

А. В. ЛОПАРЕВ, О. А. СТЕПАНОВ, И. Б. ЧЕЛПАНОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧАСТОТНОГО ПОДХОДА ПРИ СИНТЕЗЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Предлагается процедура синтеза линейных нестационарных алгоритмов обработки навигационной информации, основанная на упрощении моделей входных воздействий по результатам исследования их свойств в частотной области. Рассматриваются примеры использования предложенной процедуры в задачах синтеза автономной и корректируемой гировертикалей. Проводится сравнительный анализ точности и времени переходного процесса для стационарных и нестационарных алгоритмов.

Введение

Хорошо известно, что при построении алгоритмов обработки навигационной информации на сегодняшний день широкое применение получили два основных подхода [1–10].

Первый подход основан на методе, предложенном в свое время Винером, он ориентирован на решение задач выделения полезного сигнала на фоне ошибок измерения [9]. При этом предполагается, что полезный сигнал и ошибки измерения представляют собой стационарные процессы с известными спектрально-корреляционными характеристиками. Суть подхода заключается в нахождении передаточной (или весовой) функции оптимального фильтра, который в установленном режиме минимизирует среднеквадратическую ошибку оценивания [1, 3, 4].

Второй подход, предложенный Калманом, основан на использовании концепции пространства состояний, в соответствии с которой полезный сигнал и ошибки измерения описываются в виде линейных дифференциальных, в общем случае нестационарных, уравнений в форме Коши с порождающим белым шумом в правых частях [10]. Общеизвестное преимущество калмановского подхода заключается в том, что решение задачи оценивания может быть получено для нестационарных систем, при этом среднеквадратический критерий минимизируется для любого момента времени, а не только в установленном режиме [2–8].

Для задач фильтрации сигналов, описываемых стационарными линейными системами, как известно, оба подхода в установленном режиме, если таковой существует, обеспечивают одинаковое решение [4, 6].

Лопарев Алексей Валерьевич. Кандидат технических наук, начальник сектора ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург).

Степанов Олег Андреевич. Доктор технических наук, начальник Центра профессионального образования ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург). Действительный член Академии навигации и управления движением.

Челпанов Игорь Борисович. Доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ОАО «Концерн ЦНИИ «Электроприбор». Действительный член Академии навигации и управления движением.

Статья по докладу на 3-й мультikonференции по проблемам управления.

На практике рассматривается достаточно широкий набор задач обработки навигационной информации, которые сводятся к фильтрации сигналов стационарных систем, имеющих установившийся режим. Именно для их решения и были в свое время разработаны различные, в том числе и упрощенные, процедуры построения оптимальных алгоритмов, основанных на винеровском подходе и использовании частотных методов [1, 4, 11–15]. Однако известно, что в переходном режиме винеровские алгоритмы проигрывают калмановским как по точности, так и по времени выхода на установившийся режим [16]. Причем на практике основным является проигрыш именно по времени переходного процесса. Для преодоления недостатка, связанного с существенным увеличением этого времени, разрабатывались различные процедуры, направленные на его сокращение [4, 12, 13, 16].

Казалось бы, в связи с резким расширением возможностей средств вычислительной техники можно отказаться от методов винеровской фильтрации и полностью ориентироваться на калмановский подход, обеспечивающий построение алгоритмов, оптимальных в том числе и в переходном режиме. Вместе с тем, несмотря на несомненное преимущество калмановских алгоритмов, заключающееся в существенном сокращении длительности переходных процессов в системе, они, по мнению авторов, обладают определенными недостатками, обусловленными их непрозрачностью, вычислительной сложностью при высоких порядках систем и возникающими в связи с этим трудностями понимания смысла процедуры обработки. Эти обстоятельства нередко затрудняют процесс отладки, особенно при наличии априорной неопределенности параметров моделей входных воздействий. Несомненное же преимущество частотного подхода заключается в его наглядности и возможности в некоторых ситуациях «на пальцах» проиграть различные варианты и комбинации, не будучи заложником только лишь результатов, выдаваемых компьютером. Как будет показано далее на примерах, иногда изначально и сама постановка задачи фильтрации не вполне очевидна и ее окончательная формулировка формируется в результате предварительного анализа задачи, проводимого с позиций частотного подхода и использования структурных схем.

Таким образом, представляется целесообразным при разработке алгоритмов фильтрации для стационарных систем предложить процедуры построения алгоритмов, объединяющие достоинства калмановского и винеровского подходов.

В настоящей статье предлагается одна из возможных процедур такого рода. Суть ее заключается в том, что на этапе постановки и исследования задачи используется винеровский подход, направленный на минимизацию ошибки фильтрации в установившемся режиме, и лишь на заключительном этапе осуществляется переход к нестационарному алгоритму калмановского типа, что позволяет преодолеть основной недостаток стационарных фильтров, связанный с увеличением времени переходного процесса [17, 18].

1. Применение метода логарифмических характеристик для упрощения моделей воздействий

При использовании винеровского подхода будем ориентироваться на применение приближенной процедуры, основанной на методе логарифмических характеристик. Напомним вкратце ее суть.

Рассмотрим классическую задачу оптимального выделения полезного сигнала на фоне случайных ошибок измерений. Пусть скалярные измерения

$$y(t) = u(t) + v(t)$$

представляют собой аддитивную смесь полезного сигнала $u(t)$ и помехи $v(t)$, которые полагаются центрированными, стационарными, с заданными спектральными плотностями $S_u(\omega)$ и $S_v(\omega)$ соответственно, а также их взаимной спектральной плотностью $S_{uv}(\omega)$.

Передаточная функция линейного фильтра $H(p)$ (рис. 1) должна быть определена из условия минимума установившейся дисперсии σ_e^2 ошибки $e(t)$ оценивания полезного сигнала $u(t)$.

Будем считать, что выражения для указанных спектральных плотностей дробно-рациональные. Известно [1, 2], что оценка

полезного сигнала $\hat{u}(t)$, оптимальная по критерию $\sigma_e^2 \rightarrow \min$, может быть получена на выходе линейного фильтра Винера с частотной передаточной функцией

$$H(j\omega) = \frac{1}{S_y^+(\omega)} \left[\frac{S_{uy}(\omega)}{S_y^-(\omega)} \right]_+, \quad (1)$$

где $S_y^+(\omega)$, $S_y^-(\omega)$ – результат факторизации (разложения на комплексно-сопряженные множители, так что $S_y^+(\omega)$ имеет полюсы только в верхней полуплоскости комплексной плоскости ω) спектральной плотности измеряемого сигнала $S_y(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S_{vu}(\omega)$ – входного сигнала фильтра; $S_{uy}(\omega) = S_u(\omega) + S_{uv}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность полезного сигнала и измерений; а процедура $[\cdot]_+$ представляет собой сепарацию (расщепление) выражения в квадратных скобках, т.е. представления в виде суммы простых дробей с отбрасыванием дробей с полюсами, лежащими в нижней полуплоскости. При независимости (некоррелированности) полезного сигнала и помехи имеем: $S_{uy}(\omega) = S_u(\omega)$, $S_y(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega)$,

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|1 - H(j\omega)|^2 S_u(\omega) + |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) \right) d\omega.$$

Само определение установившейся дисперсии ошибки при дробно-рациональных передаточных функциях и спектральных плотностях может быть осуществлено не только численно, но и аналитически по таблицам интегралов, в виде функции коэффициентов фильтра [19]. Поэтому оптимизация для установившихся режимов при задании структуры и порядка фильтра с неизвестными коэффициентами в принципе может быть осуществлена численно с использованием процедур поиска экстремума функции нескольких переменных (искомых коэффициентов).

