J_y, J_z$ , и  $J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$  соответственно массу, моменты инерции относительно осей  $x', y', z'$  и центробежные моменты инерции пластины. Примем, что основание прибора совершает полигармонические вибрации, определяемые выражениями:

$$V_{ox} = \sum_j^n V_{xj}^0 \cdot \sin(\omega_j t + \delta_{xj}), \quad \Omega_x = \sum_j^n \omega_{xj}^0 \sin(\omega_j t + \gamma_{xj}), \quad (x, y, z). \quad (1)$$

Частоты вибрационных воздействий могут составлять 20–2000 Гц (вибрации основания) и достигать 10 кГц (акустические воздействия).

Координаты  $y$  и  $z$ , углы  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и амплитуды колебаний линейных и угловых скоростей основания будем считать малыми величинами. Составив выражения для кинетической энергии чувствительного элемента и используя уравнения Лагранжа второго рода, дифференциальные уравнения движения пластины с учетом слагаемых второго порядка малости запишем в виде:

$$\begin{aligned} & (J_x + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\alpha} + \mu_\alpha \cdot \dot{\alpha} + C_\alpha \cdot \alpha - J_{xy} \cdot \ddot{\beta}_1 - J_{xz} \cdot \ddot{\beta}_2 - m \cdot l \cdot \ddot{Z} = -m \cdot l \cdot \dot{V}_{oz} + \\ & + J_{xz} \cdot \dot{\Omega}_z + J_{xy} \cdot \dot{\Omega}_y - J_x \cdot \dot{\Omega}_x - m \cdot l^2 \cdot \dot{\Omega}_x + Q_\alpha, \\ & J_y \cdot \ddot{\beta}_1 + \mu_{\beta_1} \cdot \dot{\beta}_1 + C_{\beta_1} \cdot \beta_1 - J_{xy} \cdot \ddot{\alpha} - J_{yz} \cdot \ddot{\beta}_2 = -J_y \cdot \dot{\Omega}_y + J_{yz} \cdot \dot{\Omega}_z + Q_{\beta_1}, \\ & (J_z - m \cdot l^2) \cdot \ddot{\beta}_2 + \mu_{\beta_2} \cdot \dot{\beta}_2 + C_{\beta_2} \cdot \beta_2 - J_{yz} \cdot \ddot{\beta}_1 - J_{xz} \cdot \ddot{\alpha} = m \cdot l \cdot (\dot{V}_{ox} + l \cdot \dot{V}_{oz}) + \\ & + J_z \cdot \dot{\Omega}_y + J_{yz} \cdot \dot{\Omega}_z + J_{xz} \cdot \dot{\Omega}_x + Q_{\beta_2}, \\ & m \cdot \ddot{Z} + \mu_z \cdot \dot{Z} + C_z \cdot Z - m \cdot l \cdot \ddot{\alpha} = -m \dot{V}_{oz} + m \cdot l \cdot \dot{\Omega}_x + Q_z, \\ & m \cdot \ddot{Y} + \mu_y \cdot \dot{Y} + C_y \cdot Y = -m \dot{V}_{oy} + Q_y, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Q_\alpha = & m \cdot (-Z \cdot \dot{V}_{oy} - \ddot{Y} \cdot Z - \dot{Z} \cdot V_{oy} + \dot{V}_{oz} \cdot Y + \ddot{Z} \cdot Y) + m \cdot l \cdot (-\beta_1 \cdot \dot{V}_{ox} - l \cdot \beta_1 \cdot \dot{\Omega}_z - \\ & - \dot{\beta}_1 \cdot V_{ox} + \alpha \cdot \dot{V}_{oy} - \ddot{Y} \cdot \alpha - l \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \beta_1 + \dot{Y} \cdot \alpha - \dot{\Omega}_x \cdot Y - 2\Omega_x \cdot \dot{y} - \dot{\alpha} \cdot y - l \cdot \beta_2 \cdot \dot{\Omega}_y - l \cdot \dot{\beta}_1 \cdot \beta_2 - \\ & - l \cdot \dot{\beta}_2 \cdot \Omega_y + l \cdot \dot{\beta}_1 \cdot \beta_2 - V_{ox} \cdot \Omega_y - \dot{\beta}_1 \cdot V_{ox}) + J_x \cdot (\beta_2 \cdot \dot{\Omega}_y + \dot{\beta}_2 \cdot \Omega_y - \dot{\beta}_1 \cdot \Omega_z - \beta_1 \cdot \dot{\Omega}_z + \\ & + \dot{\beta}_1 \cdot \beta_2 + \dot{\beta}_1 \cdot \dot{\beta}_2) + J_y \cdot (\Omega_y \cdot \Omega_z + \dot{\beta}_1 \cdot \Omega_z + \dot{\beta}_2 \cdot \Omega_y + \dot{\beta}_1 \cdot \dot{\beta}_2) - J_z \cdot (\Omega_y \cdot \Omega_z + \dot{\beta}_1 \cdot \Omega_z + \\ & + \dot{\beta}_2 \cdot \Omega_y + \dot{\beta}_1 \cdot \dot{\beta}_2) + J_{xz} \cdot (\dot{\Omega}_y \cdot \alpha - \dot{\beta}_1 \cdot \Omega_x - \beta_1 \cdot \dot{\Omega}_x + \dot{\alpha} \cdot \Omega_y + \dot{\beta}_1 \cdot \alpha + \dot{\beta}_1 \cdot \dot{\alpha} + \Omega_y \cdot \Omega_x + \\ & + \alpha \cdot \dot{\Omega}_y + \dot{\beta}_1 \cdot \Omega_x + \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}_1) + J_{xy} \cdot (\dot{\Omega}_x \cdot \beta_2 + \dot{\beta}_2 \cdot \Omega_x - \alpha \cdot \dot{\Omega}_z - 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \Omega_z - \dot{\beta}_2 \cdot \alpha - \dot{\beta}_2 \cdot \dot{\alpha} - \\ & - \Omega_z \cdot \Omega_x - \dot{\beta}_2 \cdot \Omega_x - \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}_2) + J_{yz} \cdot (\Omega_y^2 + 2 \cdot \dot{\beta}_1 \cdot \Omega_y + \dot{\beta}_1^2 - \Omega_z^2 - 2 \cdot \Omega_z \cdot \dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_2^2). \end{aligned}$$

