

В. Э. ДЖАШИТОВ, В. М. ПАНКРАТОВ, М. А. БАРУЛИНА

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ

*Построены и исследованы связанные математические модели тепловых процессов, термоупругого напряженно-деформированного состояния, температурных и технологических погрешностей волновых твердотельных гироскопов. На основе построенных конечно-элементных моделей, проведен анализ термоупругого напряженно-деформированного состояния, как отдельного резонатора гироскопа, так и датчика в целом. Выполнены компьютерные эксперименты, подтверждающие адекватность и работоспособность разработанного математического и программного обеспечения. Получены качественные и количественные оценки температурных и технологических погрешностей датчика как функций его параметров и действующих возмущений. Выработаны рекомендации по обеспечению эффективного функционирования волнового твердотельного гироскопа.*

### Введение, постановка задач и выбор методов решения

Традиционно малогабаритный волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), теория которого достаточно хорошо разработана [1, 2], считается одним из перспективных датчиков инерциальной информации наряду с микромеханическими, волоконно-оптическими и некоторыми другими типами гироскопов.

Анализ информации за последние несколько лет [3–6] показал, что основные усилия разработчиков и исследователей ВТГ направлены на разработку и совершенствование методов управления колебаниями резонатора, методов его балансировки, на улучшение характеристик ВТГ, изучение влияния вибрационных воздействий и др.

Вместе с тем современные точные высоконадежные и малогабаритные ВТГ [3, 7–10] должны функционировать в условиях достаточно жестких температурных воздействий. Например, температуры окружающей среды могут изменяться в широком диапазоне ( $-50...+80^{\circ}\text{C}$ ). Такие тепловые воздействия могут привести к сложному изменению термоупругого напряженно-деформированного состояния датчика, недопустимым внутренним температурам и в конечном итоге к погрешностям и нарушениям нормального функционирования прибора.

Кроме того, при изготовлении ВТГ принципиальное значение имеют технологические допуски на основные геометрические, конструктивные, теплофизические и другие параметры и характеристики прибора. Важно, как эти допуски

---

**Джашитов** Виктор Эмануилович. Доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Института проблем точной механики и управления РАН (г. Саратов). Действительный член Академии навигации и управления движением.

**Панкратов** Владимир Михайлович. Доктор технических наук, профессор, зам. директора по науке Института проблем точной механики и управления РАН. Действительный член Академии навигации и управления движением.

**Барулина** Марина Александровна. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории института проблем точной механики и управления РАН. Член секции молодых ученых Академии навигации и управления движением.

и их сочетания повлияют на выходные характеристики гироскопа, с какой точностью должны быть заданы, например, параметры коэффициентов демпфирования, резонансной частоты колебаний или геометрии резонатора.

Волновой твердотельный гироскоп (рис. 1) представляет собой прибор с одной осью чувствительности, основные элементы которого – полусферический кварцевый резонатор 1 ( $r_0 \approx 25 \div 35$  мм и менее) с ножкой, наружный корпус 2 и внутренний корпус 3 (габариты  $R_k \leq 86$  мм,  $H \leq 76$  мм) [3, 7].

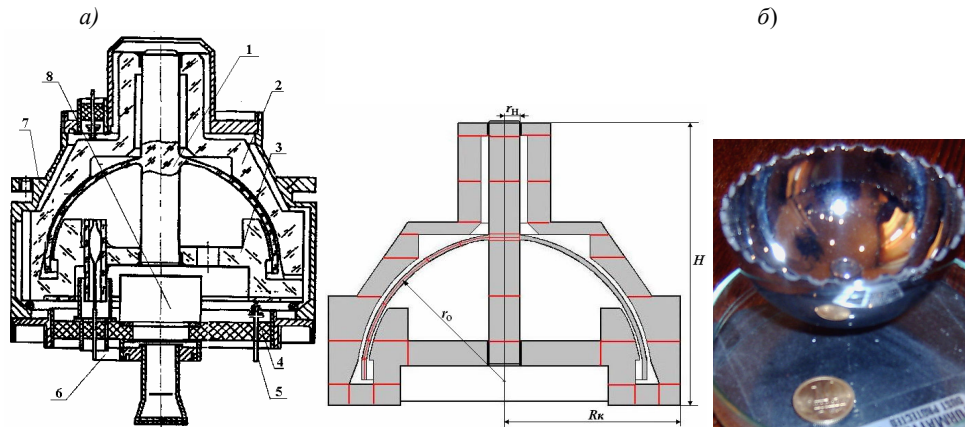


Рис. 1. Конструкция, основные элементы и габариты ВТГ (а) и его резонатор (б): 1 – полусферический кварцевый резонатор с ножкой; 2, 3 – кварцевые корпуса; 4 – керамическая колодка; 5, 6 – гермовыводы; 7 – кожух; 8 – вакуумный насос

Корпуса гироскопа выполнены из кварцевого стекла для обеспечения согласованности коэффициентов температурного линейного расширения с материалом резонатора. На корпусе 2 расположены системы электродов (16 отдельных и один кольцевой) возбуждения и управления стоячей волной, на внутреннем корпусе 3 расположено восемь электродов емкостных датчиков системы съема информации. Электроды выполнены напылением токопроводящих пленок на сферические поверхности корпусов с последующим оформлением нужной конфигурации с помощью лазера. Рабочие зазоры между электродами возбуждения и съема и соответствующими поверхностями резонатора составляют десятые доли миллиметров. Колебания резонатора ВТГ возбуждаются на резонансной частоте  $\approx 2,8$  кГц для обеспечения максимального выходного сигнала.

Разработанная к настоящему времени теория ВТГ [1–6] не охватывает в полной мере вопросов, связанных с работой прецизионного прибора в условиях температурных воздействий, и изучения влияния на выходные характеристики ВТГ технологических погрешностей изготовления элементов прибора и технологических допусков на его параметры.

Среди важных и актуальных работ в этой области можно отметить [9, 10], в которых приводятся результаты моделирования тепловых процессов ВТГ на основе численно-аналитического метода  $R$ -функций, включая анализ тепловой постоянной времени прибора. Эти результаты находятся в полном соответствии с предварительными исследованиями, но требуют дальнейшего развития [7].

*Цель настоящей работы* – обеспечение эффективного функционирования волнового твердотельного гироскопа на основе учета и анализа его температурных и технологических погрешностей с помощью построенной комплексной математической модели прибора.

Для достижения поставленной цели *ставятся и решаются* следующие *связанные* задачи.

1. Построение и исследование математических моделей тепловых процессов, протекающих в ВТГ.
2. Построение и исследование конечно-элементных математических моделей термоупругого напряженно-деформированного состояния ВТГ.
3. Построение и исследование математической модели температурных и технологических погрешностей ВТГ.
4. Оценка эффективности работы волнового твердотельного гироскопа по точности измерений с учетом температурных и технологических погрешностей.

В процессе проведения работы разработано поддерживающее алгоритмическое и программное обеспечение, использующее как универсальные программы конечно-элементного анализа, так и специально созданные оригинальные программные комплексы.

Для решения поставленных задач использованы методы тепловых балансов и методы исследования гироскопических систем [1, 2, 7], а также многофункциональная система конечно-элементного анализа ANSYS, реализующая метод конечных элементов для решения связанных задач теплового анализа и расчета термоупругого напряженно-деформированного состояния ВТГ.

