

ВАРИАЦИЯ АЛЛАНА КАК ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрена вариация Аллана – современная характеристика рассеивания данных, которая получает все более широкое распространение на практике, в том числе при оценивании характеристик навигационной аппаратуры. Для ее анализа и сопоставления с другими оценками изложена общая схема оценивания погрешностей измерений. Проведено сопоставление вариации Аллана с классической выборочной дисперсией на основе теории статистических решений. Для формального описания вариации Аллана и других характеристик погрешностей предложено использовать аппарат функциональных гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами.

Введение

Повышение требований к качеству прецизионных устройств и необходимость их контроля обуславливает практические потребности в расширении номенклатуры характеристик погрешностей. Традиционно используемые оценки погрешностей – дисперсия и среднее квадратическое отклонение – недостаточно полно отражают их свойства. Поэтому актуальны использование характеристик, более полно отражающих свойства погрешностей, и развитие методов их оценивания на основе априорной информации и экспериментальных данных. Одной из наиболее перспективных характеристик точности является вариация Аллана (Allan Variance) [1].

Первоначально вариация Аллана была введена как альтернативная оценка дисперсии в области прецизионных измерений времени и частоты [1–3], где она является общепринятой; вскоре ее распространили и на другие виды прецизионной аппаратуры, в том числе измерительной [4–5] и навигационной [6–7].

Для дискретной случайной последовательности x_k , $k = 1...n$ вариация Аллана определяется следующим образом:

$$\sigma_a^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 / 2(n-1). \quad (1)$$

Для непрерывного случайного процесса $x(t)$, $t \in [0, T]$ выбирают интервал τ (время осреднения) и определяют x_k как среднее значение процесса $x(t)$ на интервале $(\tau k - \tau, \tau k)$, $k = 1...n$; затем вычисляют соответствующую вариацию Аллана $\sigma_a(\tau)$ согласно (1).

Применение вариации Аллана оказывается полезным при обработке данных и уточнении моделей погрешностей для многих прецизионных устройств, прежде всего в тех случаях, когда классические спектральные методы неприменимы (при наличии существенных нестационарных шумов, белых или $1/f$ -шумов). Поэтому в настоящее время вариация Аллана включена в перечень нормируемых характеристик акселерометров, гироскопов и микромеханических устройств; например, это реализовано в стандартах IEEE Std 647–1995, IEEE Std 952–1997, IEEE Std 1554–2005 [8–10].

Сиряя Татьяна Николаевна. Доктор технических наук ведущий научный сотрудник ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург).

Значимость вариации Аллана для области навигационного приборостроения обусловлена тем, что методики на ее основе позволяют изучать поведение чувствительных элементов навигационных систем на длительных интервалах времени в целях оценивания погрешностей выработки навигационных параметров. Прежде всего такие методики дают возможность уточнить модели ухода гироскопов, что наиболее актуально в связи с длительными интервалами времени между коррекциями навигационных систем.

В частности, можно использовать разложение полученной вариации Аллана $\sigma_a(\tau)$ по типовым функциям, что позволит выявить основные составляющие погрешностей и их источники, а также оценить их вклад в суммарную погрешность.

В то же время при практическом применении вариации Аллана выявляются и некоторые ограничения. В частности, для стационарных процессов имеется выражение $\sigma_a(\tau)$ через спектральную плотность [5, 10]; однако, как отмечено в [7], это не является взаимно-однозначным соответствием. При этом, разумеется, область практического применения вариации Аллана гораздо шире, поскольку она применима и для нестационарных моделей шумов.

С другой стороны, при идентификации структуры шумов на основе разложения вариации Аллана по типовым функциям (согласно [9, 10]) нередко возникают существенные погрешности, что снижает адекватность получаемых моделей.

Одна из причин затруднений при использовании вариации Аллана связана с отсутствием ее формального обоснования и физической интерпретации – так, как это принято для классических оценок погрешностей. Поэтому можно выделить несколько первоочередных направлений исследований вариации Аллана:

- построение содержательной интерпретации вариации Аллана как оценки погрешности, включая формальное выделение оцениваемой характеристики;
- сопоставление вариации Аллана с другими характеристиками погрешностей (или неопределенностей), прежде всего – с дисперсией.

