

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РАЗРАБОТКИ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЛЬТРОВ В НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрена проблема синтеза стационарных фильтров (СФ), т. е. фильтров, матрица коэффициентов усиления которых постоянна. Показано, что такие фильтры не обеспечивают высокое качество обработки информации на всем диапазоне времени до установившегося режима. Оптимизация СФ при $t \rightarrow \infty$ вызывает ухудшение точности обработки на начальном периоде; попытка снижения этой погрешности сопровождается ростом погрешности в установившемся режиме. Предложен ряд критериев выбора коэффициентов усиления СФ. Показано, что требуемое качество обработки достигается применением двухступенчатых фильтров.

Введение

При разработке алгоритмов навигационных систем (НС) наряду с применением алгоритмов калмановской фильтрации распространение получили стационарные фильтры (СФ), оптимальные на бесконечном времени. Наиболее значимые результаты в этой области опубликованы в работах И.Б.Челпанова, Л.П.Несенюка и др. [1, 2]. Применительно к линейным стационарным системам СФ позволяют реализовать оптимальную обработку информации. Фильтры такого класса привлекают внимание исследователей ввиду предельной простоты реализации, поскольку матрица их коэффициентов усиления постоянна

$$\mathbf{K}_{\text{сф}} = \mathbf{K}_{\text{опт}}(\infty),$$

где $\mathbf{K}_{\text{опт}}$ – матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана.

Однако постоянство матрицы $\mathbf{K}_{\text{сф}}$ может служить причиной возникновения дополнительных переходных процессов, имеющих заметную длительность и большие погрешности выработки параметров в переходном режиме. На практике применения СФ в навигационных системах известны случаи возникновения таких переходных процессов, которые практически на длительное время ис-

Ивановский Ростислав Игоревич. Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Действительный член Академии навигации и управления движением.

ключали возможность использования отдельных навигационных приборов. Рассмотрим причины подобных явлений и меры по их предотвращению. При анализе будем использовать концепцию пространства состояний. Примеры будут решены в среде Mathcad, файлы которого будут обозначаться как xmsd-файлы.

Основные уравнения анализа

Пусть линейная модель погрешностей системы имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}; \mathbf{z} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}; \mathbf{y} = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, M[\mathbf{x}_0] = \mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0 = \text{cov}[\mathbf{x}_0], \quad (1)$$

где $\mathbf{x}$ – $(n \times 1)$ -вектор состояний модели; $\mathbf{z}$ – $(m \times 1)$ -вектор измеряемых сигналов; $\mathbf{y}$ – $(u \times 1)$ -вектор выходных переменных; $\mathbf{w}$ – вектор входных белых шумов; $\mathbf{v}$ – вектор белых шумов в канале измерений.

Матрицы интенсивностей шумов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ обозначим $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ соответственно. Шумы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ будем считать независимыми от начальных условий.

При обработке информации в НС могут использоваться фильтры калмановского типа (ФКТ), в множество которых входят оптимальные (ОФ), редуцированные (РФ), упрощенные (УФ), стационарные (СФ) и другие фильтры этого класса, обобщенное уравнение которых имеет вид [3–6]:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)[\mathbf{z} - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}]; \hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (2)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}$ – $(n \times 1)$ -вектор оценок состояний; $\mathbf{K}(t)$ – $(n \times m)$ -матрица коэффициентов усиления фильтра, структура и параметры которой определяют тип используемого ФКТ. Для стационарных фильтров $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}$.

Качество работы фильтра (2) отражает вектор ошибок оценки $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, который с учетом (1) и (2) удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}]\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{K}(t)\mathbf{v}; M[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{0}; \text{cov}[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{P}(0). \quad (3)$$

В общем случае шумы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ могут быть коррелированными, поэтому, объединяя их в вектор $\mathbf{w0} = [\mathbf{w}^T : \mathbf{v}^T]^T$ с матрицей интенсивностей $\mathbf{Q0}$, уравнение (3) запишем:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A0}(t) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B0}(t) \cdot \mathbf{w0}; \mathbf{A0}(t) = \mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}; \mathbf{B0}(t) = [\mathbf{B} : -\mathbf{K}(t)]. \quad (4)$$

Здесь $[\ :]$ – блочная матрица-строка.

Ковариационное уравнение для вектора ошибок оценки (4) имеет вид:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A0}(t) \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A0}(t)^T + \mathbf{B0}(t) \cdot \mathbf{Q0} \mathbf{B0}(t)^T; \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0; \mathbf{A0}(t) = \mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}. \quad (5)$$

Для случая независимости шумов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ уравнение (5) перепишется

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A0}(t) \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A0}(t)^T + \mathbf{BQB}^T + \mathbf{K}(t)\mathbf{RK}^T(t); \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (6)$$

Для ОФ с матрицей коэффициентов усиления

$$\mathbf{K}_{\text{opt}}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \quad (7)$$

ковариационное уравнение (6) преобразуется в уравнение Риккати для ковариационной матрицы

ционной матрицы вектора ошибок оценки ОФ

$$\dot{\mathbf{P}}^* = \mathbf{P}^*(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}^*(t) + \mathbf{BQBV}^T - \mathbf{P}^*(t)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{HP}^*(t), \mathbf{P}^*(0)=\mathbf{P}_0. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{P}^*$ – ковариационная матрица ошибок оптимальных оценок.