Особенность использования готовых пакетов программ заключается в том, что применяемый в них математический аппарат не всегда прозрачен, и это вызывает необходимость проверки адекватности получаемых с их помощью результатов. Такая качественная и количественная проверка адекватности результатов в настоящей работе проведена для поставленных задач.

#### **Математические модели тепловых процессов и конечно-элементные модели температурных полей и термоупругого напряженно-деформированного состояния ВТГ**

Задача построения математической модели тепловых процессов, расчета и визуализации температурных полей ВТГ решалась как методом конечных элементов (МКЭ) с помощью пакета ANSYS, так и модифицированным методом элементарных тепловых балансов (МЭБ) [7]. Алгоритмы этого метода апробированы для решения задач расчета, анализа и визуализации нестационарных температурных полей различных датчиков авиакосмического приборостроения, и авторы накопили большой опыт применения этого метода.

В соответствии с методом элементарных балансов [7] и конструктивными особенностями ВТГ для построения тепловой модели прибор разбивается на конечные твердотельные элементарные объемы (рис. 1, 2). Эти объемы имеют каноническую форму цилиндрических, конических или сферических сегментов, соответствующих форме конструктивных элементов прибора. Количество объемов (опорных расчетных точек, в каждой из которых определяется температурное поле с течением времени) равно 312. При визуализации значения температуры между расчетными точками интерполируются заданным образом, и общее количество расчетных точек – сотни и тысячи.

Прибор содержит внутренние источники тепловыделения на корпусе в зонах возбуждения вынужденных колебаний резонатора и датчиков съема выходной информации. Теплоотвод (или теплоизоляция) ВТГ пассивного типа через узлы крепления и свободные поверхности корпуса. Теплоотдача от свободной по-

верхности корпуса в окружающую среду осуществляется свободной конвекцией и излучением. Нижней частью корпус ВТГ прикреплен к основанию, температура которого задана. Основание может иметь хороший тепловой контакт с корпусом ВТГ (для этого контактирующие поверхности плотно прижимаются друг к другу и зона контакта заполняется теплопроводной кремнийорганической пастой), а может и не иметь теплового контакта (например, за счет применения теплоизолирующих прокладок).

Окружающая датчик наружная и внутренняя среда – воздух при определенном давлении, которое может варьироваться в заданном диапазоне. Во внутренних полостях прибора в процессе эксплуатации поддерживается вакуум порядка  $10^{-7} - 10^{-8}$  мм. рт. ст.

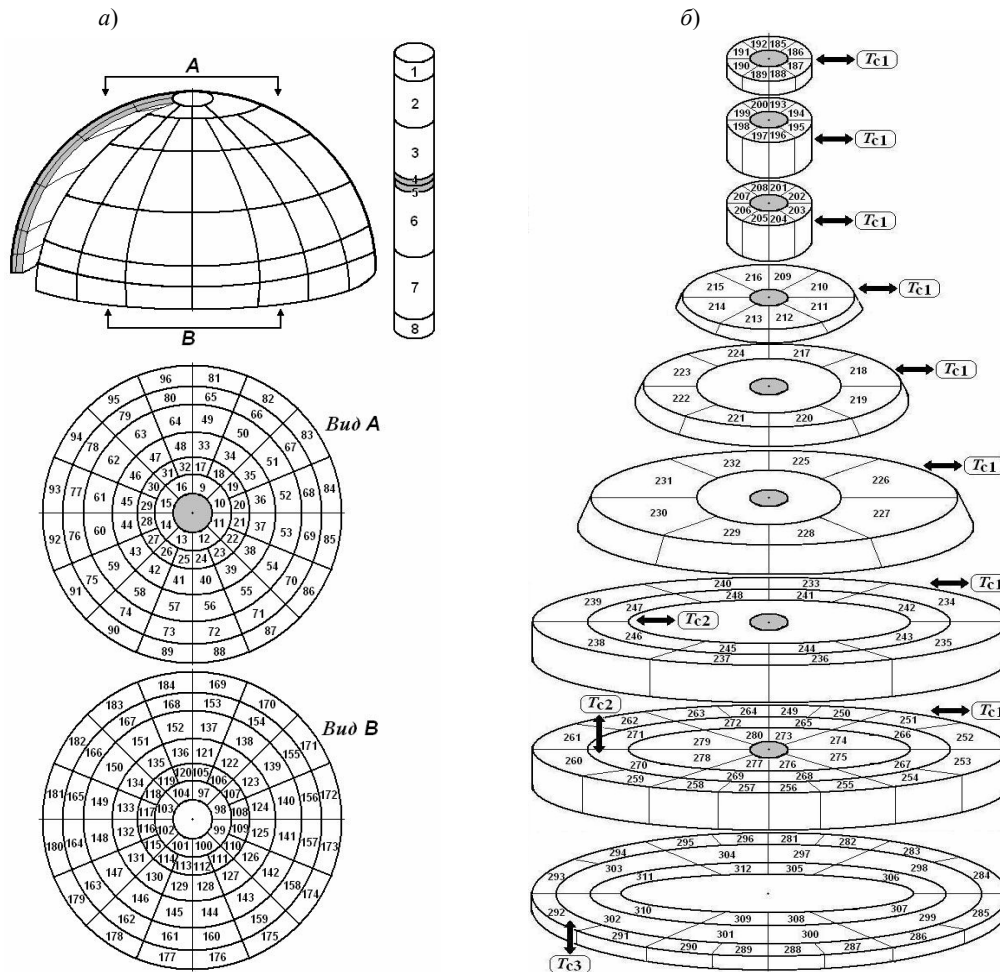


Рис. 2. Тепловая модель ВТГ на основе метода элементарных балансов: ножка и резонатор (объемы 1-8, 9-184) (а); корпус (объемы 185-312) (б);  $T_{C1}$  – температура наружной окружающей среды;  $T_{C2}$  – температура внутренней окружающей среды;  $T_{C3}$  – температура основания;  $\longleftrightarrow$  тепловые связи с окружающей средой

Основной алгоритм расчета температурных полей ВТГ методом элементарных балансов приведен и подробно описан в работе [7].

Реализованный в виде программного комплекса на компьютере основной алгоритм МЭБ составляет основу математической модели тепловых процессов в

рассматриваемом приборе и позволяет определять температурное поле в каждой расчетной точке с течением времени.

По исходным данным (геометрическим, теплофизическим и другим параметрам элементов ВТГ и среды) в программном комплексе производится автоматизированный расчет масс и теплоемкостей элементарных объемов, теплопроводимостей с учетом различных видов теплообмена (кондукция, конвекция и излучение). Также задаются температуры сред и основания, другие необходимые данные, аналогичные ряду приборов авиакосмического и морского приборостроения [7].

Расчет температурных полей с помощью МКЭ проводился с помощью построенных конечно-элементных моделей. Такие модели отдельного резонатора с ножкой и всего ВТГ с адаптивной сеткой, сгенерированные с помощью пакета ANSYS, представлены на рис. 3.