Непосредственные расчеты по формуле (1) при высоких порядках знаменателей спектральных плотностей достаточно громоздки и требуют знания их спектральных плотностей на всем интервале частот. В литературе [1, 4] предложен так называемый метод логарифмических характеристик, основанный на

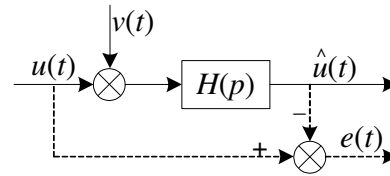


Рис. 1. Структура формирования ошибки фильтрации

упрощении вероятностных моделей воздействий и позволяющий во многих случаях избежать необходимости выполнения сложных аналитических вычислений и получить простые, интуитивно понятные алгоритмы фильтрации.

Исходным моментом является приближенное (асимптотическое по участкам) построение кривых спектральных плотностей в логарифмической сетке в виде ломаных. Это вполне соответствует традиционным процедурам построения логарифмических амплитудно-частотных характеристик линейных стационарных динамических систем в теории автоматического управления. Особенность получаемых здесь кривых заключается в том, что наклоны участков спектральных плотностей удвоенные. В случае чисто мнимых нулей и полюсов спектральных плотностей логарифмические кривые строятся как ломаные, причем каждой паре комплексно-сопряженных корней соответствует излом вверх, а каждой паре комплексно-сопряженных полюсов – излом вниз с изменением наклона на 40 дБ/дек. Если имеются четверки комплексных корней (полюсов), то им соответствуют изломы с изменением наклона на 80 дБ/дек (с учетом кратности). При этом в районе точки излома полюсы дают локальный пик, а корни – локальный провал.

Спектральные представления можно и удобно использовать, когда каждая из составляющих $u_i(t)$ представляется, как результат прохождения стационарного процесса $x_i(t)$ через линейную динамическую систему с частотной передаточной функцией $G_i(j\omega)$. Тогда $S_{u_i}(\omega) = |G_i(j\omega)|^2 S_{x_i}(\omega)$. Опыт показывает, что эти выражения можно использовать и тогда, когда получающиеся спектральные плотности не интегрируемы в бесконечных пределах, в частности, неограниченно возрастают при $\omega \rightarrow 0$. Подобного рода выражения типичны для задач навигации и управления движением, когда аналитически осуществляются переходы от ускорений к скоростям и перемещениям, эти переходы представляют собой операции интегрирования.

Следующий упрощающий прием основывается на представлении, что при учете нескольких источников помех спектральная плотность $S_\Sigma(\omega)$ суммы некоррелированных между собой процессов может быть приближенно получена построением огибающей сверху спектральных плотностей составляющих, что следует из соотношения

$$\lg S_\Sigma(\omega) = \lg \sum_i S_i(\omega) \approx \max_i \lg S_i(\omega).$$

Данное обстоятельство позволяет изначально обоснованно исключить из рассмотрения те спектральные составляющие, которые во всем диапазоне частот не приближаются к огибающей сверху, и сократить тем самым число источников возмущений.

Наконец, принимается во внимание тот факт, что среди всех изломов полученной огибающей сверху суммарной спектральной плотности принципиальное, определяющее значение имеют только те, что соответствуют точкам пересечения кривых спектральных плотностей $S_u(\omega)$ и $S_v(\omega)$ соответственно полезного сигнала и помехи. Как правило, такая точка единственная, что позволяет произвести замену кривых спектральных плотностей их спрямленными частотными характеристиками, локальными аппроксимациями, соответствующими их поведению в окрестности точки пересечения. В этом случае приближенные выражения для спектральных плотностей полезного сигнала и помехи представляют собой степенные функции частоты вида

$$S(\omega) \approx A^2 \omega^{2n} \text{ или } S(\omega) \approx B^2 \omega^{-2m},$$

что существенно ограничивает разнообразие получаемых решений и сводит их к стандартному табличному виду [4, 12, 13]. В случаях же локальных провалов или пиков в окрестности точки ω_0 могут использоваться следующие приближенные выражения для спектральных плотностей:

$$S(\omega) \approx A^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \text{ или } S(\omega) \approx B^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^{-2}.$$

Одним из важнейших преимуществ использования подобных локальных аппроксимаций является то, что для получения практических результатов вполне достаточно сведений о спектральных плотностях в относительно малых диапазонах частот (обычно низких).

Абстракция получаемых моделей процессов, потеря ими стационарности и обладание бесконечно большими дисперсиями не вызывают сложностей при синтезе и не приводят к каким-либо парадоксальным результатам, если устанавливающаяся дисперсия σ_e^2 конечна [4]. Условием конечности является конечность интеграла

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_u(\omega)S_v(\omega)}{S_u(\omega) + S_v(\omega)} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \min\{S_u(\omega), S_v(\omega)\} d\omega,$$

для чего, в свою очередь, необходимы конечность подынтегрального выражения при $\omega \rightarrow 0$ и его стремление к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Это выражение представляет самостоятельную ценность: оно дает очень грубую оценку снизу (как показывают примеры, с занижением обычно в полтора-два раза) дисперсии ошибки еще не найденного винеровского фильтра [20]. Если же указанные условия конечности интеграла не выполняются, то постоянная установившаяся дисперсия не существует, ошибки неограниченно нарастают, что нередко имеет место в задачах навигации и устанавливается специалистами из общих соображений.

Следует отметить, что использование описанного подхода до настоящего времени связывалось исключительно со стационарными задачами, в которых рассматривались установившиеся режимы после окончания переходного процесса, при этом не принимались во внимание требования повышения точности системы в переходном режиме. В связи с этим переходные процессы в таких системах зачастую получались чрезмерно затянутыми по сравнению с потенциально возможным процессом, что приводило к внушительным показателям времени их готовности. Далее на примере решения двух задач иллюстрируется предлагаемая процедура, позволяющая применить описанные выше принципы упрощения моделей входных воздействий для их дальнейшего использования при построении нестационарных алгоритмов фильтрации, основанных на применении фильтров Калмана.

