

МИХАИЛ ШАТАЛОВ, ШАРЛОТТА КЕТЦЕ, СТЕФАН ВИКТОР ДЖУБЕРТ

## ДИНАМИКА НЕИДЕАЛЬНОГО ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

*Для поддержания амплитуды вибрирующей структуры в волновых твердотельных гироскопах (ВТГ) при эксплуатации в режиме измерения полного угла обычно используется параметрическое управление с использованием электродов. Достаточно известно, что при неравномерности зазоров между резонатором и электродами возникает дрейф вибрирующей структуры. Этот дрейф аналогичен уходу гироскопа, вызванному дефектами демпфирующих характеристик, что значительно снижает качество ВТГ. В статье рассматриваются методы компенсации этих дрейфов путем специального управления вибрирующей структурой с использованием параметрического управления отдельными электродами. Компенсация дрейфов достигается посредством управления амплитудами и фазами напряжения на отдельных электродах. Обсуждается побочный эффект этого управления, заключающийся в фиктивном расщеплении частот вибрирующей структуры.*

### Введение

Основы работы вибрационных гироскопов приведены в статьях [1, 2]. Принципы работы волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) с электрическими цепями объясняются в статье [3]. Метод подавления квадратурного сигнала описан в статье [4]. В работе [5] рассмотрена общая идеология компенсации разности коэффициентов демпфирования. В настоящей статье приведен подробный анализ электромеханической модели гироскопа и показано, что функции амплитудной стабилизации и компенсации как квадратурной составляющей, так и расхождения коэффициента добротности могут быть реализованы посредством соответствующего параметрического управления отдельными электродами.

### Модель тонкостенного резонатора

Предположим, что резонатор в виде тонкой полусферической оболочки с неподвижным полюсом подвергается одновременно вибрации и вращению вокруг своей оси симметрии. Угловая скорость вращения в инерциальном про-

---

**Шаталов Михаил.** Профессор Технологического университета Цване (г. Претория, Южная Африка).

**Кетце Шарлотта** Начальник Департамента математики и статистики Технологического университета Цване.

**Джуберт Стефан Виктор.** Доктор математических наук, профессор Технологического университета Цване.

Статья по докладу на XVI С.-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам.

странстве значительно меньше нижнего значения собственной угловой скорости резонатора ( $\Omega \ll \omega_{\min}$ ). В этом случае все динамические воздействия, пропорциональные квадрату инерциальной угловой скорости ( $\Omega^2 \approx 0$ ), такие как центробежные силы, можно не принимать во внимание. Радиус срединной поверхности  $R$  и толщина оболочки  $h$  считаются постоянными. Координаты каждой точки срединной поверхности оболочки могут быть определены с помощью углов  $\varphi$  и  $\theta$ . Считаем, что массовая плотность ( $\rho$ ) оболочки непостоянна, и для упрощения предположим, что она представляет собой функцию полярного угла  $\varphi$

$$\rho(\varphi) = \rho_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{nc} \cos n\varphi + \rho_{ns} \sin n\varphi) \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ).

Аналогичное допущение сделаем для распределения коэффициентов демпфирования ( $d$ ):

$$d(\varphi) = d_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (d_{nc} \cos n\varphi + d_{ns} \sin n\varphi). \quad (2)$$

Предположим, что поддерживаются заданные колебания, соответствующие собственной форме колебаний стоячей волны  $m$ , при этом перемещения в направлениях радиальном, азимутальном и угла наклона выражаются соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} u_m(t, \theta, \varphi) &= X_m(\theta) [a(t) \cos m\varphi + b(t) \sin m\varphi]; \\ v_m(t, \theta, \varphi) &= Y_m(\theta) [-a(t) \sin m\varphi + b(t) \cos m\varphi]; \\ w_m(t, \theta, \varphi) &= Z_m(\theta) [a(t) \cos m\varphi + b(t) \sin m\varphi], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $X_m(\theta)$ ,  $Y_m(\theta)$ ,  $Z_m(\theta)$  – функции Релея, определяющие собственные формы колебаний нерастяжимой оболочки:

$$X = X_m(\theta) = -\sin \theta \tan^m \left( \frac{\theta}{2} \right), Y = Y_m(\theta) = \sin \theta \tan^m \left( \frac{\theta}{2} \right), Z = Z_m(\theta) = (m + \cos \theta) \tan^m \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (4)$$

Предполагается, что вибрация происходит вблизи одного из значений собственных частот ( $\omega$ ), соответствующего числу  $m$ , и что для поддержания амплитуды вибраций используется параметрическое возбуждение.

Амплитуда вибраций оболочки поддерживается посредством энергии, передаваемой через электрическое поле в зазорах между оболочкой и системой отдельных электродов, окружающих оболочку. Зазоры между оболочкой и электродами постоянны и равны  $\Delta$ .

Между оболочкой и электродами существует постоянная разность электрических потенциалов, а напряжение возбуждения имеет форму меандра и меня-

ется с двойной частотой колебаний резонатора. С помощью изобретения такого управления достигается эффект параметрического резонансного возбуждения.