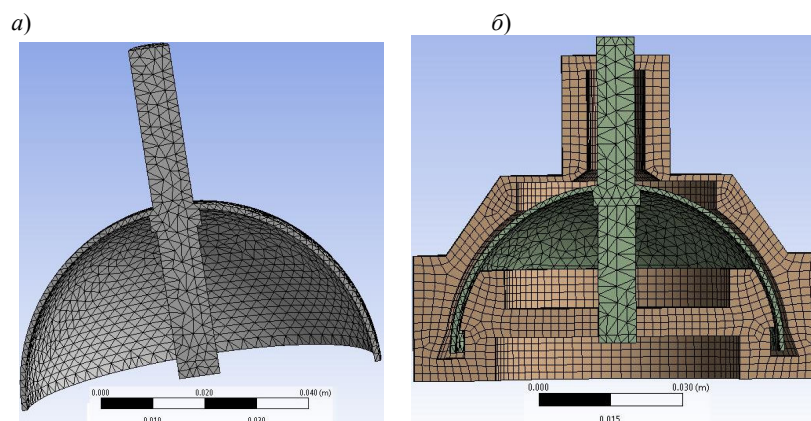


Рис. 3. Конечно-элементные модели ВТГ: резонатор с ножкой (а); резонатор с ножкой в корпусе (б)

Проверка адекватности построенных математических моделей для расчета температурных полей ВТГ проводилась на основе сравнения результатов, полученных методом конечных элементов, с результатами, полученными методом элементарных балансов. При этом в качестве тепловых воздействий использовались ступенчатые изменения температуры окружающей среды  $10\text{--}12^{\circ}\text{C}$  и идентичные (при расчетах МЭБ и МКЭ) условия теплообмена элементов ВТГ с окружающей средой.

Данные такого сравнения температур в различных зонах прибора в момент времени при максимальных температурных градиентах, представлены на рис. 4.

Как показали проведенные сравнительные исследования расчетов температурных полей ВТГ с помощью МЭБ и МКЭ, эти результаты качественно и количественно совпадают, и построенные математические модели тепловых процессов на основе МЭБ и МКЭ можно считать адекватными.

Показанные на рис. 3 конечно-элементные модели ВТГ позволяют также рассчитывать и визуализировать термоупругое напряженно-деформированное состояние (НДС) прибора. Входные параметры этих моделей – геометрические и теплофизические характеристики гироскопа и его элементов, условия их закрепления и тепловые воздействия. Выходными характеристиками системы конечно-элементного анализа являются поля температур, поля деформаций, перемещений и напряжений элементов ВТГ как функций входных параметров гироскопа.

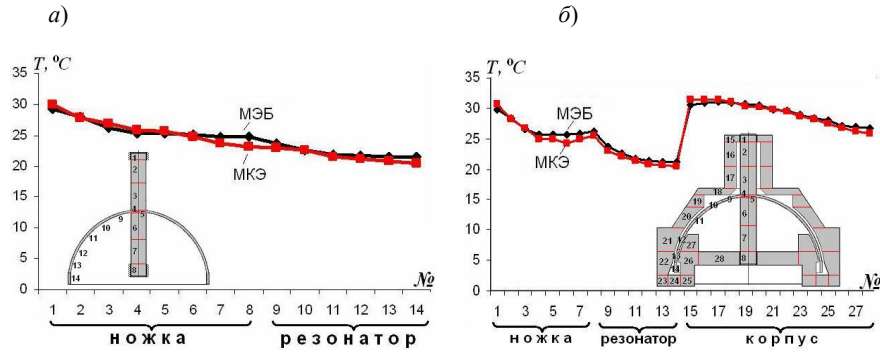


Рис. 4. К проверке адекватности расчета температурных полей методом элементарных балансов (МЭБ) и методом конечных элементов (МКЭ): температуры в резонаторе с ножкой (а); температуры в резонаторе с ножкой в корпусе (б)

Проверка адекватности результатов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) ВТГ методом конечных элементов проводилась на основе сравнения полученных результатов с известными аналитическими решениями задач термоупругости для тонкой полусферической оболочки резонатора, жестко закрепленной в верхней точке купола [7]. Эти результаты различались не более чем на 12%, так что конечно-элементные модели для расчета НДС волнового твердотельного гироскопа можно считать адекватными.

#### Математическая модель температурных и технологических погрешностей волнового твердотельного гироскопа

*Принцип действия* ВТГ основан на свойстве инертности упругих волн, возбужденных в полусферическом кварцевом резонаторе при его вращении вокруг оси симметрии.

Пусть имеем тонкую упругую полусферическую оболочку-резонатор, в которой возбуждены стоячие волны в двух взаимно перпендикулярных направлениях  $X$ ,  $Y$  (рис. 5). Такие стоячие волны характеризуются определенным расположением пучностей ( $E, F, G, H$ ) и узлов ( $A, B, C, D$ ). При вращении резонатора вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\Omega$  узлы и пучности стоячих волн прецессируют относительно резонатора (и инерциального пространства) за счет возникающих сил инерции Кориолиса  $F_k$ , обусловленных относительным движением  $\dot{x}, \dot{y}$  кромки резонатора и переносной угловой скоростью  $\Omega$ .

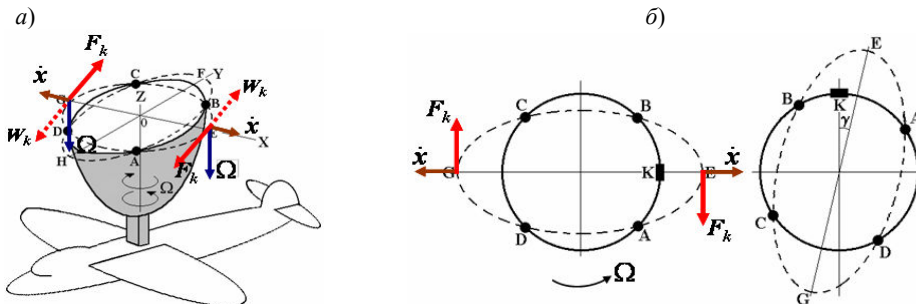


Рис. 5. Стоячая волна в резонаторе (а) и проявление свойства инертности упругой волны (б) при повороте резонатора на  $90^{\circ}$  вокруг оси чувствительности  $Z$

Рассмотрим соответствующую систему «температурно» или «технологическая» возмущенных уравнений ВТГ [1, 2] с учетом диссипативных сил и управляющих гармонических сил при измеряемой угловой скорости  $\Omega = \text{const}$ :

$$\ddot{x} + \mu_* \dot{x} + \omega^2 (x + x_T) + 2\eta\Omega\dot{y} = F \sin \lambda t, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \mu_* \dot{y} + \omega^2 (y + y_T) - 2\eta\Omega\dot{x} = F \cos \lambda t, \quad (2)$$

$$\gamma(t) = -\frac{1}{2(1-\nu)k^2} [2 + \nu - \sqrt{(2 + \nu)^2 + 4(1 - \nu)k^2}] \Omega t, \quad (3)$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – перемещения кромки резонатора по измерительным осям системы съема информации в системе координат  $Oxy$ , связанной с корпусом ВТГ;  $\mu_* = \mu + \mu_T$  – коэффициент демпфирования;  $\mu$  – номинальное значение;  $\mu_T$  и  $\lambda_T$  – «температурная» или «технологическая» составляющие;  $\omega = \lambda + \lambda_T$  – частота колебаний;  $\lambda$  – номинальное значение резонансной частоты;  $x_T$ ,  $y_T$  – «температурные» или «технологические» смещения кромки резонатора;  $2\eta\Omega\dot{y}$ ,  $2\eta\Omega\dot{x}$  – силы Кориолиса;  $\eta$  – безразмерный коэффициент, учитывающий массовые и геометрические характеристики резонатора;  $\gamma(t)$  – угол поворота стоячей волны относительно резонатора;  $F$  – амплитуда управляющих гармонических сил;  $k=2$  – номер формы колебаний;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\Omega t$  – угол поворота корпуса ВТГ.