Матричные дифференциальные уравнения (5), (6) и (8) позволяют сопоставлять качество процессов обработки информации при использовании ФКТ и ОФ. При таком сопоставлении сравниваются дисперсии ошибок оценки выходных переменных $\mathbf{e}_y = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{e}$. Эти дисперсии в данном случае – диагональные элементы ковариационных матриц, полученных линейными преобразованиями матриц (5), (6) и (8):

$$\mathbf{P}_y(t) = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{H}_0^T; \quad \mathbf{P}_y^*(t) = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{P}^*(t) \cdot \mathbf{H}_0^T, \quad (9)$$

где $\mathbf{P}_y(t)$ и $\mathbf{P}_y^*(t)$ – ковариационные матрицы ошибок оценки выходов при использовании ФКТ и оптимального фильтра соответственно.

Отметим, что на результаты анализа будет влиять не только выбранный вариант ФКТ, но и то, какая модель была использована в качестве расчетной при формировании алгоритмов. Учет этих факторов осуществляется с использованием теории чувствительности и требует отдельного рассмотрения [7].

Анализ качества стационарного фильтра (СФ)

Выпишем уравнения СФ с произвольными постоянными коэффициентами усиления, используя выражения (2)–(9):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}]; \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0; \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{w}_0; \quad \mathbf{B}_0 = [\mathbf{B} : -\mathbf{K}]; \quad \mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{e});$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}_0^T + \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{B}_0^T; \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0; \quad \mathbf{P}_y(t) = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{H}_0^T. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{P}_y(t)$ – ковариационная матрица ошибок оценки выходов при использовании ФКТ (10) с произвольной постоянной матрицей $\mathbf{K}$.

Традиционным подходом к синтезу стационарных фильтров служит использование критерия минимума дисперсий ошибок оценки в установившемся режиме обработки

$$I_o = \text{sp } \mathbf{P}(\infty), \quad (12)$$

которому соответствует выбор матрицы коэффициентов СФ

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} = \mathbf{P}^*(\infty) \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R}^{-1}, \quad (13)$$

где $\mathbf{P}^*(\infty)$ – установившееся значение ковариационной матрицы $\mathbf{P}^*(t)$ уравнения Риккати (8)

$$\mathbf{P}^*(\infty)\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}^*(\infty) + \mathbf{BQBV}^T - \mathbf{P}^*(\infty)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{HP}^*(\infty) = \mathbf{0}.$$

Опыт практического использования СФ (10) с $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{opt}}$ (13) показывает, что в начальный период работы появляются медленно затухающие переходные процессы, в течение которых ошибки обработки могут существенно возрасти. Появление таких процессов вызвано как начальными рассогласованиями, так и

малостью значений элементов матрицы $\mathbf{K}_{\text{opt}}$ (13) и, как следствие, наличием собственных чисел матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{opt}} \cdot \mathbf{H})$, близких к мнимой оси.

Типовой результат сопоставления обработки с применением ОФ с обработкой, оптимальной лишь в установившемся режиме, представлен на рис. 1. Сплошная кривая характеризует дисперсию выходной переменной r при обработке информации с применением ОФК. Штриховая кривая – дисперсия выходной переменной (обозначена $r1$), полученная при использовании СФ (10), коэффициенты усиления которого определены алгоритмом (13). Значения дисперсий приведены в квадратах условных единиц (у. е.) линейных перемещений, по оси абсцисс отложено время в у. е.

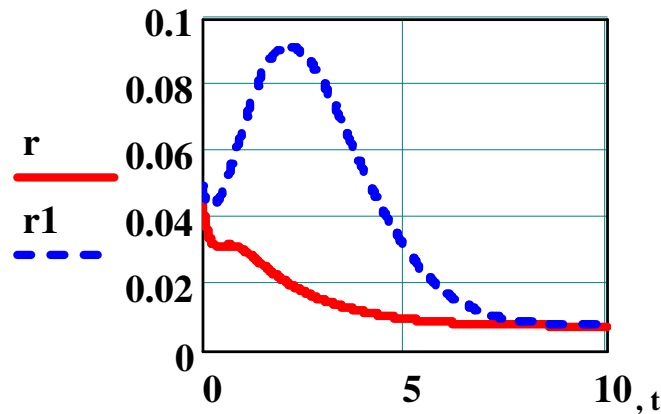


Рис. 1. Качество обработки с ОФК (r) и СФ ($r1$)

Из отмеченного следует, что при выборе матриц $\mathbf{K}$ в СФ (10) критерия (12) недостаточно и он должен быть дополнен составляющими, препятствующими появлению указанных негативных переходных процессов. Варианты критериев синтеза СФ рассматриваются в следующем разделе. Отметим здесь, что матрицы $\mathbf{K}$ СФ (10) должны обеспечивать устойчивость как самого СФ, так и ковариационного уравнения (11), т. е. собственные числа матрицы $\mathbf{A0} = \mathbf{A} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}$ должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости.