### Кинетическая, потенциальная и электрическая энергии системы

Кинетическая энергия оболочки задается формулами:

$$\begin{aligned}
 T^{(shell)} &= \frac{hR^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho(\varphi) V^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\
 &\left\{ \frac{\pi \rho_0 h R^2}{2} \int_0^{\pi/2} [X_m^2(\theta) + Y_m^2(\theta) + Z_m^2(\theta)] \sin \theta d\theta \right\} [\dot{a}^2(t) + \dot{b}^2(t)] \\
 &+ \left\{ \frac{\pi h R^2}{4} \int_0^{\pi/2} [X_m^2(\theta) - Y_m^2(\theta) + Z_m^2(\theta)] \sin \theta d\theta \right\} \left\{ \rho_{2mc} [\dot{a}^2(t) - \dot{b}^2(t)] + 2\rho_{2ms} [\dot{a}(t)\dot{b}(t)] \right\} \\
 &- \left\{ 2\pi \rho_0 h R^2 \cdot \Omega \cdot \int_0^{\pi/2} [X_m(\theta) \cos \theta + Z_m(\theta) \sin \theta] Y_m(\theta) \sin \theta d\theta \right\} [\dot{a}(t)b(t) - a(t)\dot{b}(t)]
 \end{aligned} \tag{5}$$

где углы  $\varphi$  и  $\theta$  определяют положение элемента на срединной поверхности оболочки. Для  $n = 2m$  мы получаем члены  $\rho_{2mc}$  и  $\rho_{2ms}$  из уравнения (1).

С точки зрения теории Голденвейзера – Новожилова о тонких изотропных оболочках, подвергающихся воздействию деформаций при нулевых удлинениях, потенциальная энергия деформации представляется следующим образом:

$$P = \frac{Eh^3 R^2}{24(1-\eta^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\eta \kappa_1 \kappa_2 + 2(1-\eta)\tau^2] \sin \theta d\theta d\varphi, \tag{6}$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\eta$  – коэффициент Пуассона,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\tau$  – составляющие деформации в теории Голденвейзера – Новожилова, которые, с использованием выражений (3) в случае сферической оболочки, задаются так:

$$\kappa_1 = \frac{1}{R^2} \left( \frac{dX}{d\theta} - \frac{d^2 Z}{d\theta^2} \right) (a \cos m\varphi + b \sin m\varphi),$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{R^2} \left( \cot \theta X - \frac{m}{\sin \theta} Y + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} Z - \cot \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) (a \cos m\varphi + b \sin m\varphi), \quad (7)$$

$$\tau = \frac{1}{R^2} \left( \frac{m}{\sin \theta} X - \cot \theta Y + \frac{m \cot \theta}{\sin \theta} Z + \frac{dY}{d\theta} - \frac{m}{\sin \theta} \frac{dZ}{d\theta} \right) (-a \sin m\varphi + b \cos m\varphi)$$

(индексы « $m$ » опущены для упрощения записи).

С учетом этого потенциальная энергия деформации полусферической оболочки (6) выглядит так:

$$P^{(hem)} = \left\{ \frac{\pi m^2 (m^2 - 1)^2 E h^3}{6(1 + \eta) R^2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{2m} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^3 \theta} d\theta \right\} \cdot [a^2(t) + b^2(t)]. \quad (8)$$

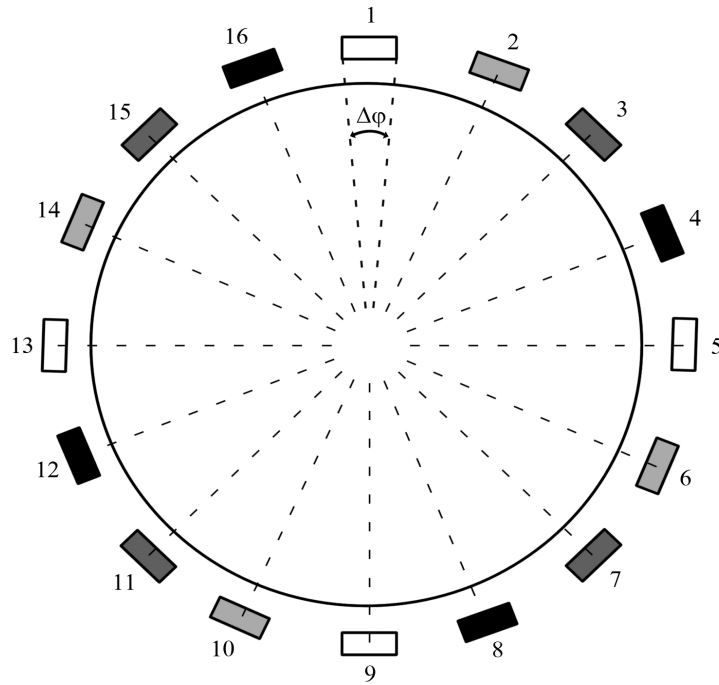


Рис. 1. Угловое расположение корректирующе-возбуждающих электродов вокруг резонатора