Индекс «Т» у параметров и переменных системы (1)-(3) означает «температурная» (обусловленная температурными возмущениями) или «технологическая» (обусловленная технологическими несовершенствами) постоянные добавки к номинальному значению.

Задачи исследования температурных и технологических погрешностей ВТГ связаны с изучением математической модели (1)-(3). В случае исследования влияния температурных воздействий на точность датчика (температурный дрейф) необходимо согласно [7] получить соответствующие данные о значениях параметров с индексом «Т» на основе, например, изучения математических моделей тепловых процессов и построенных конечно-элементных моделей ВТГ.

В случае изучения влияния технологических изменений параметров датчика на его точность (технологический дрейф) значения этих параметров задаются как исходные данные в виде системы допусков со своими знаками на номинальные значения параметров.

Применим разработанную для микромеханических гироскопов методику для качественных и количественных оценок температурного или технологического дрейфа ВТГ на основе уравнений (1), (2) [7]. Для ВТГ на неподвижном основании ( $\Omega=0$ ) и при наличии температурных или технологических погрешностей («Т»  $\neq 0$ ) можно записать:

$$\sum F_{xT} = \ddot{x} + (\mu + \mu_T) \dot{x} + (\lambda + \lambda_T)^2 (x + x_T) - F \sin \lambda t; \quad (4)$$

$$\sum F_{yT} = \ddot{y} + (\mu + \mu_T) \dot{y} + (\lambda + \lambda_T)^2 (y + y_T) - F \cos \lambda t.$$

Для ВТГ на подвижном основании ( $\Omega = \text{const} \neq 0$ ) и отсутствии температурных или технологических погрешностей («Т»=0) запишем:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \ddot{x} + \mu \dot{x} + \lambda^2 x + 2\eta\Omega\dot{y} - F \sin \lambda t, \\ \sum F_y &= \ddot{y} + \mu \dot{y} + \lambda^2 y - 2\eta\Omega\dot{x} - F \cos \lambda t. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравнявая (4) и (5) и допуская получившееся уравнение относительно  $\Omega$ , как это делалось в работе [7], получаем следующие выражения для приближенной оценки угловой скорости температурного или технологического дрейфа ВТГ:

$$\Omega_{xdr} \approx \frac{\sqrt{\mu^2/\eta^2 + \Omega^2}}{2F} (\mu_T \dot{x}(t) + 2\lambda_T \lambda x(t) + x_T \lambda^2); \quad (6)$$

$$\Omega_{ydr} \approx -\frac{\sqrt{\mu^2/\eta^2 + \Omega^2}}{2F} (\mu_T \dot{y}(t) + 2\lambda_T \lambda y(t) + y_T \lambda^2).$$

Формулы (6) получены с учетом приближенного значения для амплитуд скоростей вынужденных колебаний  $A_{\dot{x}} = A_{\dot{y}} = F/\sqrt{\mu^2 + 4\eta^2\Omega^2}$ .

*Качественный анализ* полученных выражений (6) показывает следующее:

первые два слагаемых в (6) определяют «переменные» составляющие дрейфа за счет температурных или технологических отклонений коэффициентов демпфирования  $\mu_T$  и резонансной частоты  $\lambda_T$  от номинальных значений;

последние слагаемые в (6) – это «постоянные» составляющие дрейфа, определяемые температурными или технологическими изменениями  $x_T$ ,  $y_T$  формы резонатора в плоскости стоячей волны;

при сравнительно большой добротности резонатора ( $\mu/\eta \ll \Omega$ ) дрейф ВТГ, определяемый температурными или технологическими изменениями  $x_T$ ,  $y_T$  формы резонатора, прямо пропорционален измеряемой угловой скорости, пропорционален квадрату резонансной частоты и обратно пропорционален амплитуде управляющих сил:  $\Omega_{xdr} \sim \Omega \lambda^2 x_T/F$ ,  $\Omega_{ydr} \sim \Omega \lambda^2 y_T/F$ ;

при сравнительно малой добротности резонатора ( $\mu/\eta \gg \Omega$ ) дрейф ВТГ, определяемый изменениями  $x_T$ ,  $y_T$  формы резонатора, не зависит от измеряемой угловой скорости, прямо пропорционален коэффициенту демпфирования, пропорционален квадрату резонансной частоты и обратно пропорционален амплитуде управляющих сил и силам Кориолиса:  $\Omega_{xdr} \sim \mu \lambda^2 x_T/(F\eta)$ ,  $\Omega_{ydr} \sim \mu \lambda^2 y_T/(F\eta)$ ;

зависимость угловой скорости дрейфа от температурных или технологических погрешностей коэффициента демпфирования  $\mu_T$  и частоты колебаний  $\lambda_T$  носят более сложный характер, поскольку дрейф зависит от  $\dot{x}$ ,  $x$ ,  $\dot{y}$ ,  $y$  и определяется выражениями (6).

Для *количественной оценки* температурных и технологических погрешностей ВТГ будем искать частное решение возмущенной системы уравнений (1), (2), определяющее вынужденные колебания для микромеханических гироскопов [7], в виде:

$$\begin{aligned} x &= D_0 + D_1 \cos \lambda t + D_2 \sin \lambda t; \\ y &= E_0 + E_1 \cos \lambda t + E_2 \sin \lambda t, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $D_0, D_1, D_2$ ,  $E_0, E_1, E_2$  – постоянные, которые надо определить.

Подставляя (7) и вычисленные производные  $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$  в (1), (2), получаем систему алгебраических уравнений для  $D_0, D_1, D_2$ ,  $E_0, E_1, E_2$  при наличии температурных или технологических погрешностей  $\mu_T \neq 0$ ,  $\lambda_T \neq 0$ ,  $x_T \neq 0$ ,  $y_T \neq 0$ :

$$\begin{cases} (\omega^2 - \lambda^2)D_1 + \mu_*\lambda D_2 + 2\eta\Omega\lambda E_2 = 0, \\ (\omega^2 - \lambda^2)D_2 - \mu_*\lambda D_1 - 2\eta\Omega\lambda E_1 = F, \\ (\omega^2 - \lambda^2)E_1 + \mu_*\lambda E_2 - 2\eta\Omega\lambda D_2 = F, \\ (\omega^2 - \lambda^2)E_2 - \mu_*\lambda E_1 + 2\eta\Omega\lambda D_1 = 0, \\ D_0 = -x_T, \quad E_0 = -y_T. \end{cases} \quad (8)$$