При записи уравнений (2) приняты обозначения:  $C_y, C_z, C_\alpha, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}$  – коэффициенты жесткости упругого подвеса;  $\mu_\alpha, \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2}, \mu_y, \mu_z$  – коэффициенты демпфирования;  $Q_\alpha, Q_{\beta_1}, Q_{\beta_2}, Q_y, Q_z$  – нелинейные слагаемые второго порядка малости по отношению к обобщенным координатам и обобщенным скоростям и амплитудам колебаний основания (для краткости приведено лишь выражение для  $Q_\alpha$ ).

Решение уравнений (2) будем находить методом последовательных приближений [7] в виде  $\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \dots$ ,  $\beta_1 = \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)} + \dots$ , ...,  $z = z^{(1)} + z^{(2)} + \dots$ , ограничившись первым и вторым приближениями и выделив отдельно пятое уравнение системы, так как оно не связано с остальными уравнениями системы.

Обозначив через  $p \equiv \frac{d}{dt}$  оператор дифференцирования, введем матрицы

$$X = \|V_{ox} \quad V_{oz} \quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z\|^T, \quad Y_1 = \|\alpha^{(1)} \quad \beta_1^{(1)} \quad \beta_2^{(1)} \quad z^{(1)}\|^T,$$

где  $T$  – символ транспонирования,

$$f(p) = \begin{vmatrix} (J_x + ml^2) \cdot p^2 + \mu_\alpha p + c_\alpha & -J_{xy} p^2 & -J_{xz} p^2 & -mlp^2 \\ -J_{xy} p^2 & J_y \cdot p^2 + \mu_{\beta_1} p + c_{\beta_1} & -J_{yz} p^2 & 0 \\ -J_{xz} p^2 & -J_{yz} p^2 & (J_z + ml^2) \cdot p^2 + \mu_{\beta_2} p + c_{\beta_2} & 0 \\ -mlp^2 & 0 & 0 & m \cdot p^2 + \mu_z p + c_z \end{vmatrix},$$

$$r(p) = \begin{vmatrix} 0 & -mlp & -(J_x + ml^2)p & J_{xy}p & J_{xz}p \\ 0 & 0 & J_{xy}p & -J_y p & J_{yz}p \\ -mlp & 0 & J_{xy}p & J_{yz}p & -(J_z + ml^2)p \\ 0 & -mp & mlp & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

