

◆ КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ◆

УДК 519.654

М. В. СОТНИКОВА

**ОСОБЕННОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ
ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БОКОВОГО ДВИЖЕНИЯ СУДНА**

В статье рассматриваются вопросы о наилучшем варианте применения метода наименьших квадратов (МНК) для идентификации линейной модели бокового движения судна. Исследуется зависимость качества идентификации от способа постановки эксперимента. Сравниваются различные реализации МНК, представленные в пакете MATLAB.

Введение

В настоящее время известны различные подходы к экспериментальному оцениванию параметров линейных моделей движения морских судов. Некоторые из них представлены в работах [1, 2]. Достоинства и недостатки этих методов подробно проанализированы в статье [3]. И трудно отдать предпочтение какому-либо одному подходу как универсальному инструменту, который можно использовать в любой ситуации. Один из возможных способов преодоления трудностей, возникающих при идентификации, представлен в статье [3].

Данная работа посвящена анализу применимости метода наименьших квадратов (МНК) к оцениванию параметров линейных моделей динамики судов. Этот метод широко применяется на практике. Однако известно, что его существенными недостатками являются неустойчивость оценок параметров, а также зачастую плохая обусловленность ковариационной матрицы, обращение которой может привести к значительным ошибкам в оценивании.

Сотникова Маргарита Викторовна. Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Санкт-Петербургского государственного университета.

Целью работы является исследование качества идентификации с использованием МНК в зависимости от способа постановки эксперимента, а именно от выбора входного сигнала и от скорости хода судна. Кроме того, сравниваются различные варианты конкретной реализации МНК на базе методов идентификации, представленных в среде MATLAB.

В рамках принятого подхода не учитываются внешние воздействия и погрешности в измерениях. В связи с этим полученные результаты следует трактовать как идеальное приближение, которое далее может быть уточнено путем оценивания спектральных характеристик внешних воздействий и шумов.

Полученные в результате идентификации линейные модели могут быть использованы при формировании управления с многоцелевой структурой обратной связи [4], в частности – при синтезе динамических фильтров морского волнения [5].

Вычислительные эксперименты проведены на примере транспортного судна водоизмещением около 4000 т при действии ветро-волновых возмущений. Компьютерное моделирование процессов управления судном для получения экспериментальных данных выполнено в среде MATLAB –Simulink.

Идентификация с использованием метода наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов обычно применяется для оценивания параметров динамических объектов, трактуемых как цифровые фильтры. В наиболее общем случае принято рассматривать ARMAX фильтры вида

$$\begin{aligned} y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{N-1} y[n-N+1] + a_N y[n-N] = \\ = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_{M-1} u[n-M+1] + b_M u[n-M] + \psi[n], \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = \{u[n]\}$ – входной сигнал, $y = \{y[n]\}$ – выходной сигнал, N и M – априорно заданные целые числа, $\psi = \{\psi[n]\}$ – внешнее возмущение, $n = N+1, N+2, \dots$. Объединим неизвестные коэффициенты фильтра в вектор-столбец

$$\mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N-1} \ a_N \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{M-1} \ b_M)^T \in E^{N+M+1},$$

а результаты измерений входного и выходного сигнала – в вектор-строку

$$\mathbf{c}[n] = (-y[n-1] \ -y[n-2] \ \dots \ -y[n-N+1] \ -y[n-N] \ u[n] \ u[n-1] \ \dots \ u[n-M+1] \ u[n-M]).$$

Теперь уравнение ARMAX фильтра (1) может быть представлено в виде

$$y[n] = \mathbf{c}[n]\mathbf{x} + \psi[n],$$

причем вектор-строка $\mathbf{c}$ именуется регрессионным вектором или регрессором по отношению к вектору параметров $\mathbf{x}$. Пусть известны результаты экспериментов, представленные парами в виде матрицы

$$\mathbf{Z}^L = \{(y[1], u[1]), (y[2], u[2]), \dots, (y[L], u[L])\}.$$

Каждая пара $(y[i], u[i])$ представляет измеренный сигнал на выходе и вызвавший его управляющий сигнал на входе на такте i соответственно, L – число записей в наборе данных. Запишем выражение для ошибки предсказания:

