

УДК 629.195.2

В. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ, И. С. КУРОЧКИН

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
«МАЛЫЙ ИСКУССТВЕННЫЙ СПУТНИК ЗЕМЛИ –
ГИРОДЕМПФЕРЫ» С АПЕРИОДИЧЕСКИМ ЗАТУХАНИЕМ
СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Рассматривается возможность реализации аperiodического затухания собственных колебаний малого искусственного спутника Земли на круговой орбите с использованием гироскопических демпферов.

Гироскопические демпферы – двухстепенные поплавковые гироскопы с большим коэффициентом демпфирования k_d широко применяются для успокоения собственных колебаний искусственных спутников Земли (ИСЗ) в составе так называемой полупассивной системы «V-крен» [1, 2, 4]. Такая система существенно отличается от систем ориентации с помощью реактивных двигателей, требующих расхода рабочего тела [3, 6]. Обычно при проектировании таких систем ИСЗ полагался «тяжелым» по сравнению с гиродемпферами, в математических моделях которых пренебрегалось моментами инерции поплавков по сравнению с моментами инерции ИСЗ.

Для широко применяемых в настоящее время малых искусственных спутников Земли (МИСЗ) (до 500 кг, размером до 1 м и стоимостью от \$50000 US до нескольких миллионов, по данным НАСА [7]) такое допущение может оказаться некорректным. Поэтому в настоящей работе моменты инерции поплавков гиродемпферов также учитываются. Кроме того, в статье исследована возможность реализации аperiodического режима затухания собственных колебаний МИСЗ в целях их более быстрого затухания по сравнению с колебательным режимом. В результате рассмотрения динамической системы «МИСЗ – гиродемпферы» найдены значения конструктивных параметров, при которых реализуется аperiodический режим затухания собственных колебаний.

Ольшанский Владимир Юрьевич. Доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН (Саратов)

Курочкин Игорь Степанович. Аспирант Института проблем точной механики и управления РАН.

Для обеспечения демпфирования угловых колебаний МИСЗ по трем осям орбитальной системы координат (рис. 1, а) рассмотрим возможность использования [1] двух поплавковых двухстепенных гироскопов с большим коэффициентом демпфирования – гиродемпферов [2]. Векторы кинетических моментов их роторов удерживаются при отсутствии внешних возмущений в V-образном положении при помощи спиральных пружин, закрученных в противоположные стороны (такая схема получила название «V-крен»). Кинематическая схема системы «V-крен» представлена на рис. 1, б.

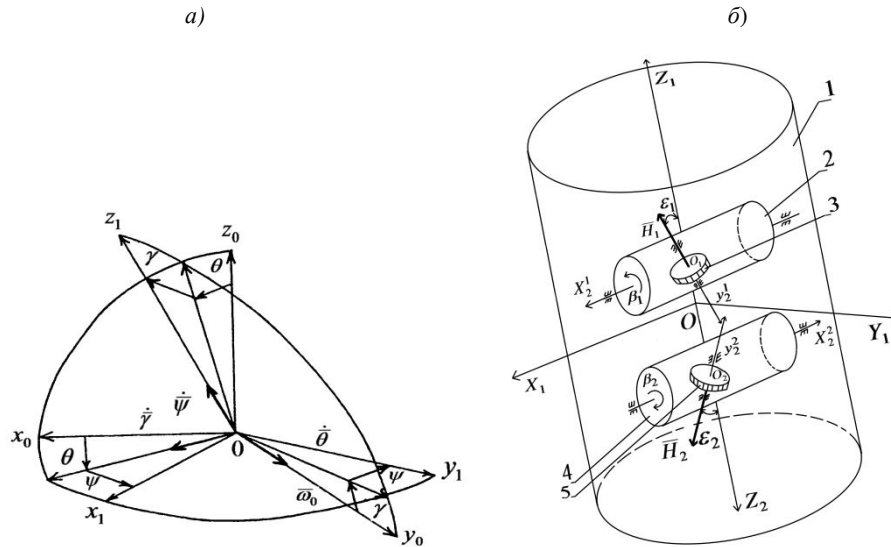


Рис. 1. Система углов Крылова:

- а) x_0, y_0, z_0 - орбитальная система координат, точка O совпадает с центром масс ИСЗ, x_1, y_1, z_1 - система координат, жестко связанная с МИСЗ, θ - угол тангажа, γ - крена, ψ - рыскания, ось OZ_0 направлена противоположно вертикали места.