При таком условии ковариационная матрица $\mathbf{P}(t)$ (15) будет иметь установившееся значение $\mathbf{P}(\infty)$, удовлетворяющее линейному матричному алгебраическому уравнению

$$\mathbf{A0} \cdot \mathbf{P}(\infty) + \mathbf{P}(\infty) \mathbf{A0}^T + \mathbf{B0} \cdot \mathbf{Q0} \mathbf{B0}^T = 0; \quad \mathbf{P}_y(\infty) = \mathbf{H0} \cdot \mathbf{P}(\infty) \cdot \mathbf{H0}^T. \quad (14)$$

Численно матрица $\mathbf{P}(\infty)$ может быть получена в одной из систем компьютерной математики, однако, как показано ниже, при синтезе СФ полезно иметь аналитическое выражение для $\mathbf{P}(\mathbf{K})_\infty$ в установившемся режиме, которое может быть найдено следующим образом [8, 9].

Сформируем систему дифференциальных уравнений в форме Коши, эквивалентную ковариационному уравнению (11). Для n -мерных модели и фильтра в эту систему достаточно включить $n_\Sigma = [n \cdot (n + 1) / 2]$ элементов матрицы $\mathbf{P}(t)$, учитывая ее симметричность. Осуществляя последовательное формирование правой части формы Коши для выбранного варианта перечисления элементов матрицы $\mathbf{P}(t)$, получаем эквивалентную систему

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{p} + \mathbf{B}_p; \quad \mathbf{d}_y = \mathbf{H}_p \cdot \mathbf{p}, \quad (15)$$

где $\mathbf{p}$ – $(n_\Sigma \times 1)$ -вектор элементов матрицы $\mathbf{P}(t)$; $\mathbf{d}_y$ – вектор дисперсий выходных переменных, размещенных на диагонали матрицы $\mathbf{P}_y(t)$ (11). За исключением матрицы $\mathbf{H}_p$, все переменные и матрицы в уравнениях (15) – функции от элементов матрицы $\mathbf{K}$, например $\mathbf{p} = f_1(\mathbf{K})$, $\mathbf{A}_p = f_2(\mathbf{K})$ и т. д.

Наличие уравнений (15) позволяет определить динамику вторых центральных моментов – элементов матрицы $\mathbf{P}(t)$. Эта динамика определяется собственными числами (с. ч.) матрицы $\mathbf{A0} = \mathbf{A} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}$. Известно [8, 9], что в составе n_Σ с.ч. матрицы $\mathbf{A}_p$, ее n с. ч. – удвоенные с. ч. матрицы $\mathbf{A0}$, остальные $[n \cdot (n - 1)/2]$ ее с. ч. образуются попарными суммами различных собственных чисел матрицы $\mathbf{A0}$.

Таким образом, динамика, например, дисперсий выходных переменных – вдвое более быстрая по сравнению с динамикой изменения их математических ожиданий.

Система (15) устойчива по условию, поэтому может быть сформировано ее установившееся решение:

$$\mathbf{p}(\infty) = -(\mathbf{A}_p)^{-1} \cdot \mathbf{B}_p; \quad \mathbf{d}_y(\infty) = -\mathbf{H}_p \cdot (\mathbf{A}_p)^{-1} \cdot \mathbf{B}_p. \quad (16)$$

Формулы на основе (16) будут использованы при синтезе СФ.

Отметим здесь, что неособенность матрицы $\mathbf{A}_p$ в (16) будет обеспечиваться лишь при условии полной наблюдаемости исходной системы (1). В противном случае из (1) должна быть выделена полностью наблюдаемая часть, и выражения (16) должны относиться к ней. Ниже это будет показано на примере.

Критерии синтеза СФ

Отметим, что задача синтеза СФ заключается лишь в определении матрицы $\mathbf{K}$ этого фильтра, поскольку его структура задана выражением (10).

Рассмотрим критерии поиска $\mathbf{K}$, учитывающие необходимость не только оптимизации установившихся режимов, но и требования минимизации переходных процессов на начальных этапах процесса обработки. Критерии, которые могут быть использованы наряду с критерием (12), разделим на группы:

- интегрального типа;
- комбинированные с ограничениями на зоны локализации корней;
- комбинированные с ограничениями на максимальные отклонения выходных дисперсий в переходном или установившемся режимах.

Эти группы могут быть дополнены и другими, но расширение списка классов критериев вряд ли перспективно, поскольку практическое применение ряда критериев, относящихся к разным группам из уже приведенного списка, дает аналогичные результаты. Рассматривая случай скалярного выхода, приведем критерии синтеза СФ. Обсуждаемые ниже критерии предполагают определение матрицы $\mathbf{K}$ СФ путем безусловной (при отсутствии ограничений) или условной (при наличии ограничений) минимизации.

1. Наиболее очевидные критерии могут быть сформированы на выбранном интервале времени различными функциями разностей дисперсий выходных переменных, получаемых при использовании СФ (10) и ОФК (2), (7). Например, для скалярного выхода один из вариантов такого критерия может иметь вид

$$I_1 = \int_0^{t_1} \rho(t) \cdot [d_y(t) - d_y^*(t)]^2 dt, \quad (17)$$

где дисперсии d_y и d_y^* соответствуют матрицам $\mathbf{P}_y(t)$ (11) и $\mathbf{P}_y^*(t)$ (9).

При минимизации (17) весовым множителем $\rho(t)$ можно выделить наиболее значимые участки развития переходного процесса, увеличивая, например, весовые коэффициенты в зоне максимума дисперсии погрешности и в зоне ее затухания. Интервал интегрирования принципиально должен доходить до затухания переходного процесса. Так, для рис. 1 этот интервал должен быть $(0, 10)$. Практика показала, что минимизация критериев, аналогичных (17), при поиске матрицы $\mathbf{K}$ потребует многократного интегрирования ковариационного уравнения (11), что может вызвать трудности при реализации такого способа синтеза.