2. Синтез алгоритмов фильтрации для автономной гировертикали

Рассмотрим платформенную гировертикаль, построение которой осуществляется по выходным сигналам гироскопов и акселерометров, располагающихся на одной платформе, стабилизированной с помощью гироскопов [1, 2]. При исследовании алгоритмов коррекции ограничимся рассмотрением одного, северного канала построения вертикали, пренебрегая перекрестными связями между

северным и восточным каналами, а также нецентральностью гравитационного поля Земли.

Уравнение прецессионного движения гироскопа представим в виде

$$H_{\Gamma} \left(\dot{\gamma} + \frac{V_N}{R} \right) = M_y + M_{\kappa}, \quad (2)$$

где H_{Γ} – кинетический момент гироскопа; γ – ошибка горизонтирования; V_N – северная составляющая линейной скорости; R – радиус Земли; M_y – возмущающий момент; M_{κ} – момент, создаваемый корректирующим устройством. Будем считать, что возмущающий момент M_y вызывал бы угловую скорость ухода гироскопа ω_y , если бы он был свободным в соответствии с соотношением

$$M_y = H_{\Gamma} \omega_y. \quad (3)$$

В содержательном плане задача заключается в нахождении алгоритма преобразования сигнала акселерометра в корректирующий момент. Отметим, однако, что формализация этой задачи как задачи фильтрации, тем более ее трактовка в терминах пространства состояний, совершенно не очевидна. Вместе с тем к интересующей нас постановке задачи можно достаточно просто подойти, опираясь на методы, используемые в теории управления стационарными системами, с последующим переходом к задаче нестационарной калмановской фильтрации.

Представим корректирующий момент в виде

$$M_{\kappa} = F(p, t)z, \quad (4)$$

где z – выходной сигнал акселерометра, $F(p, t)$ – искомый алгоритм преобразования (в общем случае, нестационарный), представленный в операторной форме. В том случае, когда рассматривается стационарная задача, алгоритм преобразования представляется в виде передаточной функции корректирующего фильтра $F(p, t) \equiv F(p)$.

Пренебрегая собственной погрешностью акселерометра, его выходной сигнал (проекция кажущегося ускорения на северное направление) при малых ошибках горизонтирования можно записать

$$z \approx \dot{V}_N - g\gamma, \quad (5)$$

где g – ускорение силы тяжести.

Из соотношений (2)–(5) может быть получено уравнение для ошибки горизонтирования γ . При стационарной обработке это уравнение можно представить в операторной форме

$$\gamma = \frac{H_{\Gamma} \left(\omega_y - \frac{1}{Rp} W_N \right) + F(p) W_N}{H_{\Gamma} p + gF(p)}, \quad (6)$$

где $W_N = \dot{V}_N$ – северная составляющая ускорения объекта. Обозначим

$$H(p) = \frac{gF(p)}{H_{\Gamma} p + gF(p)} \quad (7)$$

и преобразуем (6) к виду

$$\gamma = (1 - H(p)) \left(\frac{1}{p} \omega_y - \frac{1}{Rp^2} W_N \right) + H(p) \frac{W_N}{g}. \quad (8)$$

Выражению (8) соответствует структурная схема, представленная на рис. 2 и включающая случай нестационарной коррекции.

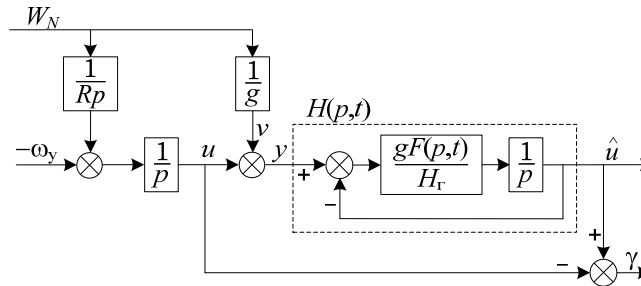


Рис. 2. Эквивалентная структурная схема гировертикали

Анализ блок-схем (рис. 1. и 2), и выражения (8) позволяет сформулировать задачу определения искомой передаточной функции корректирующего звена $F(p)$, как задачу фильтрации, в которой в качестве полезного сигнала и помехи выступают следующие случайные процессы:

$$u = -\frac{1}{p} \omega_y + \frac{1}{Rp^2} W_N, \\ v = W_N / g.$$

Проведем предварительное исследование этой задачи, не прибегая к ее постановке в пространстве состояний. Будем считать, что угловая скорость ухода гироскопа ω_y представляет собой марковский процесс первого порядка, а ускорение W_N в диапазоне относительно низких частот можно считать белым шумом. Заметим, что постоянство спектральной плотности ускорения не соответствует естественному предположению о стационарности линейной скорости объекта, однако в соответствии с принятыми упрощениями, используемыми при синтезе, существенным является лишь равномерность спектра в окрестности точки пересечения графиков спектральных плотностей составляющих измеряемого сигнала.

Выражение для спектральной плотности суммарного сигнала $y(t)$ примет вид

$$S_y(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_y^2}{\omega^2(\omega^2 + \alpha^2)} + \frac{q^2(\omega^2 - \Omega^2)^2}{g^2\omega^4}, \quad (9)$$

где σ_y – среднеквадратическое значение скорости ухода гироскопа, α – величина, обратная постоянной времени корреляции ухода, q^2 – интенсивность белого шума, характеризующего северную составляющую ускорения объекта, $\Omega = \sqrt{g/R}$ – частота Шулера. Следует отметить, что если первое слагаемое в выражении (9) в полной мере относится к полезному сигналу, то второе слагаемое содержит спектральные составляющие как полезного сигнала, так и помехи. Поэтому при анализе выражения (9) разделение на полезный сигнал и помеху не является целесообразным, а в качестве составляющих спектральной плотности $S_y(\omega)$ удобно рассматривать именно те слагаемые, что в явном виде присутствуют в выражении (9). Такой при-

ем в рамках предложенного подхода к решению задачи фильтрации вполне правомерен, поскольку нули спектральной плотности $S_y(\omega)$ в любом случае будут являться полюсами передаточной функции $H(p)$, а нули передаточной функции $H(p)$ могут быть однозначно определены из условия конечной дисперсии ошибки фильтрации [1, 4].

Рассмотрим два характерных случая пересечения графиков составляющих суммарной спектральной плотности, показанных на рис. 3, где цифрами 1 и 2 обозначены кривые, соответствующие первому и второму слагаемым в выражении спектральной плотности (9).