Кинематическая схема системы «V-крен» демпфирования угловых колебаний МИСЗ:

- б) 1 - МИСЗ; 2 - поплавок первого гиродемпфера; 3 - ротор первого гиродемпфера с кинетическим моментом $\bar{H}_1$; 4 - поплавок второго гиродемпфера; 5 - ротор второго гиродемпфера с кинетическим моментом $\bar{H}_2$; β_1, β_2 - углы поворотов первого и второго поплавков соответственно; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - углы начальной выставки $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ относительно оси МИСЗ Oz_1

Собственные колебания МИСЗ по тангажу, крену и рысканию за счет гироскопических моментов вызывают вращение поплавков – гиродемпферов. Это приводит к рассеиванию энергии угловых движений системы «МИСЗ - гиродемпферы» за счет вязкого трения в жидкости, находящейся в зазорах между поплавком и корпусом каждого гиродемпфера. При проектировании «тяжелых» спутников пренебрегалось моментами инерции гиродемпферов по сравнению с моментами инерции ИСЗ. В данной работе данное допущение полагалось некорректным. В общем случае при идентичных гиродемпферах систему дифференциальных уравнений в линейной постановке за счет применения двух гиродемпферов в системе «V-крен» можно разделить [1] на систему четвертого порядка, описывающую колебания системы по тангажу, и систему шестого порядка, описывающую колебания МИСЗ по крену и рысканию. Это обусловлено

тем, что колебания МИСЗ по тангажу вызывают противофазное вращение поплавков гироскопов, а колебания по крену и рысканию – синфазное.

С помощью уравнений Лагранжа второго рода для описания колебаний по тангажу получим следующую систему:

$$\begin{cases} J_y^c \theta'' + 3\omega_0^2 (J_x^c - J_z^c) \theta - H \cos \varepsilon (\beta_1' - \beta_2') = 0 \\ J_n (\beta_1'' - \beta_2'') + K_d (\beta_1' - \beta_2') + H\omega_0 \sin \varepsilon (\beta_1 - \beta_2) + 2H \cos \varepsilon \theta' = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где J_y^c, J_x^c, J_z^c – моменты инерции относительно осей тангажа, крена и рыскания соответственно; ω_0 – угловая скорость вращения МИСЗ вокруг Земли по круговой орбите; $3\omega_0^2 (J_x^c - J_z^c) \theta$ – восстанавливающий момент гравитационных сил [5] относительно оси тангажа; H – кинетический момент роторов идентичных гироскопов; K_d – коэффициент их демпфирования; J_n – момент инерции поплавок гироскопа относительно оси его вращения; ε – угол начальной выставки векторов кинетических моментов роторов гироскопов относительно оси рыскания, направленной в сторону, противоположную вертикали места МИСЗ в плоскости орбиты. В нашем случае $H = H_1 = H_2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и обозначим

$$a^2 = \frac{3(J_x^c - J_z^c)}{J_y^c}, h = \frac{H}{J_y^c \omega_0}, \eta = \frac{K_d}{J_y^c \omega_0}, m = \frac{J_n}{J_y^c}, \quad \delta = \cos \varepsilon, s = \sin \varepsilon. \quad (2)$$

Тогда систему (1) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{cases} \theta'' + a^2 \theta - h \delta \beta' = 0 \\ m \beta'' + \eta \beta' + h s \beta + 2 h \delta \theta' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для МИСЗ в отличие от «тяжелых» спутников в системе (3) присутствует инерционный член « $m \beta''$ ».

Характеристическое уравнение системы (3) с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4 = 0; \quad (4)$$

$$p_1 = \eta / m, \quad p_3 = \eta a^2 / m, \quad p_4 = h s a^2 / m.$$

Ниже приведен способ нахождения значений конструктивных параметров, при которых все корни являются действительными отрицательными, и происходит апериодическое затухание начальных возмущений.

Искомые корни уравнения (4) запишем в виде $\lambda = \mu \cdot a$. Этот переход эквивалентен замене $\tau^* = a \tau$ в системе (3). Уравнение (4) примет вид

$$\mu^4 + q_1 \mu^3 + q_2 \mu^2 + q_3 \mu + q_4 = 0, \quad (5)$$

где $q_n = p_n / a^n$, $n = \overline{1, 4}$.