Модификацией интегрального критерия (17), предъявляющей меньшие требования к вычислительному процессу, служит

$$I_{\text{mod}} = \int_0^{t_2} \rho(t) \cdot [d_y(t) - d_y^*(t)]^2 dt, \quad d_y(\infty) \leq \beta, \quad (18)$$

где $d_y(\infty)$ – дисперсия (20) выходной погрешности в установившемся режиме; $t_2 \ll t_1$ – правая граница интервала интегрирования; β – пороговое значение для дисперсии выхода в установившемся режиме, выступающее здесь в виде ограничения.

2. Другая совокупность критериев может быть образована сочетанием критериев (12) в виде выражений (16) для $d_y(\infty)$ с требованиями ускорения затухания переходного процесса. Эти требования могут быть выражены в виде задания областей размещения собственных чисел матрицы $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\cdot\mathbf{H}$.

Матрица $\mathbf{A}\mathbf{0}$ определяет динамику стационарного фильтра (10), ошибок его оценки $\mathbf{e}(t)$ и ковариационного уравнения (11). Если оптимизируется установившийся режим, т. е. используется критерий (12), (16) $d_y(\infty)$, и в СФ принимается $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{opt}}$ (13), то распределение с.ч. матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\text{opt}}\cdot\mathbf{H})$ неизбежно будет включать несколько с.ч., расположенных вблизи мнимой оси. Они определяют медленное затухание процесса изменения дисперсии погрешности (см. рис. 1). Однако анализ подвижности мест расположения таких с.ч. при варьировании значений элементов матрицы $\mathbf{K}_{\text{opt}}$, проведенный для нескольких прикладных задач, показал, что вариация значений $\mathbf{K}_{\text{opt}}$ довольно слабо влияет на расположение таких с.ч. на комплексной плоскости [10]. Поэтому формирование ограничения запаса устойчивости к критерию (12) здесь не дает должного эффекта.

Путем сопоставления нескольких вариантов критериев этой группы можно предложить следующее:

$$I_2 = d_y(\infty); \{\min[\text{Re}(\lambda(\mathbf{K}))]\} \leq \alpha; \quad (19)$$

$$I_3 = \{\min[\text{Re}(\lambda(\mathbf{K}))]\}; d_y(\infty) \leq \beta. \quad (20)$$

Здесь $\{\min[\text{Re}(\lambda(\mathbf{K}))]\}$ – минимальное вещественное значение среди элементов вектора с.ч. $\lambda(\mathbf{K})$ матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\cdot\mathbf{H})$; α и β – задаваемые при минимизации I_2 и I_3 ограничения.

При использовании критерия (19) минимизируется дисперсия выходной погрешности в установившемся режиме; ограничением служит зона расположения собственного числа матрицы $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\cdot\mathbf{H}$, наиболее удаленного от мнимой оси. Для критерия (20) эти элементы меняются местами.

3. Выберем интервал времени, на котором наблюдаются максимумы дисперсий ошибок оценки выходов при использовании СФ. Такой интервал может составить $t_m = (1, 4)$ (см. рис. 1). Максимальное значение дисперсии на интервале t_m обозначим $d_{\max}$. Тогда выбор матрицы $\mathbf{K}$ (10) может быть осуществлен минимизацией следующих критериев:

$$I_4 = d_y(\infty); [d_{\max}] \leq \alpha_1; \quad (21)$$

$$I_5 = d_{\max}; d_y(\infty) \leq \beta_1. \quad (22)$$

При использовании критерия (21) минимизируется установившаяся дисперсия выходной переменной при ограничении максимального значения этой дисперсии в переходном процессе на интервале t_m . Применение критерия (22) предполагает минимизацию максимального значения дисперсии в переходном процессе при ограничении ее значения в установившемся режиме.

Приведем пример, в котором определим возможности практического применения критериев (17)–(22) при синтезе СФ.

П р и м е р. Рассмотрим простую задачу выработки линейных перемещений в несложной комплексной системе. Предположим, что имеются два датчика – измеритель скорости линейного перемещения и измеритель непосредственно перемещений.

Пусть погрешность первого датчика $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$, $M(\Delta v) = 0$, Δv_1 – случайная величина с дисперсией $(\sigma_1)^2$; Δv_2 – случайный процесс с корреляционной функцией $K_v(\tau) = (\sigma_2)^2 \exp(\alpha_2 |\tau|)$. Погрешность измерителя перемещений $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$ имеет аналогичные характеристики: $M(\Delta h) = 0$, Δh_1 – случайная величина с дисперсией $(\sigma_3)^2$; Δh_2 – случайный процесс с корреляционной функцией $K_h(\tau) = (\sigma_4)^2 \exp(\alpha_4 |\tau|)$.