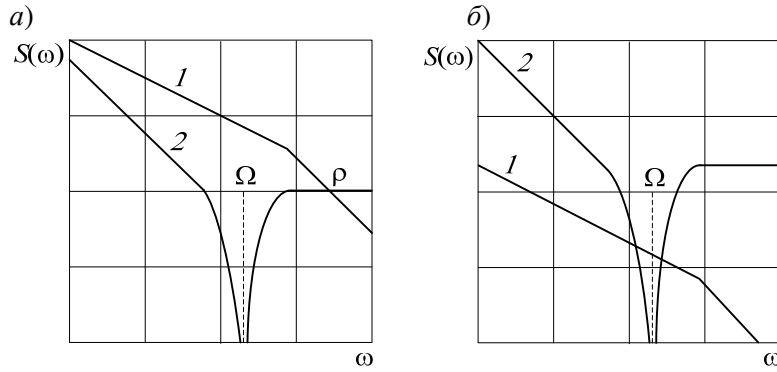


Рис. 3. Спектральные плотности составляющих измеряемого сигнала в логарифмической сетке

В первом случае (рис. 3, а), когда выполняется условие

$$\sigma_y g > q\sqrt{\alpha/2} \max\{\alpha, \Omega\}$$

(невысокое качество гироскопа и сравнительно невысокий уровень ускорений), пересечение кривых происходит на пологом участке второй кривой, что позволяет в окрестности точки пересечения с учетом соотношения $\omega > \alpha$ (в асимптотике $\omega \gg \alpha$) использовать приближение

$$S_y(\omega) \approx \frac{2\alpha\sigma_y^2}{\omega^4} + \frac{q^2}{g^2},$$

причем в данном случае, как нетрудно убедиться,

$$S_u(\omega) \cong \frac{2\alpha\sigma_y^2}{\omega^4}, \quad S_v(\omega) \cong \frac{q^2}{g^2}. \quad (10)$$

Попутно заметим, что кривые 1 и 2 имеют и вторую точку пересечения (в области низких частот), однако при этом обе пересекающиеся асимптоты относятся к полезному сигналу, так что получающийся в результате излом огибающей может быть исключен из рассмотрения.

Для модели (10) может быть решена задача оптимизации в частотной области [1] и получена передаточная функция

$$H(p) = \frac{\rho(p\sqrt{2} + \rho)}{p^2 + \rho\sqrt{2}p + \rho^2}, \quad (11)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{\sigma_y g}{q}} \sqrt{2\alpha}$ – частота пересечения кривых спектральных плотностей.

В соответствии с выражением (7) передаточной функции (11) соответствует передаточная функция корректирующего звена

$$F(p) = \frac{H_r p}{g} \left(\sqrt{2} + \frac{p}{p} \right), \quad (12)$$

что соответствует пропорционально-интегральной коррекции.

Во втором случае (рис. 3, б), соответствующем условиям $\sigma_y g < q\Omega\sqrt{\alpha/2}$, $\alpha > \Omega$ (высокое качество гироскопа и сравнительно высокий уровень ускорений), пересечение кривых происходит в окрестности провала второй кривой. Учитывая единичный наклон асимптоты первой составляющей, можно приближенно записать

$$S_y(\omega) \approx \frac{2\sigma_y^2}{\alpha\omega^2} + \frac{q^2(\omega^2 - \Omega^2)^2}{g^2\omega^4}. \quad (13)$$

Приводя правую часть выражения (13) к общему знаменателю и факторизуя числитель полученной дроби, получим с учетом требования конечной дисперсии ошибки фильтрации [1]

$$H(p) = \frac{\Omega(\xi p + \Omega)}{p^2 + \xi\Omega p + \Omega^2}, \quad (14)$$

где $\xi = \frac{\sigma_y g}{q\Omega} \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ – безразмерный коэффициент, характеризующий степень демпфирования шулеровских колебаний. Отсюда

$$F(p) = \frac{H_r \Omega}{g} \left(\xi + \frac{\Omega}{p} \right). \quad (15)$$

Заметим, что как выражение (12), так и выражение (15) характеризуют пропорционально-интегральную коррекцию, однако если в первом случае частота $p > \Omega$, а демпфирование велико, так что колебательность практически не проявляется, то во втором случае возникают собственные колебания на частоте Шулера Ω с относительно малым затуханием. Таким образом, можно сказать, что первый из рассмотренных вариантов соответствует короткопериодной, сильно-демпфированной вертикали, а второй – длиннопериодной, слабодемпфированной вертикали [4].

Проанализируем возможность использования приближенных моделей для настройки нестационарного фильтра.

После того как в рамках винеровского подхода с использованием реализующей его приближенной процедуры сформулирована задача фильтрации и уточнены применяемые модели, рассмотрим соответствующую задачу нестационарной фильтрации и калмановский алгоритм ее решения.

В первом случае (с учетом выражений (10)) модель измерений, используемая для получения фильтра Калмана, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \sigma_y \sqrt{2\alpha} \zeta, \\ y &= x_1 + v, \end{aligned} \quad (16)$$

где x_i – переменные состояния формирующего фильтра, причем $x_1 = u$, ζ – белый шум единичной интенсивности, не коррелированный с v . Интенсивность

шума v при этом составляет $R_v = q^2 / g^2$.

Во втором случае модель измерений формируется иначе:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \sigma_y \sqrt{2/\alpha} \zeta_1, \\ \dot{x}_2 &= q/R \zeta_2, \\ y &= x_1 + v,\end{aligned}\tag{17}$$

причем в данном случае вектор единичных белых шумов $\zeta = (\zeta_1 \ \zeta_2)^T$ будет коррелирован с шумом измерений v , где матрица взаимной корреляции шумов составит $D = (0 \ q/g)^T$.

В обоих случаях уравнения оценочного канала фильтра Калмана будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_1(y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= K_2(y - \hat{x}_1),\end{aligned}\tag{18}$$

где $K = (K_1 \ K_2)^T$ – матричный коэффициент усиления фильтра, настроенного на модель (16), либо на модель (17).

Начальные условия для решения уравнения Риккати в ковариационном канале фильтра могут быть как $P(0) = \text{diag}\{\sigma_\gamma^2(0); \sigma_\delta^2\}$ для модели (16) либо как $P(0) = \text{diag}\{\sigma_\gamma^2(0); \sigma_{V0}^2/R^2\}$ для модели (17). Здесь $\sigma_\gamma(0)$ – начальная средне-

квадратическая ошибка горизонтирования; σ_{V0} – начальная среднеквадратическая ошибка знания северной составляющей скорости.

Структура фильтра, описываемого уравнениями (18), показана на рис. 4.

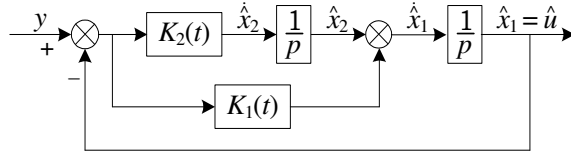


Рис. 4. Структурная схема нестационарного фильтра (автономная вертикаль)

Сопоставив рис. 2 и 4, получим структуру корректирующего звена, показанную на рис. 5.

