

О. А. СТЕПАНОВ, А. Б. ТОРОПОВ

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Применительно к нелинейным задачам обработки навигационной информации, суть которых заключается в оценивании вектора постоянных параметров, исследуются особенности и анализируются взаимосвязь и отличия линейного оптимального алгоритма, минимизирующего среднеквадратический критерий в классе линейных оценок, с нелинейным оптимальным алгоритмом, обеспечивающим нахождение математического ожидания апостериорной плотности. Полученные результаты иллюстрируются а примерами.

Введение

Ранее, в работах [1, 2] для решения нелинейных навигационных задач оценивания был предложен линейный оптимальный алгоритм. В работах [3–7] исследовалось применение этого алгоритма и его модификаций для оценивания вектора постоянных параметров при решении нелинейных навигационных задач, а также проводилось его сопоставление с известными субоптимальными алгоритмами калмановского типа, основанными на локальной линеаризации.

Следует заметить, что идея построения линейного оптимального алгоритма основана на минимизации среднеквадратического критерия в классе линейных алгоритмов. Это означает, что получающиеся в результате линейные оптимальные оценки даже при точном нахождении являются лишь субоптимальными оценками по отношению к байесовским оптимальным оценкам, обеспечивающим минимизацию среднеквадратического критерия без введения ограничений на класс используемых оценок. В общем случае алгоритмы нахождения таких оценок нелинейные. В этой связи представляется целесообразным уметь выявлять и оценивать возможный проигрыш линейного оптимального алгоритма по сравнению с байесовским оптимальным алгоритмом, чему в литературе должного внимания не уделяется.

Предлагаемая статья посвящена исследованию особенностей, взаимосвязей и отличий линейного оптимального алгоритма с оптимальным байесовским алгоритмом. В частности, на основе введенного понятия эквивалентных линейных измерений, используемых при нахождении линейных оценок и нижней границы по Рао – Крамеру, предлагается приближенно оценивать возможные потери в точности по сравнению с нелинейным оптимальным алгоритмом.

Постановка задачи

Рассматриваемая задача обработки навигационной информации формулируется следующим образом: оценить n -мерный постоянный случайный вектор

Степанов Олег Андреевич. Доктор технических наук, начальник Центра профессионального образования ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», С.-Петербург. Действительный член Академии навигации и управления движением.

Торопов Антон Борисович. Научный сотрудник ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор».

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T \text{ по } m\text{-мерным измерениям } \mathbf{y} = [y_1 \quad \dots \quad y_m]^T$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}, \quad (1)$$

в которых $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad s_m(\mathbf{x})]^T$ – известная m -мерная нелинейная вектор – функция векторного аргумента, $\mathbf{v} = [v_1 \quad \dots \quad v_m]^T$ – случайный вектор ошибок измерения. Считаем, что известна совместная функция плотности распределения вероятности (ф.п.р.в.) $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$. В целях упрощения полагаем, что случайные векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{x}$ независимы друг от друга, т.е. $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x})f(\mathbf{v})$, а $\mathbf{v}$ – центрированный. Известно, что оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка (оценка с минимальной дисперсией) $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, минимизирующая критерий

$$J = M[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}))], \quad (2)$$

и соответствующая ей матрица ковариаций ошибок оценивания, условные к измерениям $\mathbf{y}$, определяются как [2, 9]

$$\hat{\mathbf{x}}^{opt}(\mathbf{y}) = \int \mathbf{x} f(\mathbf{x} / \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{P}^{opt}(\mathbf{y}) = \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{opt}(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{opt}(\mathbf{y}))^T f(\mathbf{x} / \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

где M – знак математического ожидания, соответствующий плотности $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а $f(\mathbf{x} / \mathbf{y})$ – условная (апостериорная) ф.п.р.в. вектора $\mathbf{x}$. В этих соотношениях и далее интегралы понимаются как многократные с бесконечными пределами.

Матрица $\mathbf{P}^{opt}(\mathbf{y})$ характеризует точность оценивания вектора состояния для заданного набора измерений $\mathbf{y}$ и определяет расчетную характеристику точности.