Для выражения электрической энергии системы, как показано на рис. 1 и 2, предположим, что система из  $N$  электродов окружает оболочку ( $N = 8 \cdot m$ , где  $m = 2$  – номер собственной формы колебаний стоячей волны) и они расположены на равном расстоянии с наружной стороны. Каждый электрод в направлении  $\varphi$  имеет угловой размер, равный  $2\Delta\varphi$  (см. рис. 1). Следовательно, центры электродов

тродов расположены под углами  $0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi(N-1)}{N}$ . В направлении  $\theta$  электроды ограничены углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  ( $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ). Пусть величина  $U_i(t, \varphi)$  представляет собой разность электрических потенциалов между оболочкой и  $i$ -м электродом. Как уже было сказано, считаем, что зазоры между оболочкой и электродами равномерны и равны  $\Delta$ , и в этих зазорах концентрируется квазиэлектростатическое поле. Электрическая энергия квазиэлектростатического поля описывается выражением

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\varphi_{1i}}^{\varphi_{2i}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{U_i^2(t, \varphi)}{\Delta - w} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} Z_m^2(\theta) \sin \theta \, d\theta \right] \left\{ 2m\Delta\varphi (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) \frac{a^2(t) + b^2(t)}{2} \right. \\
 &\quad + \frac{8m\Delta\varphi}{\pi} (\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2 + \Delta V_3^2 + \Delta V_4^2) \cdot \frac{a^2(t) + b^2(t)}{2} \cdot \sin(2\omega t) \\
 &\quad + \sin(2m\Delta\varphi) \left[ (V_1^2 - V_3^2) \frac{a^2(t) - b^2(t)}{2} + (V_2^2 - V_4^2) a(t)b(t) \right] \\
 &\quad \left. + \frac{4\sin(2m\Delta\varphi)}{\pi} \left[ (\Delta V_1^2 - \Delta V_3^2) \frac{a^2(t) - b^2(t)}{2} + (\Delta V_2^2 - \Delta V_4^2) a(t)b(t) \right] \sin(2\omega t) \right\}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где  $\varphi_{2i} - \varphi_{1i} = 2\Delta\varphi$ ,  $\varepsilon_0$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\bar{R} = R + \frac{1}{2}(h + \Delta)$  и  $U_i(t, \varphi) = U_{0i}(\varphi) + \Delta U_i(t, \varphi)$  — разность электрических потенциалов между оболочкой и  $i$ -м электродом, где  $U_{0i}(\varphi)$  — не зависящая от времени составляющая напряжения,  $\Delta U_i(t, \varphi)$  — зависящий от времени сигнал в форме меандра с полупериодом, равным собственной частоте оболочки (параметрическое возбуждение), как показано на рис. 2. Удобно рассматривать функцию

$$U_i^2(t, \varphi) = V_{0i}^2(\varphi) + \Delta V_i^2(t, \varphi),$$

где

$$V_{0i}^2(t, \varphi) = U_{0i}^2(\varphi) + \Delta U_i^2(t, \varphi), \quad \Delta V_i^2(t, \varphi) = 2 \cdot U_{0i}(\varphi) \cdot \Delta U_i(t, \varphi).$$

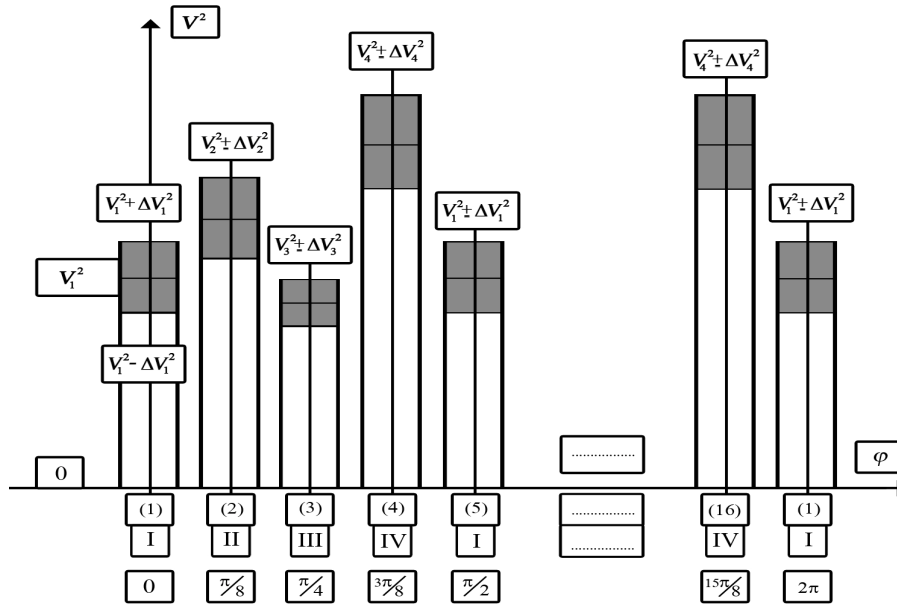


Рис. 2. Символы  $V_i^2$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) представляют квадраты среднего напряжения в четырех группах корректирующе-возбуждающих электродов, тогда как символ  $\Delta V_i^2$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) представляет амплитуду периодических сигналов в этих группах.