При отсутствии температурных или технологических погрешностей  $\mu_T = 0$ ,  $\lambda_T = 0$ ,  $x_T = 0$ ,  $y_T = 0$ , т.е.  $\omega = \lambda$ ,  $\mu_* = \mu$  («идеальный» ВТГ) имеем более простую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \mu D_2 + 2\eta\Omega E_2 = 0, \\ \mu\lambda D_1 + 2\eta\Omega\lambda E_1 = -F, \\ \mu\lambda E_2 - 2\eta\Omega\lambda D_2 = F, \\ \mu_* E_1 - 2\eta\Omega D_1 = 0, \\ D_0 = 0, \quad E_0 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решая систему уравнений (9) и (8), получаем с учетом (7) следующие формулы для вынужденных колебаний «идеального» (без погрешностей) ВТГ и ВТГ с температурными или технологическими погрешностями:

$$x = A \sin(\lambda t + \delta), \quad y = A \sin(\lambda t + \varepsilon), \quad (10)$$

$$x = A_T \sin(\lambda t + \delta_T) - x_T, \quad y = A_T \sin(\lambda t + \varepsilon_T) - y_T, \quad (11)$$

где амплитуды и фазы вынужденных колебаний имеют вид:

$$A = \frac{F}{\lambda \sqrt{\mu^2 + 4\eta^2 \Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu}{2\eta\Omega}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{2\eta\Omega}{\mu}.$$

$$A_T = \sqrt{D_T^2 + E_T^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_T = \frac{D_T}{E_T}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_T = -\frac{E_T}{D_T}, \quad D_T = \Delta_1 / \Delta, \quad E_T = \Delta_2 / \Delta,$$

$$\Delta = a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2 + b^4 - 2b^2 + 1, \quad \Delta_1 = -\frac{F(a^3 + ab^2 + 2ab + a)}{\omega^2 - \lambda^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{F(-a^2b + a^2 - b^3 - b^2 + b + 1)}{\omega^2 - \lambda^2}, \quad a = \frac{(\mu + \mu_T)\lambda}{\omega^2 - \lambda^2}, \quad b = \frac{2\eta\Omega\lambda}{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Как видим из (10), амплитуда вынужденных колебаний резонатора зависит от измеряемой угловой скорости  $\Omega$  в соответствующем диапазоне измеряемых угловых скоростей. С увеличением  $\Omega$  амплитуда вынужденных колебаний уменьшается, происходит «отставание» стоячей волны от движения резонатора.

На основании выражений (10), (11) будем иметь формулы для количественной оценки погрешностей ВТГ по амплитуде (в процентах) и фазе (в угловых градусах):

$$\begin{aligned} p_{xA} &= \frac{A - A_T + x_T}{A} 100\%, \\ p_{yA} &= \frac{A - A_T + y_T}{A} 100\%, \\ p_\delta &= \delta_T - \delta, \quad p_\varepsilon = \varepsilon_T - \varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

Для получения количественных оценок параметров дрейфа ВТГ численно интегрируется система возмущенных уравнений (1), (2) и используются формулы (6), (10)–(12).

Таким образом, построенные связанные математические модели, адекватные реальным физическим процессам, протекающим в ВТГ, позволяют решать поставленные задачи.

### Компьютерные эксперименты и анализ полученных результатов

При проведении компьютерных экспериментов рассматривался ВТГ со средним радиусом полусферической кварцевой оболочки-резонатора  $r_0 = 0,035$  м; теплопроводностью кварца  $1,36$  Вт/(м $^{\circ}$ С); плотностью материала  $2210$  кг/м $^3$ ; коэффициентом температурного линейного расширения  $\alpha_T = 2 \cdot 10^{-7}$   $^{\circ}$ С $^{-1}$ ; толщиной резонатора  $2h = 10^{-3}$  м; коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,17$ ; модулем Юнга  $E = 20$  ГПа и др. [3, 7].

Система терморегулирования прибора отсутствует.

На первом этапе рассчитывались температурные поля, поля деформаций и напряжений резонатора с жестко закрепленной на концах ножкой крепления (конечно-элементная модель показана на рис. 3, а).

Эту математическую модель резонатора с ножкой будем считать моделью первого приближения.

Тепловое воздействие на резонатор моделировалось следующим образом.

Начальная температура резонатора  $T_0 = 20^{\circ}$ С. Температура внешнего основания (наружный кварцевый корпус 2 ВТГ, см. рис. 1) задана и равна  $T_{\text{осн}} = 30^{\circ}$ С. Внутренние источники тепла не учитываются. Теплообмен резонатора с внешним основанием осуществляется только через верхнюю часть ножки крепления, имеющей тепловой контакт с корпусом 2. Остальная поверхность резонатора и ножки теплоизолирована от окружающей среды.

Деформированное термоупругое состояние резонатора, представлено на рис. 6. Недеформированное состояние резонатора показано черными линиями.

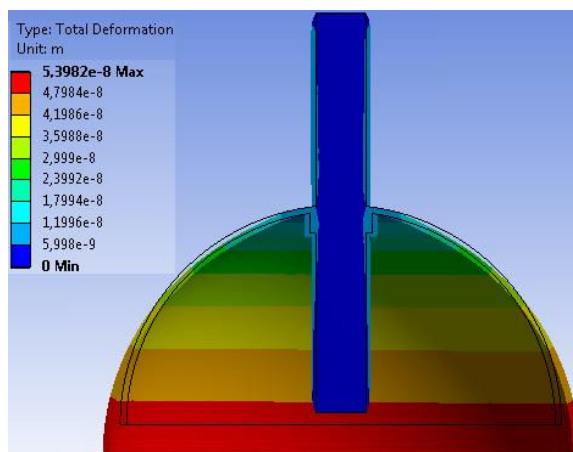


Рис. 6. Деформированное термоупругое состояние резонатора с ножкой

Максимальные термоупругие деформации на кромке резонатора составляют  $0,054$  мкм при температурных перепадах вдоль оси симметрии резонатора  $\approx 6^{\circ}$ С. Максимальные напряжения достигают  $350$  Па в местах крепления ножки резонатора. Термоупругие напряжения в резонаторе существенно меньше.

На втором этапе рассчитывались температурные поля, поля деформаций и напряжений всего ВТГ, содержащего резонатор с ножкой, закрепленный в кварцевом корпусе ВТГ (конечно-элементные модели показаны на рис. 3, б).

Эту математическую модель ВТГ полагаем моделью *второго приближения*, как более точно соответствующую реальному прибору и протекающим в нем процессам.

Тепловое воздействие на ВТГ моделировалось следующим образом.

ВТГ по нижней плоскости корпуса 3 жестко закреплен на основании и теплоизолирован от него. Начальная температура всего ВТГ  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Температура окружающей среды задана и равна  $T_c = 32^\circ\text{C}$ . Теплообмен ВТГ с окружающей средой осуществляется свободной конвекцией в поле сил тяжести при нормальном давлении и излучением через наружную поверхность корпуса.

Деформированное термоупругое состояние всего ВТГ для моделируемого нагрева от окружающей среды представлено на рис. 7; недеформированное состояние ВТГ показано на рис. 7 черными линиями.