Проинтегрируем показания первого датчика и вычтем из выходного сигнала интегратора показания датчика перемещений. Полученный разностный сигнал z служит входом СФ (10). В канале измерения присутствует случайная помеха в виде белого шума v с интенсивностью R , имитирующая влияние электромагнитного поля в зоне размещения измерителей. Математическая модель сигнала z (1) при сделанных предположениях примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3; \quad \dot{x}_2 = 0; \quad \dot{x}_3 = -\alpha_2 x_3 + \sqrt{2 \cdot \alpha_2 \cdot \sigma_2^2} w_1; \\ \dot{x}_4 &= 0; \quad \dot{x}_5 = -\alpha_4 x_5 + \sqrt{2 \cdot \alpha_4 \cdot \sigma_4^2} w_2. \quad z = x_1 - (x_4 + x_5) + v. \end{aligned}$$

Здесь x_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) соответствует элементам вектора $[\Delta H \Delta v_1 \Delta v_2 \Delta h_1 \Delta h_2]^T$.

Интенсивности шумов w_1, w_2, v равны соответственно $q_1 = 1, q_2 = 1, R = 0.01$, выходная переменная $y = x_1 = \Delta H$. Числовые значения параметров модели приведены ниже в элементах ее матриц:

Анализ модели показал, что она неполностью наблюдаема, причиной чего является ненаблюдаемость элемента x_4 вектора состояний, в чем нетрудно убедиться, анализируя матрицу наблюдаемости.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0283 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0063 \end{pmatrix} \quad P_0 := \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0.01 & 0.0001 \\ 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.010 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0.00010 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H = (1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1)} \quad \boxed{H_0 := (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для модели пятого порядка приведем лишь установившееся значение дисперсии $d_y^*(\infty) = d_{yopt}(\infty)$ выходной погрешности системы в оптимальном режиме, полученное интегрированием уравнения Риккати (8)

$$d_y^*(\infty) = d_{yopt}(\infty) \cong 0.0173.$$

Для последующего анализа, учитывая необходимость использования при синтезе СФ выражений (16), выделим наблюдаемую часть рассматриваемой модели, устранив из модели пятого порядка составляющую x_4 . В результате получим модель (1) четвертого порядка, вектор состояний и матрицы которой приведены ниже:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}; \quad z = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + v; \quad y = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x}; \quad \mathbf{w}^T = [w_1 \ w_2]; \quad (23)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.028 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{pmatrix} \quad P_0 := \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H = (1 \ 0 \ 0 \ -1)} \quad \boxed{H_0 := (1 \ 0 \ 0 \ 0)} \quad Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbf{x}$ -(4×1) – вектор состояний с элементами x_j ($j = 1, \dots, 4$), которым соответствуют элементы вектора $|\Delta H \ \Delta v_1 \ \Delta v_2 \ \Delta h_2|^T$.

Интегрированием уравнения Риккати (8) для модели (23) получим установившееся значение дисперсии выхода $d_y^*(\infty) = d_{yopt}(\infty) \cong 0.0073$ и матрицу оптимальных коэффициентов СФ (13)

$$\mathbf{K}_{opt} \cong [0.72 \ 0.1155 \ 0.1485 \ 0.0067]^T. \quad (24)$$

При этом собственные числа матрицы $A0_{opt} = (A - \mathbf{K}_{opt} \cdot \mathbf{H})$ составляют вектор

$$\lambda_{opt} \cong [-0.369+0.382i \ -0.369-0.382i \ -0.199 \ -0.016]^T. \quad (25)$$

Анализ изменчивости значений вектора (25) при одинаковых долевыми вариациях элементов матрицы показал, что наибольшее влияние имеют вариации первого элемента $\mathbf{K}_0$ матрицы $\mathbf{K}$ (24), увеличение которого приводит к сдвигу влево пары комплексно-сопряженных с. ч. матрицы $A0$. Остальные собственные

числа при этом практически не сдвигаются. Вариации элементов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ матрицы (24) изменяют лишь мнимые составляющие первых элементов λ_{opt} (25). Вариация $\mathbf{K}_3$ в (24) практически не оказывает воздействия на элементы λ_{opt} . Эти выводы можно проследить, меняя значения элементов матрицы $\mathbf{K}$ в первом интерактивном ресурсе автора в рубрике [10].

Пример корневого годографа для двух матриц $\mathbf{K}$ приведен на рис. 2 (верхняя часть) в виде копии фрагментов Mathcad-файла (xmscd-файла). Матрица $\mathbf{Kc}$ соответствует матрице (24), собственные числа (25) выведены в матрице λ_1 и изображены на левом графике ромбами. Варьированная матрица коэффициентов СФ обозначена на рисунке $\mathbf{kc}$, ей соответствуют собственные числа λ_2 и обозначения треугольниками на левом графике верхней части рисунка. Слева внизу приведены кривые изменения дисперсии выходной переменной для ОФК (сплошная кривая), СФ с $\mathbf{Kc} = \mathbf{K}_{\text{opt}}$ (пунктир) и СФ с матрицей $\mathbf{kc}$ (штриховая).

Из рисунка следует, что сдвиг зоны локализации с. ч. матрицы $\mathbf{A0}$ влево позволяет уменьшить начальный рост дисперсии выходной переменной. Этот факт будет использован далее при формировании требований к СФ.