При нелинейном характере функции $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ возникает проблема построения экономичных в вычислительном отношении субоптимальных алгоритмов, которые обеспечивают получение как самой оценки $\hat{\mathbf{x}}^{sub}(\mathbf{y})$, незначительно отличающейся по точности от точности оптимальной оценки, так и адекватной расчетной матрицы ковариаций ошибок $\mathbf{P}^{sub}(\mathbf{y})$.

Один из возможных вариантов построения субоптимальных алгоритмов основан на том, что минимизация критерия проводится в классе несмещенных оценок, линейно зависящих от измерений. Такой алгоритм назван **линейным оптимальным алгоритмом** (ЛОА) [1, 2]. Алгоритм нахождения оценки в виде условного среднего (3) в целях удобства будем называть **нелинейным оптимальным алгоритмом** (НОА).

Хотя рассматривается достаточно простая задача оценивания постоянного вектора, с необходимостью ее решения приходится нередко сталкиваться при обработке навигационной информации [1-7].

Цель работы – на примере рассматриваемой нелинейной задачи оценивания исследовать особенности и проанализировать взаимосвязь и отличия ЛОА и НОА.

Линейный оптимальный алгоритм и его особенности

Опишем вкратце основные этапы получения ЛОА [1, 2]. Из теории оценивания известно, что если задан составной вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T)^T$ и для него опреде-

лены математические ожидания $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, матрицы ковариаций $\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}$ и взаимная матрица ковариаций $\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}$, то при фиксированном известном значении вектора $\mathbf{y}$ линейная несмещенная оценка $\hat{\mathbf{x}}^{lin}$ вектора $\mathbf{x}$, обеспечивающая минимизацию критерия (2) в классе линейных оценок, и соответствующая ей матрица ковариаций определяются с помощью следующих соотношений [2, 9]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{lin}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_{\mathbf{xy}}\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}^{lin}[\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}], \quad (4)$$

$$\mathbf{P}^{lin} = M[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{lin}(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{lin}(\mathbf{y}))^T] = \mathbf{P}_{\mathbf{xx}} - \mathbf{P}_{\mathbf{xy}}\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{yx}}. \quad (5)$$

Если функция $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ линейная, т.е. $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$ ($\mathbf{H}$ – известная $m \times n$ матрица), легко убедиться в том, что

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{yy}} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}\mathbf{H}^T + \mathbf{P}_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{xy}} = \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}\mathbf{H}^T, \quad (6)$$

где $\mathbf{P}_{\mathbf{v}}$ – матрица ковариаций для вектора ошибок измерения $\mathbf{v}$. Если, кроме того, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$ гауссовские, то линейная оптимальная оценка (5) является оптимальной оценкой, т.е. совпадает с (3).

Если функция $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ нелинейная, то при нахождении $\hat{\mathbf{x}}^{lin}$ возникает проблема вычисления $\bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}$. Принимая во внимание (1) и тот факт, что $\bar{\mathbf{v}} = 0$, эти величины могут быть определены так:

$$\bar{\mathbf{y}} = \int \mathbf{s}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{yy}} = \int (\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})^T f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \mathbf{P}_{\mathbf{v}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xy}} = \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})^T f(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (8)$$

Таким образом, задача построения ЛОА сводится к вычислению взаимно ковариационной матрицы $\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}$, математического ожидания $\bar{\mathbf{y}}$, матрицы ковариаций $\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}$ и последующему вычислению оценки (4) и соответствующей ей расчетной матрицы ковариаций (5).

Для того чтобы понять особенность ЛОА и его взаимосвязь с НОА, представим исходные измерения (1) как линейные измерения вида

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}^{lin} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{H}^{lin}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{v}}, \quad (9)$$

в которых $\tilde{\mathbf{v}}$ – независимый от $\mathbf{x}$ центрированный случайный вектор с матрицей ковариаций $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{v}}}$.

В работах [1, 2] показано, что, вычисляя $\mathbf{H}^{lin}$ и $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ согласно выражениям

$$\mathbf{H}^{lin} = \mathbf{P}_{\mathbf{yx}}\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^{-1}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}_{\mathbf{yy}} - \mathbf{P}_{\mathbf{yx}}\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}, \quad (11)$$

первые два момента для составных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}^{lin}$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ будут одинаковыми.