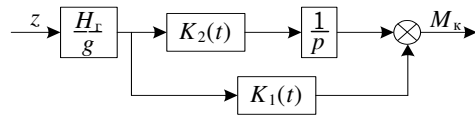


Рис. 5. Структурная схема нестационарного корректирующего звена (автономная вертикаль)

Заметим, что, как и в стационарном случае, коррекция получается пропорционально-интегральной, но с переменными коэффициентами.

Для анализа действительных среднеквадратических ошибок (СКО) горизонтирования построим полную модель

системы:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \sigma_6 \sqrt{2\alpha} \zeta_1, \\ \dot{x}_2 &= q/R \zeta_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_4 &= K_1(x_3 - x_4 + q/g \zeta_2) + x_5, \\ \dot{x}_5 &= K_2(x_3 - x_4 + q/g \zeta_2), \\ \gamma &= -x_3 + x_4.\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь первые три уравнения описывают действительную модель полезного сигнала $u = x_3$, а четвертое и пятое уравнения формируют его оценку $\hat{u} = x_4$.

Система (19) может быть представлена в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = Fx + G\zeta,$$

$$\gamma = Hx,$$

которая позволяет произвести расчет дисперсии ошибки горизонтирования как

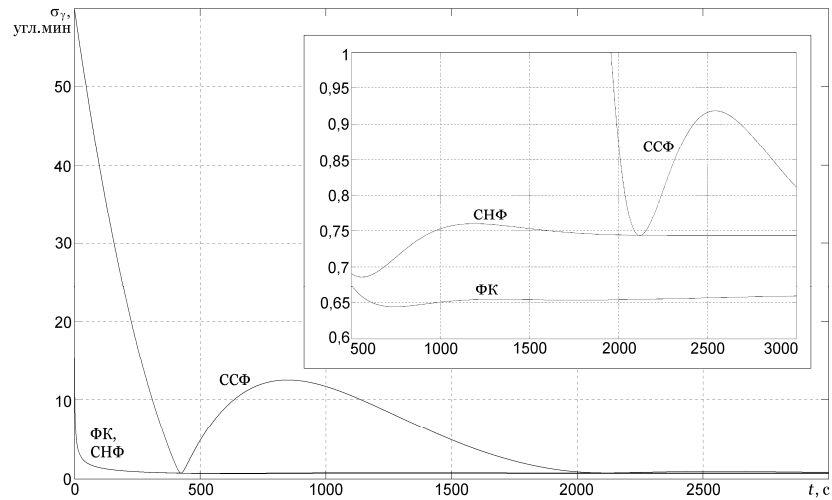
$$\sigma_\gamma^2 = HP_x H^T, \quad (20)$$

где P_x – ковариационная матрица состояния, являющаяся решением ковариационного уравнения

$$\dot{P}_x = FP_x + P_x F^T + GG^T \quad (21)$$

с начальными условиями $P_x(0) = \text{diag}\{\sigma_y^2; \sigma_V^2(0)/R^2; \sigma_\gamma^2(0); 0; 0\}$.

а)



б)

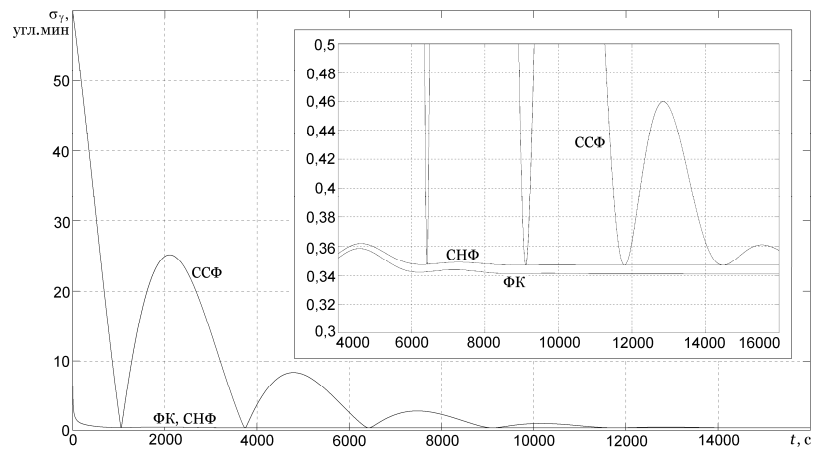


Рис. 6. Среднеквадратические ошибки горизонтирования:
а – в короткопериодной вертикали; б – в длиннопериодной вертикали

На рис. 6 приведены примерные графики изменения СКО горизонтирования при использовании:

- оптимального фильтра Калмана (ФК), где СКО рассчитывается в ковариационной матрице

ционном канале фильтра, настроенного на действительную модель – первые три уравнения системы (19);

- субоптимального нестационарного фильтра (СНФ), где СКО рассчитывается по формулам (20), (21) для системы (19) при значениях коэффициентов K_1 , K_2 , соответствующих модели (16) или (17);
- субоптимального стационарного фильтра (ССФ), где СКО рассчитывается по формулам (20), (21) для системы (19) при постоянных коэффициентах K_1 , K_2 , определяемых передаточной функцией (11) или (14).

Видно, что нестационарный фильтр позволяет существенно (практически на порядок) уменьшить длительность переходных процессов в системе по сравнению со случаем использования стационарного фильтра, сохраняя в то же время его сравнительно простую и понятную для разработчика структуру. В то же время потери в точности, вызванные субоптимизацией нестационарного фильтра, как правило, не являются значительными и составляют не более 10-15%.

Замечание. Выше предполагалось, что используемые при проектировании фильтров модели, включая вид спектральных плотностей и начальные условия для фильтра Калмана, соответствуют их действительным аналогам. Именно в этом случае оправдано использование термина «оптимальный алгоритм». В действительности же в рамках как винеровского, так и калмановского подходов существует проблема выбора адекватных моделей при проектировании алгоритмов [21, 22]. Эта проблема заслуживает специального обсуждения и выходит за рамки настоящей работы.

3. Синтез алгоритмов фильтрации для корректируемой гировертикали

Рассмотрим теперь задачу синтеза инерциальной вертикали, корректируемой по показаниям измерителя скорости [4, 18]. В системе осуществляется совместная обработка показаний акселерометра

$$z_1 \approx \dot{V}_N - g\gamma + \Delta W_N, \quad (22)$$

где ΔW_N – собственная погрешность акселерометра, и скоростных измерений СНС

$$z_2 = V_N + \Delta V_N, \quad (23)$$

где ΔV_N – погрешность СНС.