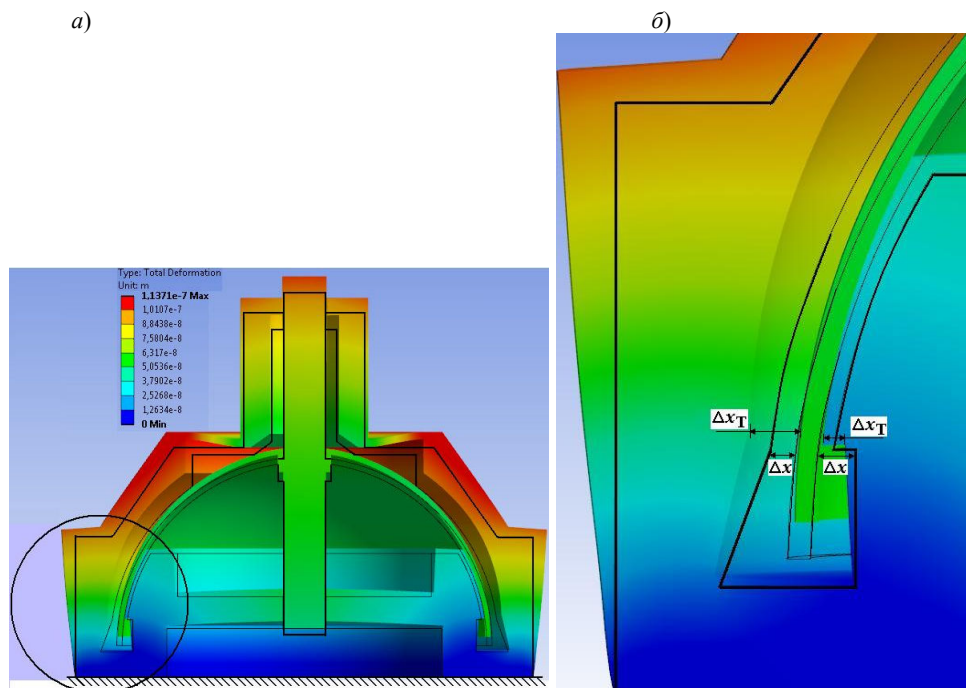


Рис. 7. Деформированное термоупругое состояние всего ВТГ (а) и увеличенный фрагмент (б):  
 $\Delta x$  - базовые значения зазоров между резонатором и корпусами;  
 $\Delta x_T$  - зазоры, обусловленные температурными деформациями

Как видим, максимальные термоупругие деформации в ВТГ имеют место на наружном корпусе 2 и составляют 0,114 мкм. Термоупругие деформации на кромке резонатора составляют 0,056 мкм при температурных перепадах вдоль оси симметрии резонатора  $\approx 3^\circ\text{C}$ .

Особо необходимо отметить, что при совместных температурных деформациях всего ВТГ происходят существенные относительные изменения (почти в 2 раза) зазоров  $\Delta x_T$  по сравнению с базовыми значениями  $\Delta x$ , (рис. 7, б) между поверхностью резонатора и корпусами 2, 3.

Такие изменения в системе емкостного съема информации могут привести к погрешностям прибора и их необходимо учитывать.

Максимальные напряжения достигают 382 Па в местах крепления ножки ВТГ к основанию. Термоупругие напряжения в полусферическом резонаторе незначительны, как и в модели первого приближения.

На данном этапе исследовалось и влияние на тепловые процессы в ВТГ наличия внутренних источников тепла. Такие исследования проведены для *экстремального* теплового режима нагрева гироскопа от внутренних источников тепла, когда прибор находится в невесомости и вакууме и его корпус теплоизолирован от основания. Внутренние полости датчика также вакуумированы.

В этом случае теплоотдача в окружающую среду минимальна и осуществляется только излучением.

Полагалось, что суммарная мощность внутренних источников тепла, распределенных в объемах корпуса ВТГ 249-264 и 265-272 расположения систем возбуждения колебаний резонатора и датчиков съема выходной информации,  $\leq 1$  Вт. Начальная температура ВТГ и температура окружающей среды приняты равными  $20^\circ\text{C}$ .

Нестационарные тепловые процессы и топограмма температурного поля в осевом сечении ВТГ представлены на рис. 8.

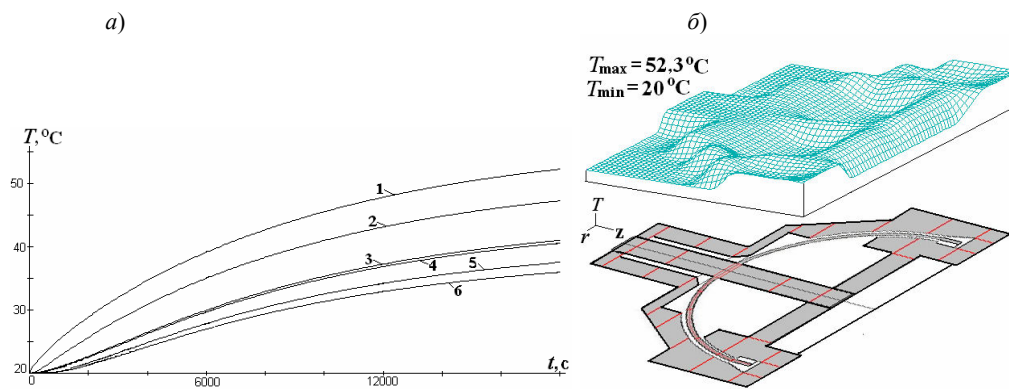


Рис. 8. Нестационарные тепловые процессы (а) и температурное поле ВТГ на 300 мин (б) в экстремальных условиях вакуума, невесомости и теплоизоляции корпуса от основания, при наличии внутренних источников тепла суммарной мощности 1 Вт:

1 - зона источника тепла на корпусе (объем 264); 2 - зона нижней части ножки (объем 8); 3, 4, 5, 6 - зоны резонатора (объемы 89,73,41,25)

Как видим, экстремальные условия вакуума и невесомости в сочетании с теплоизоляцией корпуса ВТГ от основания при наличии внутренних источников тепла даже малой мощности приводят к *недопустимым* внутренним градиентам температур и перегревам прибора над окружающей средой в десятки градусов и значительному увеличению времени переходных тепловых процессов.

Полученные результаты исследования температурных и деформационных полей ВТГ и задание полей допусков на параметры прибора на базе построенных математических моделей (1), (2), (6), (10)–(12) дрейфа позволяют количественно оценить температурные и технологические погрешности ВТГ.

Примем следующие основные задаваемые и варьируемые исходные данные «температурно» или «технологически» возмущенных уравнений ВТГ (1), (2):

$$F=10^4 \text{ м/с}^2, \lambda=17584 \text{ с}^{-1}, \eta=10^3, \mu=0 \div 10^4 \text{ с}^{-1}, \Omega = 0, 25 \div 4 \text{ с}^{-1}.$$

Рассмотрим «идеальный» ВТГ (без технологических и температурных погрешностей,  $\lambda_T = 0$ ,  $\mu_T = 0$ ,  $x_T = 0$ ,  $y_T = 0$ ).

Путем численного интегрирования системы уравнений (1), (2) исследуем, как коэффициент демпфирования  $\mu$  влияет на амплитуду  $A$  вынужденных колебаний резонатора при различных значениях измеряемой угловой скорости  $\Omega$ .

Результаты представлены на рис. 9.