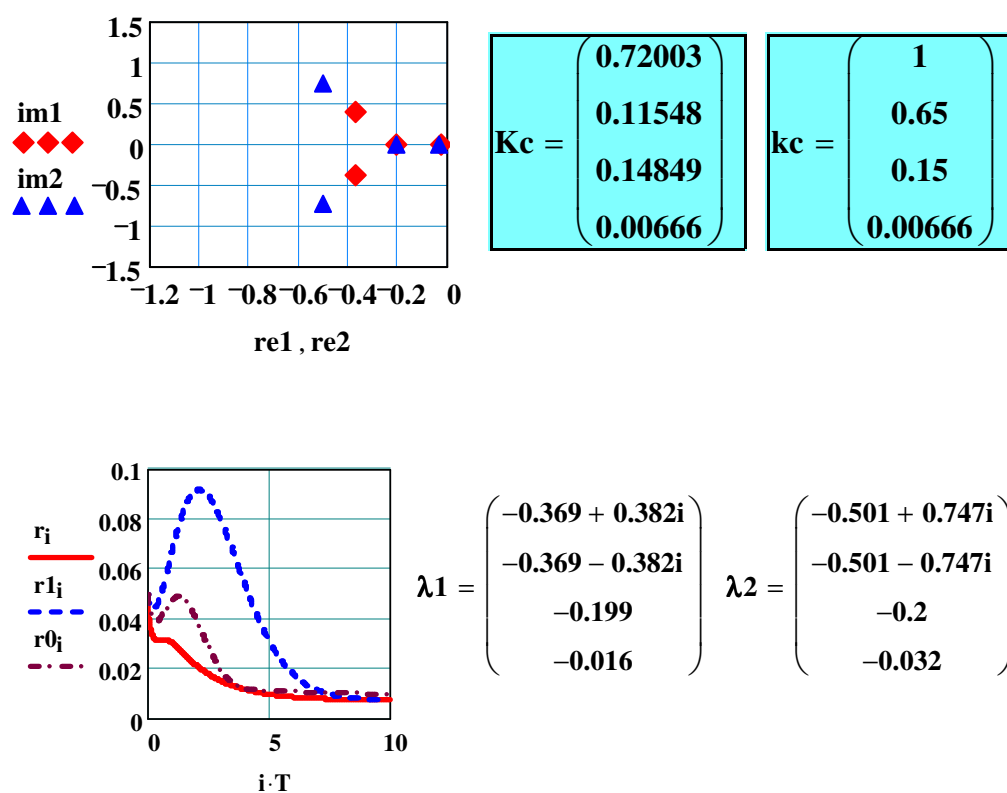


Рис. 2. Влияние элементов $\mathbf{K}$ на с. ч. $\mathbf{A0}$ и динамику выходной дисперсии

Для критериев (18)–(22) при синтезе СФ целесообразно получить аналитическое выражение для дисперсии выходной переменной в установившемся режиме $d_y(\mathbf{K})$ (16). Осуществляя соответствующие преобразования по переходу к эквивалентной форме Коши, получаем систему дифференциальных уравнений для

центральных моментов второго порядка (15). Для данного случая система имеет (10×1) -вектор состояний $\mathbf{p}$, матрицы $\mathbf{A}_p(\mathbf{K})$ – (10×10) , $\mathbf{B}_p(\mathbf{K})$ – (10×1) и (1×10) -матрицу $\mathbf{H}_p$, первый элемент которой – единица, остальные – нули. Выражение для $d_y(\mathbf{K})$ (16) получено символьными преобразованиями в Mathcad без затруднений, однако из-за громоздкости выкладок иллюстрировать этот этап здесь не представляется возможным. В дальнейшем при использовании выражения $d_y(\mathbf{K})$ в xmscd-файлах оно будет обозначаться $f(\mathbf{K})$.

На рис. 3–5 показаны свойства критериев (18)–(22) при определении матрицы коэффициентов усиления $\mathbf{K}$ СФ.

Полученные в результате минимизации критериев матрицы обозначены в xmscd-файлах $\mathbf{K0}$; сплошные кривые на графиках, как и ранее, соответствуют оптимальной обработке (ОФ), пунктирные – СФ с $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{opt}}$ (24), штриховые – СФ с $\mathbf{K} = \mathbf{K0}$. Матрица $\mathbf{K}$ находится при интегральном критерии (18) с ограничением на установившееся значение дисперсии выхода $d_y(\mathbf{K})$. В данном случае ограничение задано значением 0.01, что дает резкое снижение начального максимума, однако установившееся значение равно 0.01.

$$Z(\mathbf{K}) := \sum_i (r_i - d(\mathbf{K})_i)^2$$

$$\mathbf{K} := 3 \cdot \mathbf{Kc} \quad \text{Given}$$

$$\mathbf{K} \geq \mathbf{Kc} \quad f(\mathbf{K}) < 0.01$$

$$\mathbf{K0} := \text{minimize}(Z, \mathbf{K}) \quad f(\mathbf{K0}) = 0.01$$

$$\mathbf{K0}^T = (1.68789 \quad 0.11548 \quad 0.14849 \quad 0.00666)$$

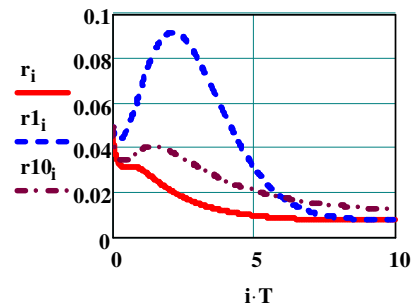


Рис. 3. Результаты использования критерия (18)

Использование ограничений в критериях, конечно, ухудшает качество СФ в установившемся режиме. При более жестком ограничении на $d_y(\infty)$ будет расти максимум $d_y(t)$. Так, при ограничении $f(\mathbf{K}) < 0.008$ максимум $d_y(t)$ достигает 0.06. Результат применения критериев (17) и (18) подтвердил проблемность их практического использования, отмеченную выше. Необходимость при поиске $\mathbf{K}$ многократно интегрировать ковариационное уравнение (11) быстро исчерпывает лимиты памяти компьютера, и процесс может не дойти до завершения.