запишем систему уравнений первого приближения в матричном виде

$$f(p) \cdot Y_1 = r(p) \cdot X. \quad (3)$$

Система уравнений второго приближения имеет вид:

$$f(p) \cdot Y_2 = \|Q_\alpha, Q_{\beta_1}, Q_{\beta_2}, Q_z\|^T, \quad Y_2 = \|\alpha^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}, z^{(2)}\|^T. \quad (4)$$

При полигармонических колебаниях основания, определяемых выражениями (1), элементы матрицы  $r(p) \cdot X$  имеют вид  $\sum_j \rho_{kj} \sin(\omega_j t + \delta_{kj})$ , где  $\rho_{kj}$  и  $\delta_{kj}$

выражаются через параметры движения основания. Решение уравнения (3) записывается в виде

$$Y_1 = \sum_j^n \operatorname{Re} \left\{ \frac{F(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \cdot \begin{vmatrix} \rho_{1j} \cdot \sin \delta_{1j} \\ \rho_{2j} \cdot \sin \delta_{2j} \\ \rho_{3j} \cdot \sin \delta_{3j} \\ \rho_{4j} \cdot \sin \delta_{4j} \end{vmatrix} \cdot e^{i\omega_j t} \right\} + \sum_j^n \operatorname{Im} \left\{ \frac{F(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \cdot \begin{vmatrix} \rho_{1j} \cdot \cos \delta_{1j} \\ \rho_{2j} \cdot \cos \delta_{2j} \\ \rho_{3j} \cdot \cos \delta_{3j} \\ \rho_{4j} \cdot \cos \delta_{4j} \end{vmatrix} \cdot e^{i\omega_j t} \right\}, \quad (5)$$

где  $F(p)$  – присоединенная матрица для матрицы  $f(p)$ ,  $\Delta(p) = \det f(p)$ .

Выполнив вычисления в соответствии с выражением (5) и усреднив по времени правые части уравнения (4) на решениях уравнений первого приближения, получим выражения, определяющие величину вибрационного смещения положения равновесия чувствительного элемента ММА

$$\langle \alpha^{(2)} \rangle = \frac{1}{C_\alpha} \cdot \langle Q_\alpha \rangle, \langle \beta_1^{(2)} \rangle = \frac{1}{C_{\beta_1}} \cdot \langle Q_{\beta_1} \rangle, \dots, \langle z^{(2)} \rangle = \frac{1}{C_z} \cdot \langle Q_z \rangle, \quad (6)$$

где  $\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$  – среднее значение  $x$ . Система съема информации

преобразует смещение чувствительного элемента в выходной сигнал, представляющий собой вибрационную погрешность прибора.

Анализ результатов расчетов, выполненных в соответствии с выражениями (5) и (6), показывает, что при наличии в спектре вибрационного воздействия частот, близких к собственным частотам чувствительного элемента на упругом подвесе, вибрационная погрешность может существенно превышать допустимую.

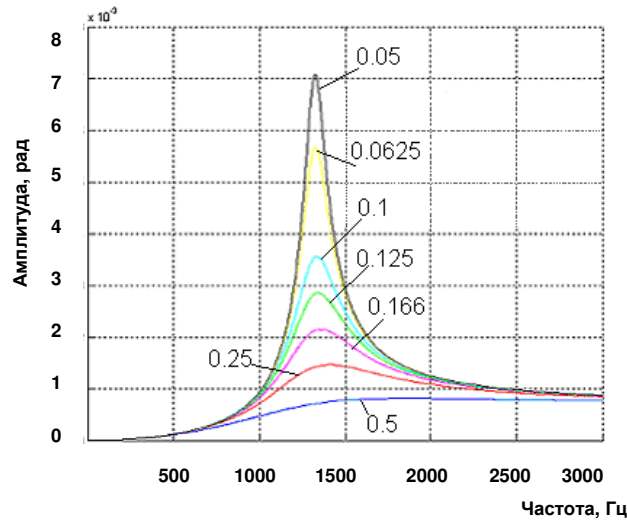


Рис. 3. Резонансные кривые по углу  $\alpha$  при различных значениях параметра затухания