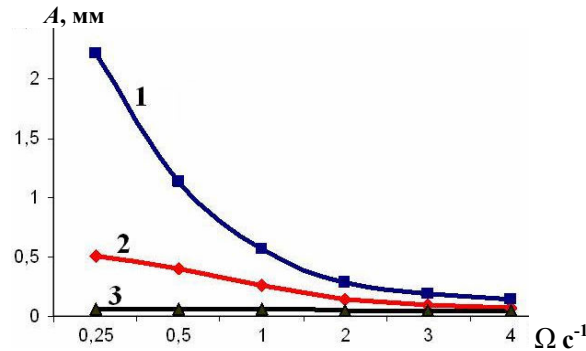


Рис. 9. Влияние коэффициента демпфирования на амплитуду вынужденных колебаний резонатора «идеального» ВТГ: 1)  $\mu=0 \text{ с}^{-1}$ ; 2)  $\mu=10^3 \text{ с}^{-1}$ ; 3)  $\mu=10^4 \text{ с}^{-1}$

Как видим, при  $\mu = 0$  (максимально высокая добротность резонатора) амплитуда вынужденных колебаний нелинейно зависит от измеряемой угловой скорости в рассматриваемом диапазоне. При  $\mu=10^4 \text{ с}^{-1}$  (низкая добротность резонатора) амплитуда вынужденных колебаний практически не зависит от измеряемой угловой скорости. При  $\mu=10^3 \text{ с}^{-1}$  имеет место наиболее близкая к линейной зависимость амплитуды вынужденных колебаний от  $\Omega$ .

Для количественных оценок технологических погрешностей резонансной частоты и коэффициента демпфирования путем численного интегрирования уравнений (1), (2) или применения формул (10)–(12) для относительных погрешностей примем следующие задаваемые и варьируемые исходные данные в соответствии полученными результатами, показанными на рис. 10:  $F=10^4 \text{ м/с}^2$ ;  $\lambda=17584 \text{ с}^{-1}$ ;  $\eta=10^3$ ;  $\mu=10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $\Omega = 0,25 \div 4 \text{ с}^{-1}$ ;  $x_T = y_T = 0$ .

Результаты исследования влияния технологических погрешностей  $\lambda_T$  резонансной частоты и технологических погрешностей  $\mu_T$  коэффициента демпфирования  $\mu$  на амплитуду  $A$  вынужденных колебаний резонатора при различных значениях измеряемой угловой скорости  $\Omega$ , представлены на рис. 10.

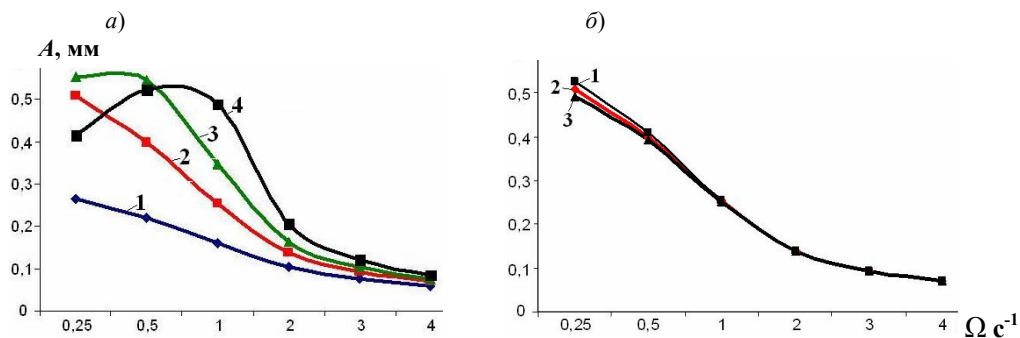


Рис. 10. Влияние технологических погрешностей  $\lambda_T$  резонансной частоты (а):

1)  $\lambda_T = -4\%$ ; 2)  $\lambda_T = 0$ ; 3)  $\lambda_T = 2\%$ ; 4)  $\lambda_T = 4\%$ ;

и технологических погрешностей  $\mu_T$  коэффициента демпфирования (б)

на амплитуду  $A$  вынужденных колебаний резонатора:

1)  $\mu_T = -4\%$ ; 2)  $\mu_T = 0$ ; 3)  $\mu_T = 4\%$

Технологические относительные погрешности ВТГ по амплитуде  $p_A = p_{xA} = p_{yA} = 100\% (A - A_T)/A$  (%) и по фазе  $p_\delta = \delta_T - \delta$  (угл. град), рассчитанные на основе формул (10)–(12), показаны в виде топограмм на рис. 11.

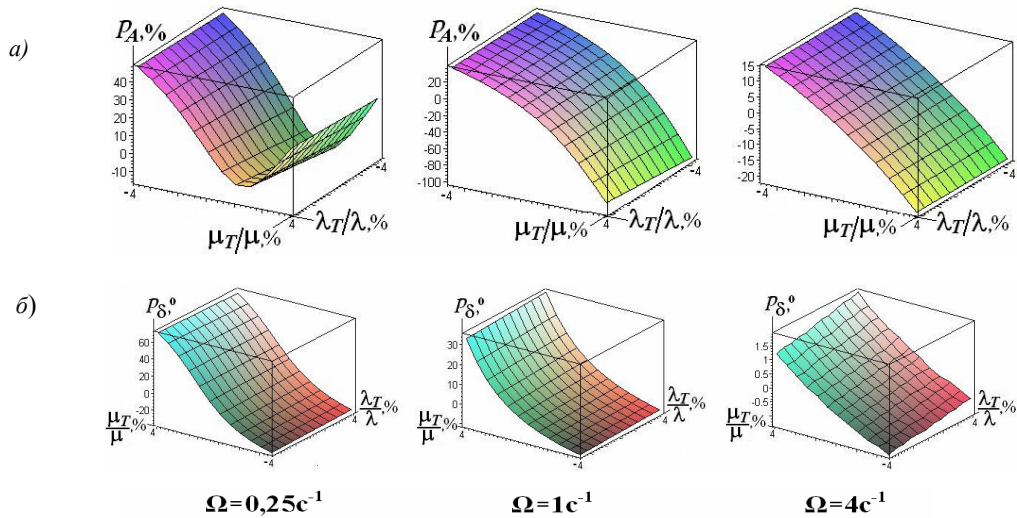


Рис. 11. Относительные технологические погрешности ВТГ по амплитуде  $p_A$  (а) и по фазе  $p_\delta$  (б) при различных измеряемых угловых скоростях  $\Omega$

Как видим, ВТГ *весьма чувствителен* к изменениям резонансной частоты колебаний  $\lambda$  относительно ее номинального значения. Например, *увеличение*  $\lambda$  всего на 2–4% (кривые 3, 4 на рис. 10, а) приводит к значительным нелинейным изменениям зависимостей амплитуды вынужденных колебаний резонатора от измеряемой угловой скорости, особенно при малых измеряемых угловых скоростях в рассматриваемом диапазоне  $\Omega = 0,25\text{--}4 \text{ c}^{-1}$ .

Относительные погрешности по амплитуде  $p_A$  могут достигать почти 100% (см. рис. 11, а). Погрешности по фазе  $p_\delta$  также значительны и составляют десятки угловых градусов (см. рис. 11, б).