Значительно более просты критерии (19)–(22), не связанные с интегрированием ковариационных уравнений. Критерии (19) и (20) дают практически совпадающие между собой результаты. На рис. 4 приведены результаты применения критерия (20), причем на конечную дисперсию налагается довольно жесткое ограничение $f(\mathbf{K}) < 0.008$. Это приводит, как отмечалось, к хорошему качеству в установившемся режиме, но увеличивает начальный максимум дисперсии до ~0.06.

Другую группу составляют критерии (21) и (22), в которых в противоречие входят дисперсия выхода в установившемся режиме и значение максимума.

На рис. 5 показано использование критерия (21) при поиске матрицы $\mathbf{K}$ СФ. В данном случае минимизируется $d_y(\infty)$ (обозначенная в хмcd-файле $f(\mathbf{K})$) при ограничении максимального значения $d_y(t)$ величиной 0.04. Как следует из результата (см. рисунок), ограничение реализуется, однако это достигается за счет ухудшения точности в установившемся режиме. Так, при полученной матрице $\mathbf{K} = \mathbf{K0}$ установившееся значение дисперсии $d_y(\infty) = f(\mathbf{K0}) = 0.01$.

$$\lambda m(\mathbf{K}) := \min(\operatorname{Re}(\lambda(\mathbf{K})))$$

$$Z(\mathbf{K}) := \lambda m(\mathbf{K}) \quad \mathbf{K} := 3 \cdot \mathbf{Kc}$$

$$\text{Given} \quad \mathbf{K} > \mathbf{Kc} \quad f(\mathbf{K}) < 0.008$$

$$\mathbf{K0} := \text{Minimize}(Z, \mathbf{K}) \quad f(\mathbf{K0}) = 0.008$$

$$\mathbf{K0}^T = (1.1338 \quad 0.1155 \quad 0.1485 \quad 0.0067)$$

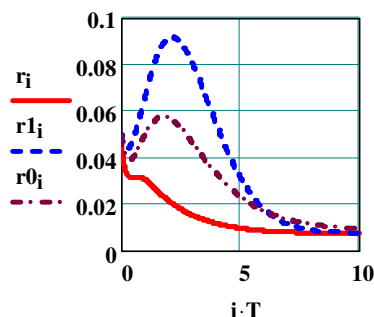


Рис. 4. Результаты применения критерия (20)

Применение критерия (22) при ограничении $f(\mathbf{K}) < 0.01$ дает аналогичный результат, т. е. максимальное значение $d_y(t)$ также равно 0.04.

$$Z(\mathbf{K}) := f(\mathbf{K}) \quad \mathbf{K} := 3 \cdot \mathbf{Kc}$$

$$\text{Given} \quad \mathbf{K} > \mathbf{Kc} \quad d(\mathbf{K}) < 0.04$$

$$\mathbf{K0} := \text{minimize}(Z, \mathbf{K}) \quad f(\mathbf{K0}) = 0.01$$

$$\mathbf{K0}^T = (1.573 \quad 0.115 \quad 0.363 \quad 0.008)$$

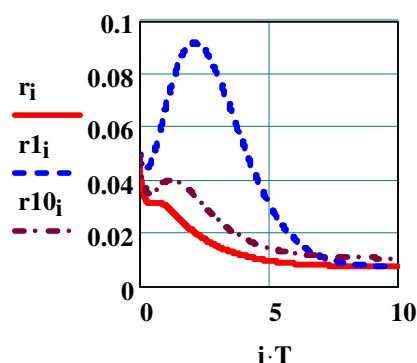


Рис. 5. Результаты применения критерия (21)

Обобщая полученные для различных критериев результаты, можно сделать вывод, что обеспечение высокого качества процессов обработки на всем временном интервале с использованием константной матрицы $\mathbf{K}$ стационарного фильтра практически невозможно. Так, повышение требований к качеству обработки в установившемся режиме вызывает рост погрешностей на начальном этапе, и наоборот. В то же время возможен компромисс, если в НС допускаются установившиеся погрешности, превышающие соответствующие оптимальные. Однако проблема может быть сравнительно легко решена при использовании, например, двухступенчатой матрицы $\mathbf{K}$. В этом случае фильтр уже не может быть назван стационарным, поскольку тогда к этому классу субоптимальных фильтров следовало бы отнести и фильтры, матрицы коэффициентов усиления

которых хранились бы в памяти бортовых компьютеров в аппроксимированном виде (ступенчатая, кусочно-линейная, функциональная аппроксимации).

Назовем субоптимальный фильтр (10) с двухступенчатой матрицей **K** двухступенчатым фильтром (ДФ). Применительно к таким фильтрам описанное выше может быть использовано для поиска первой ступени матрицы **K**, т. е. матрицы **K1**. В качестве второй ступени **K2** выбирается **K_{opt}** (13). При этом проблема снижения пиков погрешности на начальном этапе обработки может быть решена варьированием момента времени переключения **K1** на **K2**. Этот момент можно найти, решая экстремальную задачу, но еще проще – путем моделирования. Проиллюстрируем эти возможности на примере рассмотренной выше модели.