Исследования в указанных направлениях актуальны как для развития теории точности измерительных и навигационных устройств, так и для решения ряда практических задач, например при обработке измерительной информации в ходе испытаний и использования микромеханических гироскопов и инерциальных навигационных систем (ИНС). Кроме того, сопоставление различных оценок погрешностей (неопределенностей) актуально для выявления целесообразных областей использования каждой из оценок, а также для выяснения возможностей их совместного использования.

В данной статье изложены результаты исследований в указанных направлениях. При этом основой для анализа и сопоставления различных оценок погрешностей является общая схема формирования и обоснования оценок погрешностей [11, 12], которая кратко излагается далее. Поскольку наиболее распространенной на практике является классическая выборочная дисперсия, то вариация Аллана как перспективный показатель погрешности сопоставляется прежде всего с дисперсией.

Общая схема формирования оценок погрешностей

Методы оценивания погрешностей (неопределенностей) измерений направлены на нахождение основных характеристик погрешностей, которые определяют как параметры рассеивания в рамках принятых моделей погрешностей.

Процедура оценивания погрешности измерения [11, 12] содержит ряд этапов (см. рисунок):

- 1) формирование математической **модели погрешности**, например, в виде случайной величины или функции, а также нечеткого множества или интервальной функции;
- 2) определение характеристики погрешности как **параметра рассеивания** в рамках принятой модели погрешности;
- 3) выбор **оценки** указанного параметра (характеристики), которая может быть вычислена по имеющимся экспериментальным данным;
- 4) вычисление **оценки** характеристики согласно принятым формулам.



Общая схема оценивания погрешности

Таким образом, возможно широкое разнообразие вариантов оценок погрешностей, что обусловлено выбором различных **моделей** погрешностей, а в рамках определенных моделей – возможностью определения разных **параметров рассеивания**, и далее – разнообразных **оценок** для них.

Классический (традиционный) вариант схемы реализуется следующим образом:

модель погрешности – случайная величина ξ (чаще всего с гауссовским распределением);

характеристика погрешности – дисперсия σ^2 величины ξ ;

оценка характеристики – выборочная дисперсия, которая вычисляется по набору данных $x_1, \dots, x_n$ согласно формуле

$$S^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{\text{ид}})^2 / (n-1), \quad x_{\text{ид}} = \sum_{k=1}^n x_k / n. \quad (2)$$

Такой вариант оценивания погрешностей наиболее часто применяется на практике. Однако свойства реальных данных нередко приводят к необходимости использовать различные нетрадиционные варианты схемы; при этом ее расширение может проводиться на всех перечисленных выше этапах.

При сохранении **классической модели** погрешности – случайной величины – и **традиционной характеристики** – дисперсии – можно использовать различные **оценки**, отличающиеся от (2). Наиболее распространенными являются оценки на основе медиан, абсолютных отклонений и размахов выборки [11].

Далее, при сохранении **модели погрешности** – случайной величины – можно использовать **неклассические характеристики**, отличные от дисперсии; наиболее важными являются медианный параметр масштаба и среднее абсолютное отклонение [11].

Расширяя **вероятностную модель** погрешности с учетом ее изменений во времени, переходят к модели **случайной последовательности или функции** и вводят функциональные характеристики рассеивания – корреляционные функ-

ции $R(s, t)$. Методы их оценивания наиболее развиты для стационарных процессов. В то же время для случайных процессов возможны и другие характеристики и оценки погрешностей, отражающие их изменения во времени. Именно к ним и относится вариация Аллана [1], которая является основным предметом исследований данной статьи.

Первоначально вариация Аллана была введена как эмпирическая (альтернативная) оценка дисперсии [1, 5], имеющая дополнительные свойства. Поэтому ее можно сопоставлять с выборочной дисперсией на основе статистического подхода. С другой стороны, для эффективного применения вариации Аллана и исследования ее свойств целесообразно для нее сформировать полную схему оценивания – выявить исходную модель погрешности и определить формальный параметр рассеивания, для которого вариация Аллана является естественной оценкой.