Отсюда  $V_{0i}^2(\varphi) \geq \Delta V_i^2(t, \varphi)$ , и равенство возможно только в случае если  $U_{0i}(\varphi)$  равно амплитуде  $\Delta U_i(t, \varphi)$ . Далее предположим, что  $N = 8 \cdot m$  электродов образуют четыре группы из  $2 \cdot m$  электродов и каждая группа формирует  $2 \cdot m$  правильный многоугольник. Кроме того, допустим, что напряжения, приложенные к каждому электроду конкретной группы, одинаковы и равны  $V_j$ , где  $j = 1, 2, 3, 4$  – номер соответствующей группы:

- для первой группы ( $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/m$ , ...,  $\varphi_{2m} = (2m-1)\pi/m$  занумерованные как 1, 5, 9 и 13 на рис. 1 и 2):

$$\sum_{i=1}^{2m} [V_i^2(\varphi) + \Delta V_i^2(t, \varphi)] = \left\{ V_1^2 + \frac{4\Delta V_1^2}{\pi} \sin(2\omega t) \right\} \left\{ \frac{2m\Delta\varphi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin(2m\Delta\varphi) \cos 2m\varphi \right\};$$

- для второй группы ( $\varphi_{2m+1} = \pi/4m$ ,  $\varphi_2 = \pi/4m + \pi/m$ ,  $\varphi_2 = \pi/4m + 2\pi/m$ , ...,  $\varphi_{2m} = \pi/4m + (2m-1)\pi/m$ ):

$$\sum_{i=2m+1}^{4m} [V_i^2(\varphi) + \Delta V_i^2(t, \varphi)] = \left\{ V_2^2 + \frac{4\Delta V_2^2}{\pi} \sin(2\omega t) \right\} \left\{ \frac{2m\Delta\varphi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin(2m\Delta\varphi) \sin 2m\varphi \right\}$$

;

- для третьей группы ( $\varphi_{2m+1} = \pi/2m$ ,  $\varphi_2 = \pi/2m + \pi/m$ ,  $\varphi_2 = \pi/2m + 2\pi/m$ , ...,

$$\varphi_{2m} = \pi/2m + (2m-1)\pi/m):$$

$$\sum_{i=4m+1}^{6m} [V_i^2(\varphi) + \Delta V_i^2(t, \varphi)] = \left\{ V_3^2 + \frac{4\Delta V_3^2}{\pi} \sin(2\omega t) \right\} \left\{ \frac{2m\Delta\varphi}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin(2m\Delta\varphi) \cos 2m\varphi \right\}$$

;

- для четвертой группы ( $\varphi_{2m+1} = 3\pi/4m$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/4m + \pi/m$ ,

$$\varphi_2 = 3\pi/4m + 2\pi/m, \dots, \varphi_{2m} = 3\pi/4m + (2m-1)\pi/m):$$

$$\sum_{i=6m+1}^{8m} [V_i^2(\varphi) + \Delta V_i^2(t, \varphi)] = \left\{ V_4^2 + \frac{4\Delta V_4^2}{\pi} \sin(2\omega t) \right\} \left\{ \frac{2m\Delta\varphi}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin(2m\Delta\varphi) \sin 2m\varphi \right\}$$

### Диссипативная функция Рэлея

Демпфирующие характеристики оболочки могут быть представлены с использованием диссипативной функции Рэлея:

$$D = \frac{hR^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d(\varphi) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$\left\{ \pi h R^2 d_0 \int_0^{\pi/2} [X_m^2(\theta) + Y_m^2(\theta) + Z_m^2(\theta)] \sin \theta d\theta \right\} \frac{\dot{a}^2(t) + \dot{b}^2(t)}{2}$$

$$+ \left\{ \frac{\pi h R^2}{2} \int_0^{\pi/2} [X_m^2(\theta) - Y_m^2(\theta) + Z_m^2(\theta)] \sin \theta d\theta \right\} \left\{ d_{2mc} \frac{\dot{a}^2(t) - \dot{b}^2(t)}{2} + d_{2ms} \dot{a}(t) \dot{b}(t) \right\}$$

, (10)

где для  $N=8 \cdot m$  мы получаем члены  $d_{2mc}$  и  $d_{2ms}$  из уравнения (2).

### Лангранжиан системы и уравнения вибрирующей структуры

Лангранжиан системы выглядит следующим образом:

$$L = T - P + W = L(\dot{a}, \dot{b}, a, b), \quad (11)$$

где кинетическая энергия ( $T$ ), потенциальная энергия ( $P$ ) и электрическая энергия ( $W$ ) заданы выражениями (5), (8) и (9) соответственно.

Уравнения Эйлера – Лагранжа, описывающие динамику резонатора, будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{a}}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{b}}\right) - \frac{\partial L}{\partial b} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{b}} \quad (12)$$

где диссипативная функция Рэлея задана формулой (10).