Более подробно (10), (11) можно записать в виде:

$$\mathbf{H}^{lin} = \int (\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^{-1}, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}_{\partial on} + \mathbf{P}_{\mathbf{v}}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{P}_{\partial on} = \int (\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})^T f(\mathbf{x})d\mathbf{x} -$$

$$\int (\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^{-1} \int (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{y}})^T f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (14)$$

Будем называть далее представление измерений в виде (9) «оптимальными эквивалентными линейными» измерениями. Из (13) следует, что случайный вектор $\tilde{\mathbf{v}}$ может быть записан в виде суммы двух векторов

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{don} + \mathbf{v}, \quad (15)$$

где $\mathbf{v}_{don}$ – центрированный, независимый от $\mathbf{v}$ случайный вектор с матрицей ковариаций, определяемой (14).

Из представленных рассуждений ясно, что ЛОА может быть реализован путем решения задачи линейного оценивания в предположении, что модель измерений линейная и задана в виде (9).

Таким образом, можно отметить следующую особенность ЛОА по сравнению с НОА: исходные нелинейные измерения заменяются эквивалентными линейными измерениями, а для учета такой замены в модели измерений к исходному вектору ошибок $\mathbf{v}$ добавляется вектор дополнительных методических ошибок $\mathbf{v}_{don}$, обусловленных такой заменой.

Из сказанного с очевидностью вытекают возможные причины, по которым ЛОА будет проигрывать НОА в точности. Во-первых, это происходит в силу замены нелинейной функции ее линейной аппроксимацией, а во-вторых – за счет появления дополнительной ошибки измерений, обусловленной такой заменой.

Методика сопоставления НОА с ЛОА

Наиболее объективно оценить эффективность того или иного субоптимального алгоритма можно на основе сопоставления соответствующей ему точности с точностью НОА, которую будем называть потенциальной точностью. При сопоставлении следует использовать безусловные матрицы ковариаций ошибок для субоптимального $\mathbf{G}^{sub}$ и оптимального $\mathbf{G}^{opt}$ алгоритмов, определяемые как

$$\mathbf{G}^{\mu} = \iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{\mu}(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{\mu}(\mathbf{y}))^T f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}, \quad \mu = opt, sub$$

и вычисляемые с помощью метода статистических испытаний [11]. В частности, для оценки диагональных элементов $\mathbf{G}^{\mu}$ будем иметь

$$G_{kk}^{\mu} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L ((x_k^j - \hat{x}_k^{\mu}(\mathbf{y}^j))^2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где $\mathbf{x}^j = [x_1^j \dots x_n^j]^T$, $\mathbf{y}^j$, $j = \overline{1, L}$ – реализации случайных векторов, моделируемые с учетом вида $f(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{y})$; $\hat{x}_k^{\mu}(\mathbf{y}^j)$, $k = \overline{1, n}$ – компоненты вектора оценок для μ -го алгоритма, полученные для j -й реализации измерений, $j = \overline{1, L}$. Матрица $\mathbf{G}^{opt}$ характеризует потенциальную точность оценивания, в частности, диагональные элементы G_{kk}^{opt} определяют минимальную дисперсию ошибки оценивания соответствующих компонент вектора состояния.

Важной характеристикой при оценке эффективности субоптимальных алгоритмов является адекватность вырабатываемой в нем расчетной матрицы кова-

риаций $\mathbf{P}^{sub}(\mathbf{y})$. При проверке адекватности будем использовать матрицу

$$\tilde{\mathbf{G}}^\mu = \int \mathbf{P}^\mu(\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{P}^\mu(\mathbf{y}^j). \quad (17)$$

Расчетную матрицу ковариаций будем считать адекватной при совпадении $\mathbf{G}^\mu$ с $\tilde{\mathbf{G}}^\mu$. Нетрудно понять, что для НОА расчетная матрица ковариаций всегда адекватна своему действительному значению, поскольку

$$\mathbf{G}^{opt} = \int \mathbf{P}^{opt}(\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

В ЛОА в качестве расчетной матрицы ковариаций выступает матрица $\mathbf{P}^{lin}$, которая, как следует из (5), соответствует действительному значению безусловной матрицы ковариаций, и, таким образом, вырабатываемая в ЛОА характеристика точности также является адекватной.

Из соотношения (16) следует, что при вычислении потенциальной точности необходимо располагать оптимальной оценкой. Эта оценка может быть найдена, например, с использованием метода Монте-Карло или его модификаций, направленных на сокращение объема вычислений [2, 10, 12, 13].