Эти два направления и отражены далее. Прежде всего для сопоставления вариации Аллана с выборочной дисперсией используется статистический аппарат проверки гипотез [13]. С другой стороны, развивается функциональный подход к формализации вариации Аллана [14] на основе гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами [15].

Сопоставление вариации Аллана с классической дисперсией: статистический подход

Статистический подход к сопоставлению вариации Аллана σ_a^2 (1) с классической выборочной дисперсией S^2 (2) основан на аппарате проверки статистических гипотез. Отношение этих двух оценок рассеивания используется в критерии Аббе [13], который обычно применяют для проверки гипотезы об отсутствии систематического сдвига в последовательности результатов наблюдений $x_1, \dots, x_n$. В частности, это используется при исследовании стабильности устройств и выявлении дрейфа показаний приборов.

Критерий Аббе проверяет нулевую гипотезу о постоянном среднем наборе данных:

$$H_0: M x_k = c, \quad k=1 \dots n, \quad (3)$$

против альтернативы наличия систематического (монотонного) сдвига данных:

$$H_1: M x_{k+1} = M x_k + h, \quad k=1 \dots n-1. \quad (4)$$

Критерий Аббе основан на отношении двух оценок рассеивания r :

$$r = \sigma_a^2 / S^2. \quad (5)$$

Свойства отношения r анализируют при нулевой гипотезе H_0 , вводя дополнительно предположение о гауссовском распределении выборки. Первые моменты (математическое ожидание и дисперсия) отношения r имеют вид [13]:

$$M \{ r \} = 1, \quad D \{ r \} \cong (n+2)^{-1}$$

(с точностью до малых более высокого порядка).

При проверке гипотезы H_0 критическая область имеет вид

$$R(\alpha) = \{ r < r_{\min}(n, \alpha) \}, \quad (6)$$

т.е. значимыми являются малые значения r ; в этом случае считают, что в выборке присутствует систематический сдвиг.

Преобразованная статистика

$$U = (r-1) [(n^2-1) / (n-2)]^{1/2}$$

имеет асимптотически гауссовское распределение; это позволяет находить для $n > 60$ критические значения $r_{\min}(n, \alpha)$ по формуле

$$r_{\min}(n, \alpha) = 1 + z_{\alpha} / [n + (1 + z_{\alpha}^2)/2]^{1/2}, \quad (7)$$

где z_{α} – квантиль стандартного гауссовского распределения порядка α .

Критерий Аббе можно также использовать для обнаружения некоррелированных случайных сдвигов; при этом нулевую гипотезу проверяют против альтернативы:

$$H_2: x_{k+1} = x_k + z_k, \quad (8)$$

где z_k – некоррелированная (инновационная) последовательность с дисперсией $Dz_k = \sigma_0^2$.

Анализ свойств отношения r при различных моделях данных (H_0 , H_1 и H_2) позволяет выявить области применимости двух оценок. В частности, вариация Аллана является наилучшей оценкой инновационного параметра рассеивания σ_0^2 при гипотезе H_2 о наличии случайных сдвигов; в то же время, выборочная дисперсия является наилучшей оценкой дисперсии σ^2 при нулевой гипотезе H_0 .

Формализация вариации Аллана: функциональный подход

Функциональный подход основан на представлениях набора данных (как реализации случайного процесса на множестве T) с помощью функциональной модели – гильбертова пространства с воспроизводящим ядром $R(s, t)$, определяемым корреляционной функцией случайного процесса [15, 16].