Подставив соответствующие выражения для энергий и диссипативной функции в уравнения (12), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon \bar{\Delta}_{1C}) \ddot{a} + \varepsilon \bar{\Delta}_{1S} \ddot{b} + 2\varepsilon \delta (1 + \bar{\Delta}_{2C}) \dot{a} + 2\varepsilon \delta \bar{\Delta}_{2S} \dot{b} + \omega^2 (1 - \varepsilon \bar{\Delta}_{3C}) a - \omega^2 \varepsilon \bar{\Delta}_{3S} b - 2\varepsilon \eta \bar{\Omega} \dot{b} \\ - \varepsilon p_0 a \sin(2\omega t) - \varepsilon p_{2C} a \sin(2\omega t) - \varepsilon p_{2S} b \sin(2\omega t) = 0, \\ \varepsilon \bar{\Delta}_{1S} \ddot{a} + (1 - \varepsilon \bar{\Delta}_{1C}) \ddot{b} + 2\varepsilon \delta \bar{\Delta}_{2S} \dot{a} + 2\varepsilon \delta (1 - \bar{\Delta}_{2C}) \dot{b} - \omega^2 \varepsilon \bar{\Delta}_{3S} a + \omega^2 (1 + \varepsilon \bar{\Delta}_{3C}) b + 2\varepsilon \eta \bar{\Omega} \dot{a} \\ - \varepsilon p_0 b \sin(2\omega t) - \varepsilon p_{2S} a \sin(2\omega t) + \varepsilon p_{2C} b \sin(2\omega t) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий малые величины соответствующих воздействий в системе, и

$$\varepsilon \bar{\Delta}_{1C} = \frac{\rho_{2mc}}{\rho_0} \frac{I_1}{I_0}, \quad \varepsilon \bar{\Delta}_{1S} = \frac{\rho_{2ms}}{\rho_0} \frac{I_1}{I_0}, \quad \varepsilon \eta \bar{\Omega} = \frac{2I_2}{I_0} \Omega;$$

$$2\varepsilon \delta = \frac{d_{2mc}}{d_0}, \quad 2\varepsilon \delta \Delta_{2C} = \frac{d_{2mc}}{2\rho_0} \frac{I_1}{I_0}, \quad 2\varepsilon \delta \Delta_{2S} = \frac{d_{2mc}}{2\rho_0} \frac{I_1}{I_0};$$

$$\omega^2 = \frac{m^2 (m^2 - 1)^2 h^2}{R^4} \frac{E}{(1 + \eta) \rho_0} \frac{I_3}{I_0} - \frac{\sigma_1}{\pi h R^2 \rho_0} \frac{I_4}{I_0}, \quad \omega^2 \varepsilon \Delta_{3C} = \frac{\sigma_2}{\pi h R^2 \rho_0} \frac{I_4}{I_0};$$

$$\omega^2 \varepsilon \Delta_{3S} = \frac{\sigma_3}{\pi h R^2 \rho_0} \frac{I_4}{I_0}, \quad \varepsilon p_0 = \frac{\Delta \sigma_1}{\pi h R^2 \rho_0} \frac{I_4}{I_0}, \quad \varepsilon p_{2C} = \frac{\Delta \sigma_2}{\pi h R^2 \rho_0} \frac{I_4}{I_0}, \quad \varepsilon p_{2S} = \frac{\Delta \sigma_3}{\pi h R^2 \rho_0} \frac{I_4}{I_0};$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [X_m^2(\theta) + Y_m^2(\theta) + Z_m^2(\theta)] \sin \theta d\theta;$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [X_m^2(\theta) - Y_m^2(\theta) + Z_m^2(\theta)] \sin \theta d\theta;$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} [X_m(\theta) \cos \theta + Z_m(\theta) \sin \theta] Y_m(\theta) \sin \theta d\theta;$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{2m} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^3 \theta} d\theta, \\
 I_4 &= \int_0^{\pi/2} Z_m^2(\theta) \sin \theta d\theta, \sigma_1 = (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} 2m\Delta\varphi; \\
 \sigma_2 &= (V_1^2 - V_3^2) \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} \sin(2m\Delta\varphi), \sigma_3 = (V_2^2 - V_4^2) \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} \sin(2m\Delta\varphi); \\
 \Delta\sigma_1 &= (\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2 + \Delta V_3^2 + \Delta V_4^2) \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} \frac{8m\Delta\varphi}{\pi}, \\
 \Delta\sigma_2 &= (\Delta V_1^2 - \Delta V_3^2) \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} \sin(2m\Delta\varphi); \quad \Delta\sigma_3 = (\Delta V_2^2 - \Delta V_4^2) \frac{\varepsilon_0 \bar{R}^2}{\Delta^3} \sin(2m\Delta\varphi).
 \end{aligned}$$