Таким образом, для анализа эффективности субоптимальных алгоритмов требуется проводить большой объем моделирования. Процедура анализа точности может быть значительно упрощена, если воспользоваться неравенством Рао – Крамера, которое позволяет найти нижнюю границу для матрицы ковариаций ошибок оптимального оценивания [10, 12].

Для рассматриваемой задачи неравенство Рао – Крамера может быть записано в виде

$$\mathbf{G}^{opt} \geq \mathbf{J}^{-1}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{J} = M_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \left\{ \frac{d \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{d\mathbf{x}} \left(\frac{d \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{d\mathbf{x}} \right)^T \right\}.$$

Если дополнительно ввести предположение о гауссовском характере векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$, то можно показать, что

$$\mathbf{J}^{-1} = \left(\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^{-1} + \int \left[\frac{d\mathbf{s}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \mathbf{P}_{\mathbf{v}}^{-1} \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T} \right] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Матрица $\mathbf{J}^{-1}$ характеризует предельно достижимую точность, которую в дальнейшем будем называть *нижней границей точности* (НГТ).

Для сопоставления ЛОА и НГТ представляется целесообразным рассмотреть следующую вспомогательную линейную задачу оценивания. Предположим, что задан гауссовский случайный вектор $\mathbf{x}^*$, первые два момента которого совпадают с моментами вектора $\mathbf{x}$, и имеются следующие измерения:

$$\mathbf{y}^{HGT} = \mathbf{H}^{HGT} \mathbf{x}^* + \mathbf{v}^{HGT}, \quad (20)$$

где $\mathbf{v}^{HGT}$ – не зависящий от $\mathbf{x}^*$ центрированный гауссовский вектор ошибок измерений с матрицей ковариаций $\mathbf{P}_{\mathbf{v}}^{HGT}$. Поставим задачу нахождения таких матриц $\mathbf{H}^{HGT}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{v}}^{HGT}$, при которых $\mathbf{J}^{-1}$ будет совпадать с матрицей ковариаций ошибок оценивания вектора $\mathbf{x}^*$ по измерениям (20). Ясно, что матрицы

$\mathbf{H}^{HGT}$ и $\mathbf{P}_v^{HGT}$ могут быть найдены из соотношения

$$(\mathbf{H}^{HGT})^T (\mathbf{P}_v^{HGT})^{-1} \mathbf{H}^{HGT} = \int \left[\frac{d\mathbf{s}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \mathbf{P}_v^{-1} \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T} \right] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (21)$$

Вычисление (21) может вызывать затруднение, поэтому для оценки $\mathbf{J}^{-1}$ возможно использование матрицы ковариаций, соответствующей линейной задаче оценивания вектора $\mathbf{x}^*$ по измерениям типа (20), представляемым как

$$\tilde{\mathbf{y}}^{HGT} = \tilde{\mathbf{H}}^{HGT} \mathbf{x}^* + \mathbf{v}, \quad (22)$$

где $\mathbf{P}_v^{HGT} = \mathbf{P}_v$, $\tilde{\mathbf{H}}^{HGT} = \int \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, и, таким образом,

$$\tilde{\mathbf{P}}^{HGT} = \left(\mathbf{P}_{xx}^{-1} + \int \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \mathbf{P}_v^{-1} \int \frac{d\mathbf{s}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Привлекая обобщенное матричное неравенство Коши – Буняковского, можно показать, что справедливо следующее неравенство [12]:

$$\tilde{\mathbf{P}}^{HGT} \geq \mathbf{J}^{-1}.$$

Таким образом, $\tilde{\mathbf{P}}^{HGT}$ является оценкой сверху для $\mathbf{J}^{-1}$, а для ее нахождения достаточно найти матрицу ковариаций, соответствующую линейным измерениям (22), что в ряде случаев может быть сделано аналитически.

Учет факта адекватности вырабатываемой в ЛОА расчетной характеристики точности, а также наличие введенных эквивалентных линейных измерений (9) для ЛОА и (20) или (22) для НГТ, позволяют сопоставлять точности, достигаемые с использованием НОА с ЛОА. При этом следует помнить, что при таком сопоставлении предполагается, что потенциальная точность, определяемая $\mathbf{G}^{opt}$, близка к потенциально достижимой точности, задаваемой $\mathbf{J}^{-1}$.