При этом исходным является гильбертово пространство [17] случайных величин $H(x)$, порожденное случайным процессом $x(t)$, $t \in T$ (с конечной дисперсией и $Mx(t) = 0$); в этом пространстве скалярное произведение определяется как ковариация величин:

$$(h_1, h_2)_H = M(h_1 \bar{h}_2), \quad h_1, h_2 \in H(x). \quad (9)$$

Если случайный процесс $x(t)$, $t \in T$, имеет корреляционную функцию $R(s, t)$, $s, t \in T$, то на основе этой функции можно определить функциональное гильбертово пространство $H(R)$ с воспроизводящим ядром $R(s, t)$, $s, t \in T$. Указанное пространство состоит из функций $f(t)$, $t \in T$ и определяется условиями:

1) все функции вида $R_t(s) = R(s, t)$, $s \in T$, получаемые при фиксации в корреляционной функции одного аргумента t , принадлежат пространству $H(R)$;

2) при скалярном умножении произвольной функции $f \in H(R)$ на функцию вида $R_t = R(\cdot, t)$ в пространстве $H(R)$ получается ее значение в точке t :

$$(f, R_t)_R = f(t), \quad (10)$$

т.е. функция $R_t = R(\cdot, t)$ определяет в $H(R)$ линейный непрерывный функционал, задающий значение функции в точке t .

Значимость функционального пространства $H(R)$ для решения прикладных задач, и в частности для анализа погрешностей, обусловлена тем, что это про-

пространство изоморфно исходному пространству случайных величин $H(x)$, порожденному случайным процессом $\{x(t), t \in T\}$ с корреляционной функцией $R(s, t)$ [16]. При таком изоморфизме случайной величине $x(t)$ соответствует функция $R_t = R(\cdot, t)$; для произвольной случайной величины $h \in H(x)$ соответствующая функция $f \in H(R)$ определяется условием

$$f(t) = (h, x(t))_H = M(h \bar{x}(t)), \quad t \in T. \quad (11)$$

При указанном выше изоморфизме сохраняются скалярные произведения случайных величин (в пространстве случайных величин $H(x)$) и соответствующих функций (в функциональном пространстве $H(R)$):

$$(h_1, h_2)_H = (f_1, f_2)_R; \quad (12)$$

в частности, $(x(s), x(t))_H = (R_s, R_t)_R = R(s, t)$.

В терминах функционального пространства $H(R)$ удобно исследовать различные свойства процессов и формировать оценки их параметров [16]. Преимуществом функционального представления является то, что оно в равной мере применимо как для стационарных, так и для нестационарных процессов; оно также справедливо и для обобщенных процессов (например, белого шума).

Разумеется, для стационарных процессов такое представление прямо связано со спектральным представлением, так что все «спектральные» результаты могут быть сформулированы в терминах функционального представления. С другой стороны, для нестационарных процессов функциональное представление тесно связано с каноническим инновационным представлением Вольда – Крамера [17] во временной области.

Приведем в явном виде функциональные пространства для простейших случайных процессов. Так, некоррелированной случайной последовательности (с постоянной дисперсией) соответствует пространство l^2 , состоящее из последовательностей $y = \{y_k\}$ с суммируемым квадратом:

$$l^2 = \{y: \|y\|^2 = \sum_k |y_k|^2 < \infty\}. \quad (13)$$

Очевидно, на конечном интервале эта норма совпадает с выражением для выборочной дисперсии (со средним 0).

Обобщенному процессу белого шума $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ соответствует пространство квадратично интегрируемых функций на вещественной оси

$$L^2 = \{f: \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\}. \quad (14)$$

Случайной последовательности с некоррелированными приращениями вида (8) соответствует пространство $H(R_1)$ с нормой

$$\|y\|^2 = |y_0|^2 + \sum_k |y_{k+1} - y_k|^2 < \infty. \quad (15)$$

Это выражение совпадает с формулой для вариации Аллана (при $y_0=0$); т. е. вариация Аллана соответствует норме в функциональном пространстве $H(R_1)$, описывающем случайный процесс с некоррелированными приращениями.

Таким образом, при введении вариации Аллана как характеристики погрешности в качестве базовой модели целесообразно использовать процесс вида (8) и его функциональное представление. Тогда в качестве искомого параметра рассеивания следует принять дисперсию инновационной последовательности

σ_0^2 , а ее оценкой является вариация Аллана, которую можно также назвать «инновационной дисперсией». Данное свойство несколько проясняет сущность вариации Аллана как характеристики погрешности.