На рис. 6 приведены результаты анализа ДФ, матрица **K1** которого получена с использованием критерия (21) и приведена на рис. 5

$$\mathbf{K1} = [1.573 \ 0.115 \ 0.363 \ 0.008]^T.$$

В качестве второй ступени используется оптимальная в установившемся режиме матрица (24)

$$\mathbf{K2} = \mathbf{K_{opt}} = [0.72 \ 0.1155 \ 0.1485 \ 0.0067]^T.$$

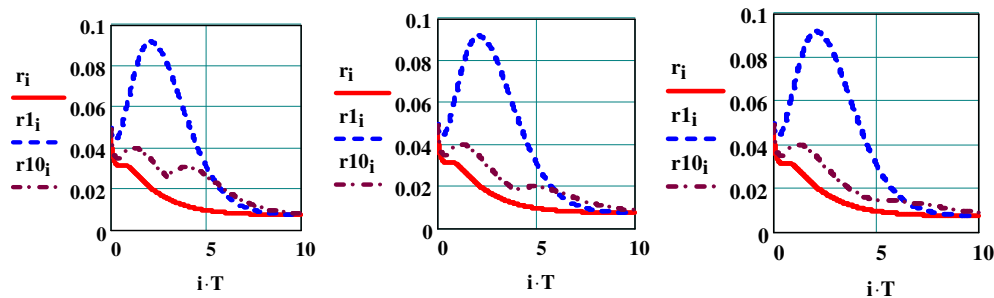


Рис. 6. Качество двухступенчатого фильтра

Результаты (см. рис. 6) получены для трех моментов переключения с **K1** на **K2**. Из графиков следует, что переключение сопровождается некоторым увеличением выходной дисперсии, максимум которого снижается при более позднем переключении. Этот процесс будет, конечно, улучшаться при линейном или экспоненциальном переходе от одной ступени к другой.

Влияние времени переключения ступеней такого фильтра в рамках рассмотренного примера можно проследить в интерактивном ресурсе автора (второй ресурс рубрики [10]).

Заключение

Рассмотрен математический аппарат и ряд критериев синтеза стационарных фильтров. Из представленного материала следует, что такой фильтр не может обеспечить высокое качество обработки информации на всем диапазоне от начального момента времени до установившегося режима. Требование оптимальности СФ при $t \rightarrow \infty$ вызывает неприемлемое ухудшение точности обработки на начальном периоде. При этом любая попытка снизить начальный пик погреш-

ности приводит к снижению точности в установившемся режиме. Это сокращает область практического использования СФ и делает необходимым ковариационный анализ переходных процессов для любого варианта СФ, предлагаемого к практическому применению.

Проблема намного проще решается путем применения двухступенчатых фильтров. Предложенные выше критерии могут быть использованы при выборе первой ступени матрицы коэффициентов усиления двухступенчатого фильтра.

Материал подготовлен при поддержке АВЦП

«Развитие научного потенциала высшей школы», грант № 2.1.2/5534.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челпанов, И.Б.** Расчет характеристик навигационных гиросприборов / И.Б.Челпанов, Л.П.Несенюк, М.В.Брагинский. – Л.: Судостроение, 1978. – 264 с.
2. **Челпанов, И.Б.** Опыт и перспективы использования алгоритмов стационарной фильтрации в задачах навигации / И.Б.Челпанов, О.А.Степанов, А.В.Лопарев // Гироскопия и навигация.- 2010.- № 4 (71).- С. 88.
3. **Ривкин, С.С.** Статистическая оптимизация / С.С.Ривкин, Р.И.Ивановский, А.В.Костров. – Л.: Судостроение. 1976.- 280 с.
4. **Ивановский, Р.И.** Теория чувствительности в задачах управления и оценки / Р.И.Ивановский, А.А.Игнатов. – Л.: ЦНИИ «Румб», 1986.- 111 с.
5. **Дмитриев, С.П.** Высокоточная морская навигация.- Л.: Судостроение, 1991.- 222 с.
6. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задаче обработки навигационной информации. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – 496 с.
7. **Ивановский, Р.И.** Проблемы чувствительности в задачах моделирования, обработки информации и управления // Гироскопия и навигация.- 2011.- № 1 (72).- С. 90–104.
8. **Ивановский, Р.И.** Компьютерные технологии в науке и образовании: Практика применения систем Mathcad. – М.: Высшая школа, 2003. – 431 с.
9. **Ивановский, Р.И.** Теория вероятностей и математической статистики. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. – СПб.: БХВ, 2008. – 528 с.
10. <http://mas.exponenta.ru/filtering/sf/>

Abstract. The paper considers synthesis of stationary filters, i.e., the filters with constant gain matrix. These filters are shown to be unable to provide high quality of data processing over the total time interval up to the steady-state mode. SF optimization at $t \rightarrow \infty$ degrades the processing quality in the initial period; when reduced, this error causes the growth of steady-state error. We propose a number of criteria for selecting SF gain factors. The required processing quality is reached by using two-stage filters.

Материал поступил 10.02.11