Момент коррекции гироскопа представим в виде

$$M_{\hat{e}} = H_{\hat{a}} \frac{\hat{V}_N}{R}, \quad (24)$$

где величина $\hat{V}_N$ может быть интерпретирована как оценка северной составляющей линейной скорости.

С учетом соотношений (3), (24) уравнение прецессионного движения (2) примет вид

$$\dot{\gamma} = \omega_0 - \frac{V_N - \hat{V}_N}{R}. \quad (25)$$

Постановка задачи фильтрации здесь может быть также осуществлена на основе стационарного подхода. При использовании линейных алгоритмов коррекции общий вид уравнения выработки управляющего сигнала может быть представлен в операторной форме в виде соотношения

$$\hat{V}_N = F_1(p, t)z_1 + F(p, t)z_2, \quad (26)$$

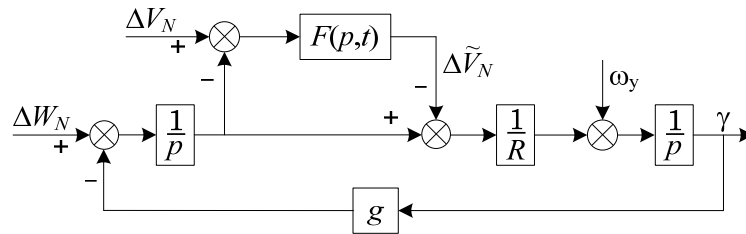
где $F(p, t)$, $F_1(p, t)$ – искомые операторы преобразования.

Информация о параметрах собственного движения объекта имеет, как правило, существенно большую неопределенность по сравнению с данными о погрешностях датчиков, в связи с чем в рассматриваемом случае целесообразно использование алгоритмов обработки, инвариантных по отношению к скорости движения объекта. Из соотношений (22), (23), (25) следует, что зависимость ошибки горизонтирования от скорости может быть исключена, если положить

$$F_1(p, t) = (1 - F(p, t)) \cdot \frac{1}{p}.$$

Структура формирования ошибки горизонтирования при инвариантной обработке измерений показана на рис. 7, а, которая путем несложных преобразований может быть сведена к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 7, б. Выход корректирующего звена $\Delta \tilde{V}_N$ представляет собой оценку подлежащей компенсации погрешности скорости, выработанной интегрированием показаний акселерометра.

а)



б)

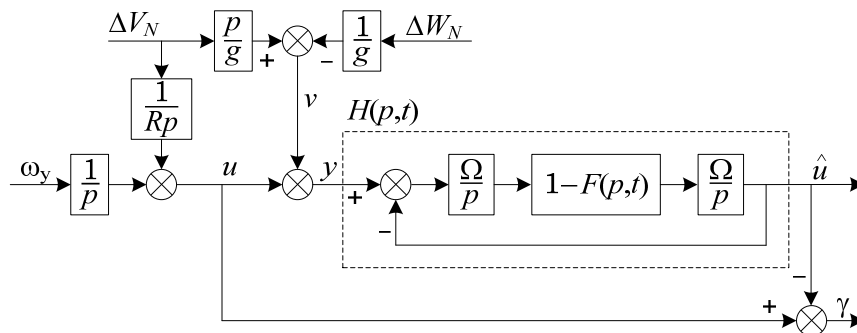


Рис. 7. Структурные схемы корректируемой вертикали

Таким образом, в данном случае роль полезного сигнала играет процесс

$$u = \frac{1}{p} \omega_y + \frac{1}{Rp} \Delta V_N, \quad (27)$$

а роль помехи – процесс

$$v = \frac{p}{g} \Delta V_N - \frac{\Delta W_N}{g}. \quad (28)$$

При этом будем полагать, что погрешность акселерометра носит белозумный характер (пренебрегая постоянным смещением нуля), а погрешность СНС представляет собой марковский процесс первого порядка с малой постоянной времени корреляции.

Выражение для спектральной плотности суммарного сигнала $y(t)$ будет представлять собой сумму трех составляющих:

$$S_y(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_y^2}{\omega^2(\omega^2 + \alpha^2)} + \frac{(\omega^2 - \Omega^2)^2}{g^2\omega^2} \cdot \frac{2\mu\sigma_v^2}{\omega^2 + \mu^2} + \frac{q_w^2}{g^2}, \quad (29)$$

где σ_v – среднеквадратическая погрешность измерения скорости СНС, α – величина, обратная постоянной времени корреляции погрешности СНС, q_w^2 – интенсивность белого шума, характеризующего погрешность акселерометра.

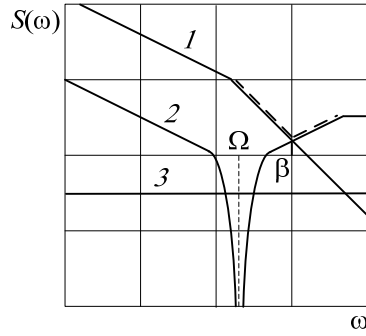


Рис. 8. Спектральные плотности составляющих погрешностей измерителей

На рис. 8 показан характерный случай взаимного расположения кривых спектральных плотностей, соответствующих каждому из трех слагаемых в выражении (29). Эти кривые обозначены соответственно цифрами 1, 2 и 3.

Из анализа рис. 8 можно сделать следующие заключения. Во-первых, составляющая, характеризующая собственную погрешность акселерометра, при решении задачи фильтрации сразу может быть исключена из рассмотрения, поскольку ни в одном диапазоне частот она не приближается к огибающей сверху. Во-вторых, в

окрестности частоты $\beta = \sqrt[3]{\frac{\sigma_y g}{\sigma_v}} \sqrt{\alpha \mu}$, соответствующей

точке пересечения первой и второй характеристик, они имеют наклоны соответственно 80 и 40 дБ/дек, причем единичный наклон второй кривой вызван наличием первого слагаемого в выражении (28). Таким образом, можно приближенно записать

$$S_u(\omega) \cong \frac{2\alpha\sigma_y^2}{\omega^4}, \quad S_v(\omega) \cong \frac{2\sigma_v^2\omega^2}{\mu g^2}. \quad (30)$$

При получении соотношений (30) использованы справедливые в окрестности частоты β допущения $\omega \gg \alpha$, $\omega \ll \mu$, $\omega \gg \Omega$. На рис. 8 штриховой линией отмечены асимптоты, принимаемые в рассмотрение при решении задачи синтеза.