Теорема Виета дает связь между коэффициентами уравнения (5) и его корнями μ_i :

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = q_4, \quad \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4 = -q_3,$$

$$\mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 = q_2, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = -q_1. \quad (6)$$

Для приведенных выше коэффициентов уравнения (4) получим $q_1 = q_3$. Рассмотрим далее частный случай, когда $q_4 = 1$. Решение системы (5) в этом случае можно записать:

$$\mu_1 = -v_1, \quad \mu_2 = -1/v_1, \quad \mu_3 = -v_2, \quad \mu_4 = -1/v_2. \quad (7)$$

Первое уравнение системы (6) при этом выполнено, а второе уравнение совпадает с четвертым. Третье и четвертое уравнения будут:

$$(\mu_1 + \mu_2)(\mu_3 + \mu_4) = q_2 - 2, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = -q_1. \quad (8)$$

Обозначим $l = 2(h\delta)^2 / ma^2$. При $q_4 = 1$ имеем $q_2 = l + 2$. Введем переменные x, y :

$$\mu_1 + \mu_2 = -(v_1 + 1/v_1) = -x, \quad \mu_3 + \mu_4 = -(v_2 + 1/v_2) = -y. \quad (9)$$

Система (8) принимает вид:

$$xy = l, \quad x + y = q_1. \quad (10)$$

При $v_1 > 0, v_2 > 0$ из (9) следует $x \geq 2, y \geq 2$, и используемые параметры должны удовлетворять ограничениям $l \geq 4, q_1 \geq 4$. Из системы (9) получаем

$$x = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4l}) / 2, \quad y = (q_1 - \sqrt{q_1^2 - 4l}) / 2. \quad (11)$$

Без ограничения общности в формулах (6) можно считать $v_1 \geq 1, v_2 \geq 1$, тогда из уравнений (8) получим:

$$v_1 = (x + \sqrt{x^2 - 4}) / 2, \quad v_2 = (y + \sqrt{y^2 - 4}) / 2. \quad (12)$$

Выражения (7), (11), (12) позволяют по заданным значениям параметров, удовлетворяющим указанным ограничениям, найти вещественные отрицательные корни λ_i . Избежать проверки выполнения неравенств можно, задавая значения v_1, v_2 . При таком подходе можно заранее назначать корни характеристического уравнения в виде (7), то есть задавать апериодическое затухание возмущений, и подбирать затем конструктивные параметры гиродемпферов, обеспечивающие такое затухание.

Пусть некоторые значения $v_i \geq 1$ заданы, тогда, учитывая равенства (9), (10), получим следующие условия для коэффициентов уравнения (5):

$$q_1 = q_3 = v_1 + v_2 + 1/v_1 + 1/v_2, \quad q_2 = l + 2 = (1/v_1 + v_1)(1/v_2 + v_2) + 2, \quad q_4 = 1.$$

Учитывая формулы (4), (5), получим следующие связи между конструктивными параметрами и задаваемыми нами значениями $v_i \geq 1$

$$\eta / ma = v_1 + v_2 + 1/v_1 + 1/v_2, \quad (13)$$

$$(h\delta)^2 / ma^2 = (1/v_1 + v_1)(1/v_2 + v_2), \quad hs / ma^2 = 1.$$

Решение системы (3) при начальных условиях $\theta = \theta_0, \theta' = 0, \beta = 0, \beta' = 0$, имеет вид:

$$\theta = \sum C_m \exp(\lambda_m t), \quad \beta = \sum b_m \exp(\lambda_m t), \quad (14)$$

$$C_m = \theta_0 \frac{I_4 / \lambda_m - a^2(I_1 - \lambda_m)}{(\lambda_i - \lambda_m)(\lambda_j - \lambda_m)(\lambda_k - \lambda_m)},$$

$$b_m = -\frac{C_m}{hs} (h\delta\lambda_m + \frac{\eta}{h\delta}(\lambda_m^2 + a^2) + \frac{m}{h\delta}(a^2\lambda_m + \lambda_m^3)),$$

$$I_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4, \quad I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \quad (i,j,k,m) - \text{перестановки } (1,2,3,4).$$

П р и м е р. Пусть $v_1 = 4/3, v_2 = 5/4$, тогда $\mu_1 = -4/3, \mu_2 = -3/4, \mu_3 = -5/4, \mu_4 = -4/5, q_1 = q_3 = 62/15, q_2 = 301/48, q_4 = 1$, и условия (13) принимают вид:

$$\eta / ma = 62/15, \quad hs / ma^2 = 1, \quad h^2(1 - s^2) / ma^2 = 205/48$$

Пусть $h=1$, $m = 0.1$, тогда $s = 0.222549$, $\delta = 0.974921$, $a = 1.491809$, $\eta = 0.616614$.