Решая уравнения системы (13) относительно  $\ddot{a}$ ,  $\ddot{b}$  и пренебрегая членами порядка  $O(\varepsilon^2)$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = \varepsilon F_1(\dot{a}, \dot{b}, a, b), \quad \ddot{b} + \omega^2 b = \varepsilon F_2(\dot{a}, \dot{b}, a, b) \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1(\dot{a}, \dot{b}, a, b) &= 2\eta \bar{\Omega} \dot{b} - 2\delta(1 + \Delta_{2C})\dot{a} - 2\delta \Delta_{2S} \dot{b} + \omega^2 \Delta_{1C} a + \omega^2 \Delta_{1S} b, \\
 &\quad + p_0 a \sin(2\omega t) + p_{2C} a \sin(2\omega t) + p_{2S} b \sin(2\omega t), \\
 F_2(\dot{a}, \dot{b}, a, b) &= -2\eta \bar{\Omega} \dot{a} - 2\delta \Delta_{2S} \dot{a} - 2\delta(1 - \Delta_{2C})\dot{b} + \omega^2 \Delta_{1S} a - \omega^2 \Delta_{1C} b \\
 &\quad + p_0 b \sin(2\omega t) + p_{2S} a \sin(2\omega t) - p_{2C} b \sin(2\omega t)
 \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Delta_{2C} = \bar{\Delta}_{2C}, \quad \Delta_{2S} = \bar{\Delta}_{2S}, \quad \Delta_{1C} = \bar{\Delta}_{1C} + \bar{\Delta}_{3C}, \quad \Delta_{1S} = \bar{\Delta}_{1S} + \bar{\Delta}_{3S}.$$

Представим вибрирующую структуру ( $Z$ ) в режиме, соответствующем собственной форме колебаний стоячей волны  $m$ , следующим образом:

$$Z = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi = P \cos m(\varphi - \Theta) \sin(\zeta - \psi) + Q \sin m(\varphi - \Theta) \cos(\zeta - \psi), \quad (15a)$$

где  $\zeta = \omega t$ . Из этого выражения следует:

$$\begin{aligned}
 a &= P \cos m\Theta \sin(\zeta - \psi) - Q \sin m\Theta \cos(\zeta - \psi), \\
 b &= P \sin m\Theta \sin(\zeta - \psi) + Q \cos m\Theta \cos(\zeta - \psi), \\
 \dot{a} &= \omega [P \cos m\Theta \cos(\zeta - \psi) + Q \sin m\Theta \sin(\zeta - \psi)], \\
 \dot{b} &= \omega [P \sin m\Theta \cos(\zeta - \psi) - Q \cos m\Theta \sin(\zeta - \psi)].
 \end{aligned} \quad (16)$$

Из формулы (13) следует:

$$\begin{aligned}
 \ddot{a} = & \omega \left\{ \dot{P} \cos m\Theta \cos(\zeta - \psi) + \dot{Q} \sin m\Theta \sin(\zeta - \psi) \right. \\
 & + m\dot{\Theta} \left[ -P \sin m\Theta \cos(\zeta - \psi) + Q \cos m\Theta \sin(\zeta - \psi) \right] \\
 & + (\omega - \dot{\psi}) \left[ -P \cos m\Theta \sin(\zeta - \psi) + Q \sin m\Theta \cos(\zeta - \psi) \right] \left. \right\}, \\
 \ddot{b} = & \omega \left\{ \dot{P} \sin m\Theta \cos(\zeta - \psi) - \dot{Q} \cos m\Theta \sin(\zeta - \psi) \right. \\
 & + m\dot{\Theta} \left[ P \cos m\Theta \cos(\zeta - \psi) + Q \sin m\Theta \sin(\zeta - \psi) \right] \\
 & + (\omega - \dot{\psi}) \left[ -P \sin m\Theta \sin(\zeta - \psi) - Q \cos m\Theta \cos(\zeta - \psi) \right] \left. \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Подставив выражения (16) – (17) в формулу (14) и решив полученную систему относительно  $\dot{P}$ ,  $\dot{Q}$ ,  $m\dot{\Theta}$  и  $\dot{\psi}$ , получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left[ \overline{F_1} \cos m\Theta + \overline{F_2} \sin m\Theta \right] \cos(\zeta - \psi), \\
 \dot{Q} &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left[ \overline{F_1} \sin m\Theta - \overline{F_2} \cos m\Theta \right] \sin(\zeta - \psi), \\
 m\dot{\Theta} &= \frac{\varepsilon}{\omega(P^2 - Q^2)} \left\{ - \left[ \overline{F_1} \sin m\Theta - \overline{F_2} \cos m\Theta \right] P \cos(\zeta - \psi) \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \overline{F_1} \cos m\Theta + \overline{F_2} \sin m\Theta \right] Q \sin(\zeta - \psi) \right\}, \\
 \dot{\psi} &= \frac{\varepsilon}{\omega(P^2 - Q^2)} \left\{ \left[ \overline{F_1} \sin m\Theta - \overline{F_2} \cos m\Theta \right] Q \cos(\zeta - \psi) + \left[ \overline{F_1} \cos m\Theta + \overline{F_2} \sin m\Theta \right] P \sin(\zeta - \psi) \right\},
 \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\overline{F_1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_1 d\zeta$  – результат подстановки (16) в (15).