$$\varepsilon(n, \mathbf{x}) = y[n] - \tilde{y}[n],$$

где $y[n]$ – измеренное значение выходного сигнала, $\tilde{y}[n]$ – его оценка, вычисляемая по формуле $\tilde{y}[n] = \mathbf{c}[n]\mathbf{x}$. Поставим вопрос об оптимальном выборе вектора $\mathbf{x}$. Рассмотрим функционал, характеризующий качество идентификации:

$$J = J(\mathbf{x}) = \frac{1}{L - N} \sum_{i=N+1}^L \varepsilon^2(i, \mathbf{x}) = \frac{1}{L - N} \sum_{i=N+1}^L (y[i] - \tilde{y}[i])^2. \quad (2)$$

В соответствии с идеологией МНК [4–6], вектор параметров $\hat{\mathbf{x}}$, обеспечивающий минимум функционала (2), вычисляется по формуле

$$\hat{\mathbf{x}} = \Phi(L - N)^{-1} \frac{1}{L - N} \sum_{i=N+1}^L \mathbf{c}^T[i] y[i], \quad (3)$$

$$\text{где } \Phi(L - N) = \frac{1}{L - N} \sum_{i=N+1}^L \mathbf{c}^T[i] \mathbf{c}[i].$$

Из формулы (3) видно, что для получения оценки МНК необходимо обращение ковариационной матрицы $\Phi(L)$. Если эта матрица плохо обусловлена, то ее обращение может привести к значительным ошибкам оценивания вектора $\mathbf{x}$. Отметим, что свойства оценки $\hat{\mathbf{x}}$ существенно зависят от выбора входного сигнала. Очевидно, что его следует выбирать так, чтобы оценки параметров были несмещенными, а их дисперсии – минимальными. Кроме того, входной сигнал должен обеспечивать необходимую степень воздействия на объект для того, чтобы данные эксперимента были достаточно информативными [6, 7].

На практике для поиска наилучшей оценки вектора параметров применяют различные модификации формулы (3). В частности, используются QR-разложение, градиентные методы для минимизации функционала (2), модификации в вычислении ошибки предсказания. Кроме того, различные варианты метода МНК для идентификации используют представление модели объекта в пространстве состояний, например, метод подпространств [4].

В данной работе рассматривается вопрос о наилучшем применении МНК для идентификации модели бокового движения судна. При этом в качестве конкретных вариантов МНК рассматриваются два метода **arx** и **pem**, реализованные в пакете System Identification Toolbox среды MATLAB. Метод **arx** использует представление модели объекта в форме ARMAX фильтра (1) и

QR-разложение для поиска оптимального решения переопределенной системы линейных уравнений. Метод **рем** базируется на представлении модели объекта в форме пространства состояний и использует градиентный метод Гаусса – Ньютона для минимизации функционала ошибки предсказания.

Идентификация линейной модели бокового движения судна

Рассмотрим задачу идентификации линейной модели бокового движения на примере транспортного судна водоизмещением 4000 т, основные характеристики и нелинейные уравнения которого приведены в монографии [8].

Линейная математическая модель бокового движения судна представляется системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned}\dot{V}_y &= a_{11}(V)V_y + a_{13}(V)\omega_z + b_{11}(V^2)\delta_v, \\ \dot{\omega}_z &= a_{31}(V)V_y + a_{33}(V)\omega_z + b_{31}(V^2)\delta_v, \\ \dot{\phi} &= \omega_z.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь V – скорость движения судна относительно воды, V_y – боковая составляющая скорости, ω_z – угловая скорость рыскания, ϕ – угол курса, δ_v – угол перекладки вертикальных рулей. Модель (4) содержит 6 коэффициентов, которые требуется оценить в процессе идентификации. Оценки этих коэффициентов могут быть получены в результате идентификации модели (4), представленной в форме пространства состояний, с помощью стандартного метода **рем**.