Таким образом, модель функционального пространства $H(R)$ дает возможность сопоставлять известные параметры рассеивания (дисперсию и вариацию Аллана). Кроме того, такая модель может служить основой для введения новых параметров и их оценок. В частности, в работе [18] для более полного описания свойств прецизионных устройств предложено ввести группу параметров рассеивания (характеристик погрешностей) на основе функциональных пространств $H(R)$.

Заключение

Вариация Аллана представляет собой практически значимую характеристику погрешности, свойства которой требуют исследования, в том числе сопоставления с выборочной дисперсией. Представленные выше подходы к анализу оценок – статистический и функциональный – позволяют выявить их свойства и области применения.

Показано, что приведенные оценки соответствуют нормам в различных функциональных пространствах: вариация Аллана – для процесса с некоррелированными приращениями, дисперсия – для некоррелированной последовательности. Такое описание проясняет природу вариации Аллана и ее прикладные возможности, прежде всего эффективность ее использования при анализе сигналов с некоррелированными приращениями, белых и $1/f$ – шумов. При этом очевидно, что совместное применение дисперсии и вариации Аллана во многих случаях также оказывается эффективным.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08–08–00060

ЛИТЕРАТУРА

1. Allan, D. W. Statistics of atomic frequency standards // Proc. IEEE, 1966. – Vol. 54, N2.
2. Allan, D. W., Ashby, N., Hodge, C. C. The Science of Timekeeping // Application Note 1289, Hewlett-Packard Company, 1997.
3. Allan, D. W., Ashby, N., Hodge, C. C. A brief history of precise time & GPS - Precise timing, GPS World Suppl., 1998.
4. Катков, А. С. Применение преобразования Аллана для анализа предельных возможностей мер и компараторов напряжения // Измерительная техника. – 2006. - № 6.
5. Witt, T. J. Testing for correlations in measurements with the Allan Variance / Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology IV, World Scient. Publ. - 2000.
6. Использование вариации Аллана при исследовании характеристик микромеханических гироскопов // С.Г.Кучерков [и др.]// Гироскопия и навигация. -2003. - № 2, .
7. Кробка, Н. И. Дифференциальные методы идентификации структуры шумов волоконно–оптических и других гироскопов // XVII Санкт–Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010.
8. IEEE Std 647–1995. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for single-axis laser gyros.
9. IEEE Std 952–1997. IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros.
10. IEEE Std 1554–2005. IEEE recommended practice for inertial sensor test equipment, instrumentation, data acquisition, and analysis.
11. Грановский, В. А. Методы обработки данных при измерениях / В. А.Грановский, Т. Н. Сирая. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.
12. Лячев, В. В. Фундаментальные основы метрологии: Учеб. пособие / В.В.Лячев, Т.Н.Сирая, Л. И. Довбета . - СПб: Элмор, 2007. - 424 с.
13. Браунли, К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. – «Наука», Физматлит, 1977. - 408 с.

14. **Siraya, T. N.** Comparison of uncertainty estimates: Allan variance and sample variance // Proc. Intern Conf. "Measurement – 2001", Bratislava, 2001.
15. **Aronsajn, N.** Theory of reproducing kernels. - Trans. Amer. Math. Soc., 1960.
16. **Newton, H. J.** A conversation with E. Parsen // Statistical Science. - 2002. - Vol. 17, N 3.
17. **Розанов, Ю. А.** Теория обновляющих процессов. - М.: Физматгиз, 1980.
18. **Granovsky, V. A.** Noise characteristics in electrical measurements: metrological approach / V. A. Granovsky, T. N. Siraya // Proc. 12th IMEKO TC4 International Symposium "Electrical Measurements and Instrumentation" / - 2002, Zagreb, Croatia.

Abstract. The paper considers Allan variance, an up-to-date data diffusion characteristic which is gaining more and more popularity in applied fields, such as estimating the performance of navigation aids. To analyze Allan variance and to compare it with the other estimates a system for estimating the measurement errors is presented. Allan variance is compared with a classical sampling variance based on the theory of statistical decisions. For the formal description of Allan variance and other error characteristics it is proposed to use the functional Hilbertian spaces with reproducing kernels.

Материал поступил 26.04.10