### Решение системы методом осреднения

Используем метод осреднения для решения системы (18). Этот метод основан на представлении правой части уравнения функциями, осредненные относительно «быстрой переменной»  $\zeta = \omega t$ :

$$\langle \dot{P} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{P}) d\zeta, \quad \langle \dot{Q} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{Q}) d\zeta, \quad \langle \dot{\Theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\Theta}) d\zeta, \quad \langle \dot{\psi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\psi}) d\zeta. \quad (19)$$

Результат осреднения правой части уравнения для производной основной амплитуды колебаний вибрирующей структуры выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \dot{P} \rangle = \varepsilon \left\{ -\delta P [1 + \Delta_{2C} \cos 2m\Theta + \Delta_{2S} \sin 2m\Theta] - \frac{\omega Q}{2} [\Delta_{1C} \sin 2m\Theta - \Delta_{1S} \cos 2m\Theta] \right. \\ \left. + \frac{p_0}{4\omega} P \cos 2\psi + \frac{p_{2C}}{4\omega} [P \cos 2m\Theta \cos 2\psi - Q \sin 2m\Theta \sin 2\psi] \right. \\ \left. + \frac{p_{2S}}{4\omega} [P \sin 2m\Theta \cos 2\psi + Q \cos 2m\Theta \sin 2\psi] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

После осреднения динамику квадратурной составляющей амплитуды колебаний вибрирующей структуры можно представить выражением

$$\begin{aligned} + \sin(2m\Delta\varphi) \left[ \left( V_1^2 - V_3^2 \right) \frac{a^2(t) - b^2(t)}{2} + \left( V_2^2 - V_4^2 \right) a(t)b(t) \right] \\ - \frac{p_0}{4\omega} Q \cos 2\psi + \frac{p_{2C}}{4\omega} [-P \sin 2m\Theta \sin 2\psi + Q \cos 2m\Theta \cos 2\psi] \\ + \frac{p_{2S}}{4\omega} [P \cos 2m\Theta \sin 2\psi + Q \sin 2m\Theta \cos 2\psi] \left\} \end{aligned} \quad (21)$$

Результат осреднения скорости прецессии вибрирующей структуры следующий:

$$\begin{aligned} \langle m\dot{\Theta} \rangle = \varepsilon \left\{ -\eta \bar{\Omega} + \delta \frac{P^2 + Q^2}{P^2 - Q^2} [\Delta_{2C} \sin 2m\Theta - \Delta_{2S} \cos 2m\Theta] - \omega \frac{PQ}{P^2 - Q^2} [\Delta_{1C} \cos 2m\Theta + \Delta_{1S} \sin 2m\Theta] \right. \\ \left. + \frac{p_0}{2\omega} \frac{PQ}{P^2 - Q^2} \sin 2\psi + \frac{1}{4\omega} [-p_{2C} \sin 2m\Theta + p_{2S} \cos 2m\Theta] \cos 2\psi \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Наконец, динамика фазового сдвига вибрирующей структуры описывается осредненным выражением

$$\begin{aligned} \langle \dot{\psi} \rangle = \varepsilon \left\{ -\delta \frac{2PQ}{P^2 - Q^2} [\Delta_{2C} \sin 2m\Theta - \Delta_{2S} \cos 2m\Theta] + \frac{\omega}{2} \frac{P^2 + Q^2}{P^2 - Q^2} [\Delta_{1C} \cos 2m\Theta + \Delta_{1S} \sin 2m\Theta] \right. \\ \left. - \frac{1}{4\omega} \left[ p_0 \frac{P^2 + Q^2}{P^2 - Q^2} + \frac{p_{2C}}{4\omega} \cos 2m\Theta + \frac{p_{2S}}{4\omega} \sin 2m\Theta \right] \sin 2\psi \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

где  $p_0$  – осредненный коэффициент параметрического возбуждения, а  $p_{2C}$  и  $p_{2S}$  – косинусная и синусная компоненты параметрического возбуждения.

Предположим, что система управления гироскопа обеспечивает малую величину амплитуды квадратурной составляющей ( $Q$ ) и фазового сдвига ( $\psi$ ). В этом случае уравнения (20) – (23) можно упростить:

$$\begin{aligned}\langle \dot{P} \rangle &\approx \varepsilon P \left\{ -\delta [1 + \Delta_{2C} \cos 2m\Theta + \Delta_{2S} \sin 2m\Theta] + \frac{1}{4\omega} [p_0 + p_{2C} \cos 2m\Theta + p_{2S} \sin 2m\Theta] \right\}, \\ \langle \dot{Q} \rangle &\approx \varepsilon \left\{ \frac{\omega P}{2} [\Delta_{1C} \sin 2m\Theta - \Delta_{1S} \cos 2m\Theta] \right\}, \\ \langle m\dot{\Theta} \rangle &\approx \varepsilon \left\{ -\eta \bar{\Omega} + \delta [\Delta_{2C} \sin 2m\Theta - \Delta_{2S} \cos 2m\Theta] + \frac{1}{4\omega} [-p_{2C} \sin 2m\Theta + p_{2S} \cos 2m\Theta] \right\}, \\ \langle \dot{\Psi} \rangle &\approx \varepsilon \left\{ \frac{\omega}{2} [\Delta_{1C} \cos 2m\Theta + \Delta_{1S} \sin 2m\Theta] \right\}.\end{aligned}\quad (24)$$