Построим ARMAX модель движения судна, соответствующую модели (4). Будем считать, что измеряются: боковая скорость $V_y(t)$, курсовой угол $\phi(t)$ и отклонения вертикальных рулей $\delta_v(t)$ в процессе движения реального нелинейного объекта. Найдем передаточные функции от входа δ_v к выходным переменным ϕ и V_y . Применяя преобразование Лапласа, получим:

$$\phi = F_1(s)\delta_v, \quad F_1(s) = \frac{p_1 s + p_2}{s^3 + q_1 s^2 + q_2 s}, \quad V_y = F_2(s)\delta_v, \quad F_2(s) = \frac{p_1^* s + p_2^*}{s^3 + q_1 s^2 + q_2 s}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}p_1 &= b_{31}, \quad p_2 = b_{11}a_{31} - b_{31}a_{11}, \quad q_1 = -a_{11} - a_{33}, \\ q_2 &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \quad p_1^* = b_{11}, \quad p_2^* = b_{31}a_{13} - b_{11}a_{33}.\end{aligned}\quad (6)$$

Предположим теперь, что в результате идентификации получены оценки коэффициентов $p_1, p_2, q_1, q_2, p_1^*, p_2^*$ передаточных функций $F_1(s)$ и $F_2(s)$. Тогда, с учетом (6), нетрудно показать, что соответствующие им значения коэффициентов $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}, b_{11}, b_{31}$ модели (4) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} b_{31} &= p_1, \quad b_{11} = p_1^*, \quad a_{31} = (p_2^2 - p_2 b_{31} q_1 + b_{31}^2 q_2) / (b_{11} p_2 - b_{31} p_2^*), \\ a_{33} &= \frac{-b_{11} b_{31} q_2 - p_2 p_2^* + b_{31} q_1 p_2^*}{b_{11} p_2 - b_{31} p_2^*}, \quad a_{11} = -a_{33} - q_1, \quad a_{13} = \frac{1}{b_{31}} (p_2^* + b_{11} a_{33}). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать задачу оценивания коэффициентов передаточных функций (5). Отметим, что для идентификации всех шести коэффициентов модели (4) недостаточно измерять только курс φ . Для этого необходимо либо считать некоторые параметры известными в результате построения грубой модели по основным размерениям судна, либо дополнительно измерять боковую скорость $V_y(t)$.

Преобразуем модели (5) к дискретной форме, используя метод экстраполяции нулевого порядка. В результате получим модели в форме ARMAX фильтра:

$$\begin{aligned} \varphi[n] &= \tilde{a}_1 \varphi[n-1] + \tilde{a}_2 \varphi[n-2] + \tilde{a}_3 \varphi[n-3] + \tilde{b}_1 \delta_v[n-1] + \tilde{b}_2 \delta_v[n-2] + \tilde{b}_3 \delta_v[n-3], \\ V_y[n] &= \bar{a}_1 V_y[n-1] + \bar{a}_2 V_y[n-2] + \bar{a}_3 V_y[n-3] + \bar{b}_1 \delta_v[n-1] + \bar{b}_2 \delta_v[n-2] + \bar{b}_3 \delta_v[n-3]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$ – неизвестные коэффициенты, которые требуется оценить в процессе идентификации. Отметим, что параметры фильтра равны $N = M = 3$ и количество слагаемых в уравнениях (8) определяется передаточными функциями (5). Будем полагать, что идентификация выполняется по имеющимся данным эксперимента

$$Z_\varphi^L = \{ \delta_v(1), \varphi(1), V_y(1), \dots, \delta_v(L), \varphi(L), V_y(L) \}, \quad (9)$$

где $\delta_v(i)$ – перекладка вертикальных рулей, $\varphi(i)$ и $V_y(i)$ – измеренные значения курса и боковой скорости на i -м такте дискретного времени. Для идентификации коэффициентов ARMAX-моделей (8) по данным (9) будем использовать метод **arx**. Коэффициенты $p_1, p_2, q_1, q_2, p_1^*, p_2^*$ моделей (5) могут быть получены путем преобразования идентифицированных моделей (8) к непрерывной форме. При этом оценки коэффициентов $\hat{a}_{11}, \hat{a}_{13}, \hat{a}_{31}, \hat{a}_{33}, \hat{b}_{11}, \hat{b}_{31}$ модели (4) вычисляются по формулам (7). Для сравнения результатов будем также выполнять идентификацию с помощью метода **рем**, базирующегося на представлении модели в пространстве состояний (4).