Данные значения параметров достигаются, например, при $\varepsilon = 14,2875^\circ$, $J_x^c = J_y^c = 100 \text{ н·м·с}^2$, $J_z^c = 25.8169 \text{ н·м·с}^2$, $J_{\Pi} = 10 \text{ н·м·с}^2$, $H = 11,63552 \cdot 10^{-3} \text{ н·м·с}$, $K_d = 7.17463 \cdot 10^{-3} \text{ н·м·с}$.

Корни характеристического уравнения принимают следующие значения

$$\lambda_1 = -1.989079, \quad \lambda_2 = -1.864761, \quad \lambda_3 = -1.193447, \quad \lambda_4 = -1.118857$$

Для количественной оценки времени затухания собственных колебаний МИСЗ ограничимся [3] величиной Δ , составляющей 10% от величины начального углового возмущения. Заштрихованная область на рисунке 3 а) и б) составляет 2Δ от начального возмущения $\theta = 0.1$ при $\tau = 0$.

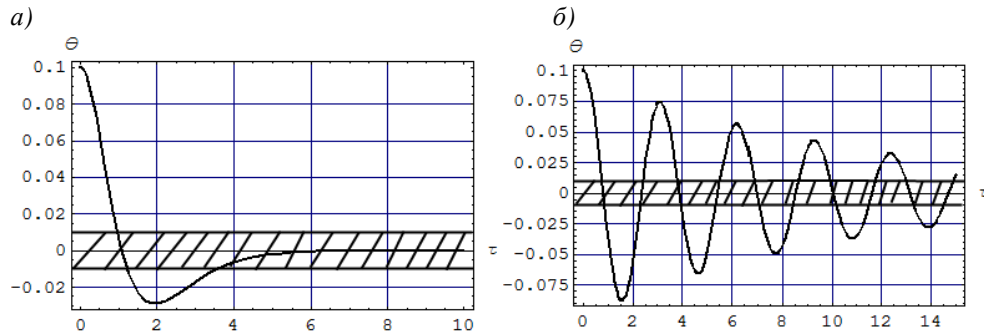


Рис. 3: а) - зависимость угла тангажа θ от безразмерного времени τ при $\eta=0.821656$, $h=1$, $m = 0.1$, $a = 1.491809$, $s = 0.222549$, $d = 0.9749211$ – система демонстрирует аперриодическое затухание колебаний; б) – колебательный режим затухания при изменении только двух параметров гиросдмпфера $\eta=1.0$, $h=0.8$

Таким образом, на этапе проектирования при соответствующем подборе параметров спутника и гиросдмпферов возможно обеспечение более быстрого (в несколько раз) затухания собственных колебаний МИСЗ в аперриодическом режиме по сравнению с колебательным (Рис. 3, «а», «б»). Это существенно увеличивает ресурс полезного функционирования на орбите и сокращает время подготовки МИСЗ к работе в режиме его постоянной ориентации к поверхности Земли. Кроме того, в аналитическом виде приведена методика отыскания действительных отрицательных корней механической системы с двумя степенями свободы с диссипативными и гироскопическими силами. На основе этой методики аналитически определены значения параметров, обеспечивающих аперриодическое затухание колебаний системы «МИСЗ – гиросдмпферы» по каналу тангажа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боевкин, В.И. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях / В. И. Боевкин [и др.].- М.: Наука, 1976.- 301 с.
2. Кузнецов, А.Ю. Программное изменение параметров дмпфирования поплавкового гиросдмпфера со ступенчатой формой рабочего зазора // Авиакосмическое приборостроение.- 2003.- № 11.- С. 2-5.
3. Сирант, А.Л. Исследование динамики космического аппарата с системой ориентации жидкостных ракетных двигателей малой тяги / А.Л.Сирант, Б.А.Титов // Вестник СГАУ.- 2004.- Вып. 1(12). - С. 98-105.
4. Джашигов, В.Э. Влияние параметрических возмущений на динамику гироскопического успокоителя собственных колебаний ИСЗ / В.Э.Джашигов, В.М.Панкратов, А.Ю.Кузнецов // X Санкт-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам.- СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор».- 2003.- С. 185-186.