Из первого уравнения (24) следует, что дефекты демпфирующих характеристик резонатора можно скомпенсировать с помощью точного управления вибрирующей структурой: не зависящее от угла ( $\Theta$ ) затухание основной амплитуды колебаний компенсируется осредненным параметрическим возбуждением, следовательно,  $-\delta + \frac{P_0}{4\omega} \rightarrow 0$ . Зависимое от угла затухание основной амплитуды компенсируется асимметричным параметрическим возбуждением, т.е.  $-\delta \Delta_{2C} + \frac{P_{2C}}{4\omega} \rightarrow 0$  и  $-\delta \Delta_{2S} + \frac{P_{2S}}{4\omega} \rightarrow 0$ . Необходимо иметь в виду, что в данном случае дрейф, зависящий от угла, подавляется. Это следует из третьего уравнения (24), и  $\langle m\dot{\Theta} \rangle \rightarrow -\varepsilon \eta \bar{\Omega}$ .

Вспомним, что  $-\eta(\varepsilon \bar{\Omega}) = -\eta \Omega$  – главный интегрирующий эффект (эффект Брайана) гироскопа,  $\varepsilon \bar{\Omega} = \Omega$  подчеркивает малую величину входной угловой скорости  $\Omega$  и  $\eta$  – коэффициент Брайана. Для подавления квадратурной составляющей ( $Q$ ) можно оперировать составляющими  $\bar{\Delta}_{3C}$ ,  $\bar{\Delta}_{3S}$ , так чтобы

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_{3C} &\approx \sigma_2 \approx (\Delta V_1^2 - \Delta V_3^2) \approx -Q \sin(2m\Theta), \\ \bar{\Delta}_{3S} &\approx \sigma_3 \approx (\Delta V_2^2 - \Delta V_4^2) \approx Q \cos(2m\Theta)\end{aligned}\quad (25)$$

и, следовательно,

$$\bar{\Delta}_{3C} = -kQ \sin(2m\Theta), \quad \bar{\Delta}_{3S} = kQ \cos(2m\Theta) \quad (26)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. В этом случае, как следует из выражений (21) и (24):

$$\langle \dot{Q} \rangle \approx -\varepsilon \left( \frac{p_0}{2\omega} + k \frac{\omega P}{2} \right) Q \rightarrow 0. \quad (27)$$

Все остальные условия в (21) можно считать условиями возмущения.

Для реализации управления  $\psi \rightarrow 0$  можно использовать опорный фазовый генератор, который вырабатывает опорные возбуждающие сигналы, так чтобы  $\psi \approx 0$ .

## Заключение

В статье рассмотрена электромеханическая модель волнового твердотельного гироскопа. Показано, что основные функции управления – поддержание амплитуды колебаний, компенсация квадратурной составляющей сигнала и подавление дрейфа гироскопа вследствие дефектов демпфирующих характеристик могут быть реализованы с помощью параметрического управления на отдельных электродах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Журавлев, В.Ф.** Волновой твердотельный гироскоп / В.Ф.Журавлев, Д.М. Климов . - М.:Наука, 1985. - 126 с.
2. **Lynch D.D.**, Vibratory gyro Analysis by the method of averaging // II St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, Part II, 1995. - St. Petersburg: ЦНИИ «Электроприбор». - P.18-26.
3. **Журавлев, В.Ф.** Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа / В.Ф.Журавлев, Д.Д. Линч// Механика твердого тела. - 1995. -Т. 30, № 5. - P. 10-21.
4. **Жбанов, Ю.К.** Самонастраивающийся контур подавления квадратуры в волновом твердотельном гироскопе // Гироскопия и навигация. - 2007. - N 2. - P. 37-42.
5. **Жбанов, Ю.К.** Контур управления амплитудой в волновом твердотельном гироскопе с автоматической компенсацией разносторонности // Механика твердого тела. - 2008. - Т. 40, N. 3. - P. 328-332.

**Abstract.** The parametric electrode is normally used in the hemispherical resonator gyroscopes, operating in the whole angle regime, for maintaining amplitudes of vibratory patterns. It is well known that owing to the variation of the gap between the resonator and parametric electrode, a drift of the vibrating pattern is obtained. This drift is similar to the gyro drift stipulated by the Q-factor imperfections and substantially decreases the quality of the hemispherical resonator gyroscope. The present paper considers the methods of compensation of these drifts by means of the special control of the vibrating pattern by the sectioned parametric electrode. Compensation of the drifts is achieved through amplitudes of voltage and phase manipulations at the sectioned parametric electrodes. The side effect of this control which consists of the spurious splitting of the frequencies of the vibrating pattern is discussed.