На рис. 3 приведены кривые зависимости от частоты вибровоздействия  $\omega$  амплитуды вынужденных колебаний координаты  $\alpha$  в окрестности значения первой из собственных частот (1322 Гц) колебаний чувствительного элемента ММА при указанных ранее его параметрах и при вибрациях основания вдоль осей  $y$  и  $z$  в соответствии с выражением, которое является частным случаем полигармонической вибрации

$$\dot{V}_{oy}(t) = \dot{V}_{oz}(t) = 10g \cdot \sin \omega t + 0.3g \cdot \sin 3\omega t + 0.1g \cdot \sin 10\omega t, \quad (7)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести. Значение параметров затухания  $\frac{\mu_\alpha}{J_z + ml^2}$  ука-

заны на рисунке. Амплитуда вынужденных колебаний чувствительного элемента ММА при принятых значениях параметров чувствительного элемента и вибрации основания может достигать 24,5 угл. мин.

Кривые зависимости вибрационного смещения положения равновесия чувствительного элемента по координате  $\alpha$  от частоты вибровоздействия  $\omega$  приведены на рис. 4. При принятых параметрах ММА и вибровоздействия вибра-

ционное смещение положения равновесия чувствительного элемента может достигать  $12 \cdot 10^{-4}$  угл. мин, что при диапазоне измерения прибора  $\pm 50g$  составляет погрешность 2,4 mg. Пренебрежимо малую вибрационную погрешность можно достичь выбором параметров прибора так, чтобы собственные частоты чувствительного элемента на упругом подвесе не попадали в спектр частот вибровоздействия, или применением компенсационного метода измерений.

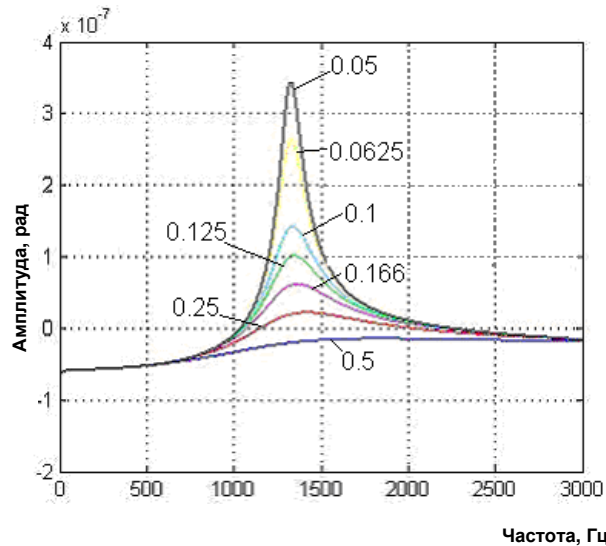


Рис. 4. Постоянное смещение положения равновесия ЧЭ по координате  $\alpha$  при различных значениях параметра затухания

Полученные результаты могут использоваться при исследовании влияния случайных вибраций на динамику и погрешности маятниковых ММА [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капица, П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колебаниях точки подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 1951. Т. 21, вып. 5. - С. 588 - 597.
2. Тихменев, С.С. Элементы точных приборов. - М.: Оборониздат., 1956 - 360 с.
3. Павловский, М.А. О постоянных составляющих сигнала маятников при вибрации // Прикл. механика. - 1971. Т.7, вып. 4. - С. 105-109.
4. Курзнер, А.Б. О систематических погрешностях маятниковых акселерометров при случайной вибрации основания / А.Б. Курзнер, А.Е. Синельников, И.Б. Челпанов.// Автометрия. - 1971. - № 3. - С. 22-25.
5. Коновалов, С.Ф. Теория виброустойчивости акселерометров // М.: Машиностроение, 1991. 272 с.
6. Микромеханические датчики и системы, практические результаты и перспективы развития / И. В. Попова [и др.] // Гирокоспия и навигация. - 2006. - №1. - С. 29-34.
7. Лунц, Я.Л. Ошибки гироскопических приборов // Л.: Судостроение, 1968. 232 с.
8. Коловский, М.З. О замене случайного вибрационного воздействия полигармоническим процессом // Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр. - 1963. - № 2. - С. 93-101.

**Abstract.** The paper investigates dynamics and errors of a pendulous MEMS accelerometer under polyharmonic vibrations caused by the base oscillations. Vibrational displacement of accelerometer sensor equilibrium position is estimated.

Материал поступил 19.11.10.