Эти эффекты объясняются тем, что при малых  $\Omega$  силы инерции Кориолиса в (1), (2) тоже становятся малыми, что в сочетании с резонансной расстройкой системы приводит к значительному возрастанию погрешностей.

Вместе с тем, как показали компьютерные эксперименты, ВТГ *мало чувствителен* к изменениям коэффициента демпфирования относительно его номинального значения в рассматриваемом диапазоне (кривые 1, 3 на рис. 10, б).

Важными являются количественные оценки постоянной составляющей угловой скорости температурного или технологического дрейфа гироскопа в соответствии с полученными результатами конечно-элементного анализа и формулами (6) для угловой скорости дрейфа ВТГ.

Для проведения таких оценок выбраны следующие исходные данные:  $F=10^4 \text{ м/с}^2$ ;  $\lambda=17584 \text{ c}^{-1}$ ;  $\eta=10^3$ ;  $\mu=0\text{--}10^4 \text{ c}^{-1}$ ;  $\Omega=0,125\text{--}16 \text{ c}^{-1}$ ;  $x_T=y_T=0,01\text{--}1 \text{ мкм}$ ;  $\lambda_T=0$ ;  $\mu_T=0$ .

Рассчитанные по формулам (6) зависимости относительной угловой скорости дрейфа  $\Omega_{dr}/\Omega$  от измеряемой угловой скорости  $\Omega$  при наличии геометрических изменений формы резонатора (принято  $x_T=y_T=1 \text{ мкм}$ ) и при различных коэффициентах демпфирования представлены на рис. 12.

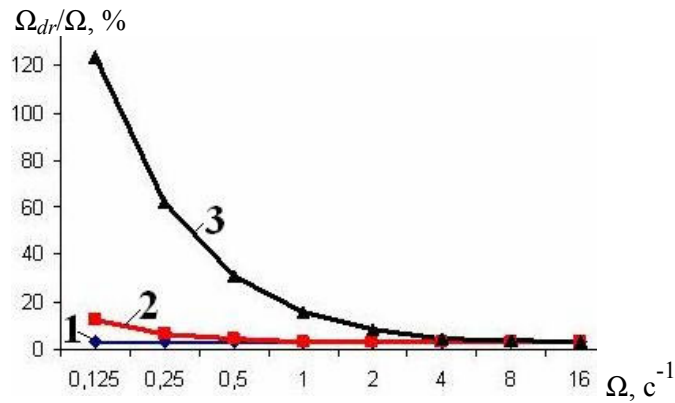


Рис. 12. Зависимости относительной угловой скорости дрейфа  $\Omega_{dr}/\Omega$  от измеряемой угловой скорости  $\Omega$ , при геометрических изменениях формы резонатора ( $x_T = y_T = 1$  мкм) и при различных коэффициентах демпфирования: 1)  $\mu=0$  с<sup>-1</sup>; 2)  $\mu=10^3$  с<sup>-1</sup>; 3)  $\mu=10^4$  с<sup>-1</sup>

Как видим, при  $\mu = 0$  (максимально высокая добротность резонатора) относительная угловая скорость  $\Omega_{dr}/\Omega$  температурного или технологического дрейфа ВТГ *практически не зависит* от измеряемой угловой скорости, что полностью подтверждает ранее полученную качественную оценку  $\Omega_{dr}/\Omega \sim \lambda^2 x_T/F$ .

При рассматриваемых параметрах гироскопа и геометрических изменениях формы резонатора на уровне 1 мкм относительная угловая скорость дрейфа  $\Omega_{dr}/\Omega \approx 3\%$ .

При  $\mu = 10^4$  с<sup>-1</sup> относительная угловая скорость  $\Omega_{dr}/\Omega$  температурного или технологического дрейфа ВТГ *нелинейно зависит* от измеряемой угловой скорости, достигая максимальных значений в десятки процентов при малых измеряемых угловых скоростях в рассматриваемом диапазоне  $\Omega=0,125\text{--}16$  с<sup>-1</sup>.

### Заключение

Проведенный на базе построенных математических моделей анализ позволил *выявить наиболее важные* факторы, влияющие на точность и эффективное функционирование прецизионного волнового твердотельного гироскопа и выработать определенные рекомендации.

1. Необходимо обеспечить достаточно точное (доли процентов) поддержание резонансной частоты вынужденных колебаний. При этом необходимо учитывать, что наибольшее влияние на амплитуду вынужденных колебаний резонатора оказывают отклонения частоты в сторону увеличения.

2. Наличие внутренних источников тепла даже незначительной мощности в экстремальных условиях эксплуатации (вакуум и невесомость в сочетании с теплоизоляцией корпуса ВТГ от основания) *может привести к недопустимым* внутренним градиентам температур и перегревам прибора над окружающей средой в десятки градусов и в конечном итоге к неработоспособности прибора.

3. Необходимо предусмотреть меры по обеспечению термоинвариантности ВТГ и минимизации температурных деформаций основных элементов ВТГ. Эти меры могут быть как *пассивного* (модернизация конструкции в целях оптимизации условий теплообмена с окружающей средой и внутри прибора), так и *активного* характера (создание систем терморегулирования, например, реверсив-

ного типа на модулях Пельтье, алгоритмическая компенсация температурных погрешностей с установкой термодатчиков и оптимизацией их расположения в приборе и др.).

Применение таких мер позволит, по мнению авторов, создать прецизионный волновой твердотельный гироскоп с инерциальными точностями на высоком уровне.

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту 08-08-00084а.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Журавлев, В.Ф.** Волновой твердотельный гироскоп / В.Ф.Журавлев, Д.М. Климов - М.: Наука, 1985.- 126 с.
2. **Журавлев, В.Ф.** Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. // Механика твердого тела.- 1997.- № 6.- С.27-35.
3. **Джанджгава, Г.И.** Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа / Г.И.Джанджгава [и др.] // XIV С.-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам.- С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор» 2007.- С. 116-125.
4. **Жбанов, Ю.К.** Самонастраивающийся контур подавления квадратуры в волновом твердотельном гироскопе // XIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам.- С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор».- 2006.- С. 240-241.
5. **Донник, А.С.** Влияние поступательной вибрации основания на динамику волнового твердотельного гироскопа / А.С.Донник, И.В.Меркурьев, В.В.Подалков // XIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам.- С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор» 2006.- С. 242-245.
6. **Гавриленко, А.Б.** Алгоритмы управления колебаниями резонатора волнового твердотельного гироскопа / А.Б.Гавриленко, И.В.Меркурьев, В.В.Подалков // Юбилейная XV С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. - С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор».- 2008. - С. 34-36.
7. **Джашитов, В.Э.** Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий / В.Э.Джашитов, В.М.Панкратов / Под общ. ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова.- С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. - 404 с.
8. **Матвеев, В.А.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа / В.А.Матвеев, В.И.Липатников, А.В.Алехин. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. -1997.
9. **Басараб, М.А.** Методы моделирования и цифровой обработки сигналов в гироскопии / М.А.Басараб, В.Ф.Кравченко, В.А.Матвеев. - М.: Физматлит, 2007.
10. **Матвеев, В.А.** Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах / В.А.Матвеев, Б.С.Лунин, М.А.Басараб. - М.: Физматлит, 2008.

Материал поступил 13.08.09