Для модели (30) передаточная функция оптимального стационарного фильтра будет иметь вид [4, 11]

$$H(p) = \frac{2\beta^2 p + \beta^3}{p^3 + 2\beta p^2 + 2\beta^2 p + \beta^3}. \quad (31)$$

Поскольку, как следует из рис. 7, б,

$$H(p) = \frac{\Omega^2(1 - F(p))}{p^2 + \Omega^2(1 - F(p))},$$

выражение для передаточной функции стационарного корректирующего звена может быть записано как

$$F(p) = \frac{(1 - 2\beta^2/\Omega^2)p + (2 - \beta^2/\Omega^2)\beta}{p + 2\beta}.$$

Далее рассмотрим вопрос использования приближенных моделей (30) для

настройки нестационарного фильтра. Следует отметить, что формирующий фильтр для помехи v в данном случае является дифференцирующим, что не позволяет сформировать модель измерений с использованием уравнений в форме Коши наподобие (16) или (17). Для сведения задачи к стандартной постановке сформируем псевдоизмерение $\tilde{y}$ в виде интеграла от измерения y . Модель измерений примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \sigma_y \sqrt{2\alpha} \zeta, \\ \dot{x}_3 &= x_1, \\ \tilde{y} &= x_3 + \tilde{v}.\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь $\tilde{v}$ – белый шум интенсивности $R_v = \frac{2\sigma_v^2}{\mu g^2}$, не коррелированный с единичным порождающим шумом ζ .

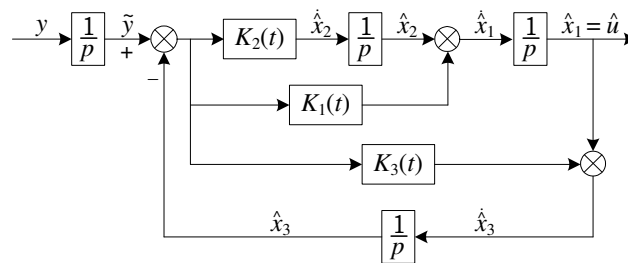
Уравнения оценочного канала фильтра Калмана будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_1(\tilde{y} - \hat{x}_3), \\ \hat{\dot{x}}_2 &= K_2(\tilde{y} - \hat{x}_3), \\ \hat{\dot{x}}_3 &= \hat{x}_1 + K_3(\tilde{y} - \hat{x}_3).\end{aligned}\quad (33)$$

где коэффициенты K_i формируются в соответствии с расчетной моделью (32). Начальные условия для решения уравнения Риккати в ковариационном канале фильтра могут быть заданы как $P(0) = \text{diag}\{\sigma_y^2(0); \sigma_y^2; 0\}$.

Структура фильтра, описываемого уравнениями (33), показана на рис. 9, а; а эквивалентная схема – на рис. 9, б.

а)



б)

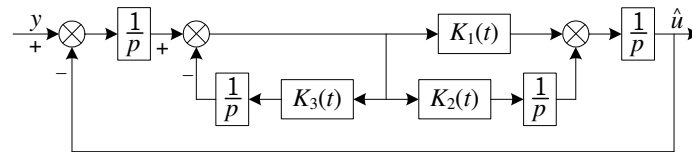


Рис. 9. Структурные схемы нестационарного фильтра (корректируемая вертикаль)

Отметим, что в данном случае отказ от требований стационарности системы привел к усложнению ее структуры и появлению второго интегратора, что обусловлено некоммутативностью операций интегрирования и умножения на переменный коэффициент. Однако по-прежнему корректирующее звено характе-

ризуется тремя параметрами K_i , смысл которых соответствует смыслу коэффициентов передаточной функции $F(p)$.

Сопоставив рис. 7 и 9, б, получим структуру корректирующего звена, показанную на рис. 10.

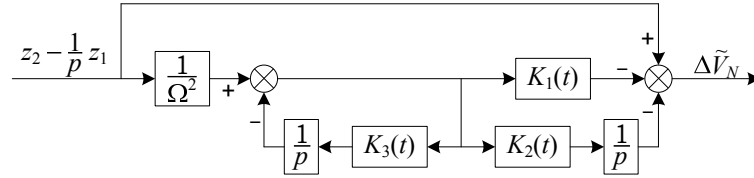


Рис. 10. Структурная схема нестационарного корректирующего звена (корректируемая вертикаль)

Полная модель системы для рассматриваемой задачи по аналогии с (19) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \sigma_y \sqrt{2\alpha} \zeta_1, \\
 \dot{x}_2 &= -\mu x_2 + \sigma_v \sqrt{2\mu} \zeta_2, \\
 \dot{x}_3 &= x_1 + x_2/R, \\
 \dot{x}_4 &= x_5 + K_1 x_6, \\
 \dot{x}_5 &= K_2 x_6, \\
 \dot{x}_6 &= -\mu/g x_2 + x_3 - x_4 - K_3 x_6 + \sigma_v/g \sqrt{2\mu} \zeta_2 + q_w \zeta_3, \\
 \gamma &= x_3 - x_4.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Начальные условия для решения ковариационного уравнения (21) в данном случае будем задавать как $P_x(0) = \text{diag}\{\sigma_y^2; \sigma_v^2; \sigma_\gamma^2(0); 0; 0; 0\}$.

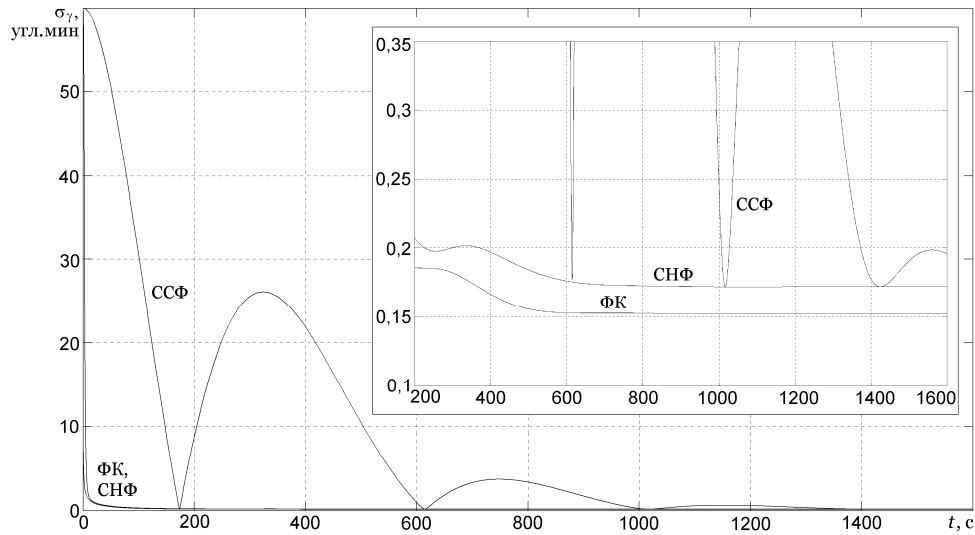


Рис. 11. Среднеквадратические ошибки горизонтирования в корректируемой вертикали

На рис. 11 приведены примерные графики изменения среднеквадратических ошибок горизонтирования при использовании различных настроек фильтра. Как и в случае автономной вертикали, использование нестационарных алгоритмов приводит к значительному сокращению переходных процессов в системе. Кроме того, отметим тот немаловажный факт, что в рамках структуры, представленной на рис. 7, оптимальный фильтр Калмана не может быть построен по классическим схемам на интеграторах, его практическое применение неизбежно потребует выполнения операции численного дифференцирования [5] и, как следствие, дополнительных ошибок фильтрации. Использование субоптимальных алгоритмов обработки, как видно из рассмотренного примера, позволяет в данном случае избежать такого нежелательного эффекта. Таким образом, проведенные упрощения моделей входных воздействий по результатам их анализа в частотной области не только способствовали существенному упрощению структуры корректирующего звена, но и автоматически сняли проблемы его реализации.