Для получения экспериментальных данных будем использовать следующие сигналы при средней и низкой скоростях хода в течение 1000 с и при маневрах в пределах $\pm 5^\circ$:

- 1) ступенчатое периодическое управление рулями, обеспечивающее их перекладку (step);

- 2) случайный бинарный сигнал, обеспечивающий перекладку вертикальных рулей (rbs);
- 3) случайный бинарный командный сигнал по курсу, обеспечивающий маневрирование по курсу (rbs_course).

Для идентификации модели (4) данные измерений записываются с периодичностью в 0,05 с. При этом для вычисления оценок коэффициентов используются данные измерений на временном интервале длиной в 1000 с.

Для оценки качества идентификации будем сравнивать ее результат с коэффициентами линейной модели, полученной линеаризацией нелинейной системы, считая их истинными. В табл. 1 сведены результаты идентификации при скорости хода $V = 5$ м/с и трех различных вариантах выбора входного сигнала двумя вариантами идентификации с использованием методов **arx** и **pem**. В таблице указан процент расхождения между истинным значением коэффициента и значением, полученным в результате идентификации.

Т а б л и ц а 1

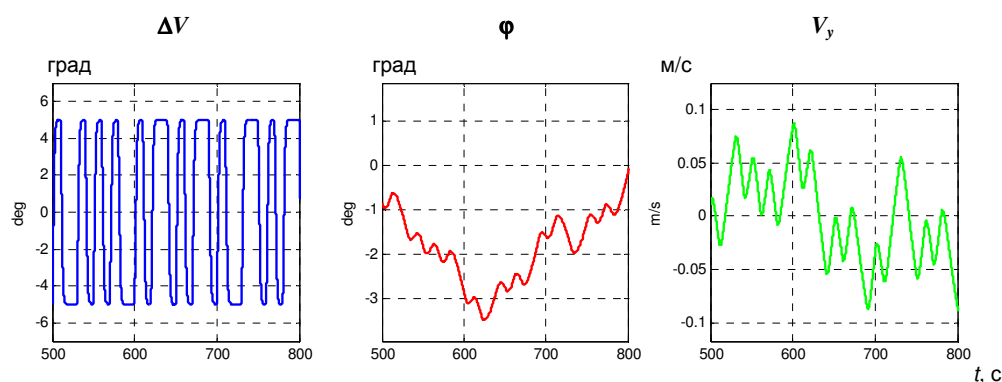
Коэффици- ент	Step		Rbs		Rbs_course	
	Arx	Pem	Arx	Pem	Arx	Pem
a_{11}	1,2	0,9	21,7	1,6	15,4	16,8
a_{13}	71,8	0,3	52,1	3,6	75,5	5,0
a_{31}	36,2	3,1	18,4	2,9	64,5	13,7
a_{33}	4,9	3,0	2,8	0,6	16,8	13,0
b_{11}	4,3	4,8	3,2	2,6	0,2	10,1
b_{31}	0,8	1,0	0,6	1,0	2,7	3,8

Как видно из таблицы, результаты идентификации методом **pem** значительно лучше по сравнению с методом **arx** при любом выборе входного сигнала. Эта особенность связана с различными вычислительными алгоритмами, реализуемыми методами **pem** и **arx**. Кроме того, в качестве управляющего сигнала следует выбирать ступенчатый периодический или случайный бинарный сигнал. При этом максимальная ошибка восстановления не превышает 5%. Если же идентификация осуществляется в контуре обратной связи с использованием командного случайного бинарного сигнала по курсу, то ошибки оценивания существенно возрастают.

В качестве примера на рисунке приведены данные эксперимента на отрезке времени 500–800 с при использовании случайного бинарного сигнала для управления вертикальными рулями. Ниже приведены соответствующие эксперименту оценки коэффициентов и их истинные значения:

$$\hat{a}_{11} = -0,049, \quad \hat{a}_{13} = -3,362, \quad \hat{a}_{31} = -0,002, \quad \hat{a}_{33} = -0,368, \quad \hat{b}_{11} = -0,047, \quad \hat{b}_{31} = 0,004;$$

$$a_{11} = -0,048, \quad a_{13} = -3,351, \quad a_{31} = -0,002, \quad a_{33} = -0,358, \quad b_{11} = -0,049, \quad b_{31} = 0,004.$$



Данные эксперимента при использовании случайного бинарного сигнала для управления вертикальными рулями и скорости хода $V = 5$ м/с

Результаты идентификации для тех же вариантов входных сигналов, но при скорости хода $V = 10$ м/с сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Коэффици- ент	Step		Rbs		Rbs_course	
	Arx	Pem	Arx	Pem	Arx	Pem
a_{11}	21.4	3.2	35.2	1.6	64.2	13.2
a_{13}	62.3	2.9	85.7	3.7	134.3	42.2
a_{31}	23.6	3.8	42.5	2.3	121.1	72.3
a_{33}	3.5	4.3	5.5	3.7	23.5	49.6
b_{11}	8.5	6.4	9.2	3.4	10.1	16.7
b_{31}	1.1	2.2	0.9	3.5	2.8	41.9

Как видно из таблицы, лучшие оценки коэффициентов обеспечиваются при выборе ступенчатого или случайного бинарного сигнала и метода **pem**. При этом точность оценивания незначительно ухудшается по сравнению с результатами для скорости хода $V = 5$ м/с, приведенными в табл. 1. Однако дальнейшее увеличение скорости хода уже приводит к существенному росту ошибок оценивания, что связано с постепенным возрастанием влияния крена на динамику бокового движения.

Важно отметить, что ввиду известных зависимостей коэффициентов линейной модели (4) от скорости, идентифицировать коэффициенты следует при той скорости хода, на которой они оцениваются наилучшим образом. В данном случае идентификацию лучше выполнять для скорости хода $V = 5$ м/с.

Следует отметить, что аналогичный подход может быть использован для оценивания коэффициентов линейной модели движения судна по крену и полной линейной модели пятого порядка бокового движения судна.

Заключение

На основании исследований показано, что наилучшие результаты при восстановлении шести коэффициентов линейной модели бокового движения получаются при выборе ступенчатого или случайного бинарного сигнала для управления вертикальными рулями, скорости хода $V = 5$ м/с и метода идентификации **рем.** При этом коэффициенты линейной модели восстанавливаются с ошибкой не более 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fossen, T.I.** Guidance and Control of Ocean Vehicles. John Wiley & Sons. New York, 1999, 480 p.
2. **Astrom, K.J., Kallstrom, C.G.** Experiences of System Identification Applied to Ship Steering. Automatica. 1981, V.17, No.1, pp. 187-198.
3. **Пелевин, А.Е.** Идентификация параметров модели морского подвижного объекта при периодическом движении с активным управлением // Гироскопия и навигация. - 2008. - № 4. С. 29-39.
4. **Веремей, Е.И.** Синтез законов многоцелевого управления движением морских объектов // Гироскопия и навигация. - 2009. - № 4. С. 3-14.
5. **Веремей, Е.И.** Применение метода H_{∞} -оптимизации для синтеза фильтров морского волнения /Е.И. Веремей, М.В. Сотникова // Гироскопия и навигация. - 2009. - № 2. - С. 24 -36.
6. **Ljung L.** System Identification: Theory for the User. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 2nd edition, 1999, 672 p.
7. **Эйкхофф, П.** Основы идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975. - 684 с.
8. **Дмитриев, С.П.** Задачи навигации и управления при стабилизации судна на траектории / С.П.Дмитриев, А.Е. Пелевин. - СПб.: ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор», 2002. - 160 с.

Abstract. The problem of the identification of the linear model (4) by means of least squares method is considered. The goal of the research is to investigate the quality of the identification in relation with the experiment design that is the selection of the input signal and the velocity of the ship. Two realizations of the least squares method, which are presented in the MATLAB environment, are compared.

Key words: MATLAB, least squares method, problem of the identification