Заключение

Предложена процедура синтеза нестационарных алгоритмов обработки навигационной информации, позволяющая объединить достоинства калмановского и винеровского подходов и получать сравнительно простые алгоритмы коррекции, близкие по своим свойствам к оптимальным. Суть ее заключается в том, что на этапе постановки и исследования задачи используется винеровский подход и упрощение моделей, применяемых в дальнейшем для настройки фильтра Калмана, осуществляется с использованием приближенных методов, разработанных для частотных методов. При этом длительность переходных процессов в получающихся алгоритмах, а значит и время готовности систем, по отношению к стационарным алгоритмам существенно снижаются. Приведенные примеры иллюстрируют эффективность использования предложенной процедуры.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 11-08-00372.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челпанов, И.Б.** Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. - М. Наука, 1967.
2. **Ривкин, С.С.** Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах. Ч. 1, 2. - Л.: Судостроение, 1973-1974.
3. **Ривкин, С.С.** Статистическая оптимизация навигационных систем / С.С. Ривкин, Р.И. Ивановский, А.В. Костров. - Л.: Судостроение, 1976. - 280 с.
4. **Челпанов, И.Б.** Расчет характеристик навигационных приборов / И.Б. Челпанов, Л.П. Нессенюк, М.В. Брагинский. - Л.: Судостроение, 1978. - 264 с.
5. **Дмитриев, С.П.** Высокоточная морская навигация - Л.: Судостроение, 1991. - 222 с.
6. **Anderson, B.D.O.** Kalman Filtering: Whence, What, and Whither? / B.D.O. Anderson, J.B. Morre. In: Autolas A.S., ed., Mathematical System Theory, The Influence of R.E.Kalman. - Berlin: Springer-Verlag, 1991.
7. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч.1: Введение в теорию оценивания. - СПб.: ЦНИИ Электроприбор, 2010. - 496 с.
8. **Степанов, О.А.** Фильтр Калмана. История и современность (К 80-летию Рудольфа Эмиля Калмана) / О.А. Степанов // Гироскопия и навигация. - 2010. - № 2. - С. 107-118.
9. **Wiener, N.** Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications. - New York: John Wiley, 1949 (Originally issued in February 1942, as a classified Nat. Defense Res. Council Rep.).
10. **Kalman, R.E.** New Results in Linear Filtering and Prediction Theory / R.E. Kalman, R.S. Bucy.

- Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering. - 1961. - Vol. 83. - Pp. 95-107 (Калман, Р.Е. Новые результаты в теории линейной фильтрации и предсказания / Р.Е. Калман, Р.С. Бьюси // Теоретические основы инженерных расчетов. - 1961. - № 1. - Сер. Д.).
- 11. **Несенюк, Л.П.** Синтез оптимальных динамических характеристик гировертикали при учете качки, рысканья и сноса судна / Л.П. Несенюк, И.Б. Челпанов // Изв. вузов. Приборостроение. - 1971. - Т. XIV, № 3. - С. 64-69.
- 12. **Несенюк, Л.П.** Инженерный подход к синтезу фильтров Калмана - Винера // Авиакосмическое приборостроение. - 2003. - Вып. 11. - С. 37-42.
- 13. **Памяти** профессора Несенюка Л.П. Избранные труды и воспоминания / Сост.: В.Г. Пешехонов, О.А. Степанов, Ю.А. Литманович, М.В. Гришина, Л.П. Старосельцев, И.Б. Челпанов, С.П. Дмитриев, М.И. Евстифеев, Л.С. Элинсон. - СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2010. - 254 с.
- 14. **Зиненко, В.М.** Об одном приближенном методе определения частотных характеристик оптимальных одномерных стационарных фильтров // Судостроительная пром-сть. Сер. Навигация и гироскопия. - 1991. - Вып. 1. - С. 15-25.
- 15. **Oliveira, P.** Navigation Systems Design: An Application of Multi-rate Filtering Theory / P. Oliveira, A. Pascoal // Proc. of OCEANS'98 Conference. - Nice, France, 1998. - Vol. 3. - Pp.1348-1353.
- 16. **Ивановский, Р.И.** Некоторые аспекты разработки и использования стационарных фильтров в навигационных системах // Гироскопия и навигация. - 2011. - № 3. - С.102-114
- 17. **Челпанов, И.Б.** Опыт и перспективы использования алгоритмов стационарной фильтрации в задачах навигации / И.Б. Челпанов, О.А. Степанов, А.В. Лопарев // Гироскопия и навигация. 2010. - № 4. - С. 88-89.
- 18. **Козелкова, Н.А.** Анализ эффективности нестационарных алгоритмов обработки информации в задаче построения инерциальной вертикали / Н.А. Козелкова, А.В. Лопарев. // XII конф. молодых ученых «Навигация и управление движением». - СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2010. - С.132-140.
- 19. **Сборник** задач по теории автоматического управления и регулирования / Под ред. В.А. Бесекерского. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: Наука-Физматлит, 1969. - 588 с.
- 20. **Степанов, О.А.** Связь алгоритмов оптимальной стационарной фильтрации и сглаживания // Гироскопия и навигация. - 2004. - № 1. - С.16-26.
- 21. **Степанов, О.А.** Универсальные Matlab-программы анализа потенциальной точности и чувствительности алгоритмов линейной нестационарной фильтрации / О.А.Степанов, Д.А. Кошаев //Гироскопия и навигация. - 2004. - № 2. - С. 81-92.
- 22. **Ивановский, Р.И.** Проблемы чувствительности в задачах обработки информации и управления // Гироскопия и навигация. - 2011. - № 1, 2011. - С.90-104.

Abstract. The paper considers a synthesis procedure for nonstationary filters for navigation data processing. The method combines benefits of Kalman and Wiener methods and provides comparatively simple correction algorithms, which are close to optimal. The idea is that Wiener method is used at the phase of problem statement and analysis, and the models to be further applied at the filter adjustment are simplified with approximate methods developed for frequency approaches. Then the duration of transients in the resulting algorithms, and the system readiness time is reduced as compared with stationary algorithms. The examples are given to demonstrate the efficiency of the proposed procedure.