Примеры

Для начала рассмотрим *методический* пример.

♦ **Пример 1.** Пусть требуется оценить скалярный параметр по скалярным измерениям вида [1]

$$\mathbf{y}_i = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}^3 + \mathbf{v}_i, \quad i = \overline{1..m},$$

в которых a и b – известные величины, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}_i$, $i = \overline{1..m}$ – центрированные гауссовские независимые между собой случайные величины с дисперсиями σ_0^2 и r^2 .

Линейный оптимальный алгоритм и оптимальные эквивалентные линейные измерения в этом примере будут определяться с учетом того, что при сделанных предположениях:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{xy} = \sigma_0^2 (a + 3b\sigma_0^2) \mathbf{I}_{1 \times m}, \quad \mathbf{P}_{yy} = (a^2 \sigma_0^2 + 15b^2 \sigma_0^6 + 6ab\sigma_0^4) \mathbf{I}_{m \times m} + r^2 \mathbf{E}, \\ \mathbf{H}^{lin} &= (a + 3b\sigma_0^2) \mathbf{I}_{1 \times m} = h^{lin} \mathbf{I}_{1 \times m}, \quad \mathbf{P}_{don} = 6b^2 \sigma_0^6 \mathbf{I}_{m \times m} = \sigma_d^2 \mathbf{I}_{m \times m}, \end{aligned}$$

где $f(x) = N(x, 0, \sigma_0^2)$; $\mathbf{I}_{1 \times m}$, $\mathbf{I}_{m \times m}$ – столбец $1 \times m$ и квадратная $m \times m$ матрица, составленные из единиц. Таким образом, для «оптимальных эквивалентных» линейных измерений будет справедливо представление

$$\mathbf{y}_i = h^{lin} \mathbf{x} + \mathbf{v}_i + v_{don}, \quad h^{lin} = (a + 3b\sigma_0^2), \quad i = \overline{1, m},$$

где $v_{don} = d$ – систематическая составляющая ошибки с дисперсией $\sigma_d^2 = 6b^2\sigma_0^6$. Т.е. дополнительная методическая ошибка в этом примере представляет собой систематическую составляющую общей ошибки $\tilde{\mathbf{v}}_i$.

Дисперсия, соответствующая ЛОА, может быть записана как

$$\mathbf{P}^{lin} = \frac{\sigma_0^2 m \sigma_d^2 + \sigma_0^2 r^2}{\sigma_0^2 m (h^{lin})^2 + (m \sigma_d^2 + r^2)}. \quad (24)$$

Нижняя граница точности соответствует дисперсии ошибки оценивания при использовании «эквивалентных линейных» измерений вида

$$\mathbf{y}_i^{HGT} = h^{HGT} \mathbf{x} + \mathbf{v}_i, \quad h^{HGT} = \sqrt{(a^2 + 6ab\sigma_0^2 + 27b^2\sigma_0^4)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (25)$$

т.е.

$$J^{-1} = \frac{\sigma_0^2 r^2}{\sigma_0^2 (h^{HGT})^2 m + r^2}. \quad (26)$$

Сопоставляя (26) с (24), нетрудно указать причины, по которым ЛОА может отличаться по точности от НОА.

Во-первых, это связано с тем, что коэффициент h^{lin} , определяющий производную, при оцениваемом параметре $\mathbf{x}$ в ЛОА меньше, чем при вычислении НГТ. Так, если уровень ошибок измерения существенно превышает уровень методических ошибок и $m\sigma_d^2 \ll r^2$, из (24) получаем

$$\mathbf{P}^{lin} \approx \frac{\sigma_0^2 r^2}{\sigma_0^2 m (h^{lin})^2 + r^2}. \quad (27)$$

Таким образом, $\mathbf{P}^{lin} > J^{-1}$, поскольку $h^{lin} < h^{HGT} = \sqrt{(h^{lin})^2 + 18b^2\sigma_0^4}$.

Во-вторых, отличие обусловлено присутствием дополнительной ошибки, которая здесь представляет собой случайную константу. Поскольку эта константа не наблюдаема, ее наличие ограничивает дисперсию ошибки оценивания для ЛОА. Если вторым слагаемым, определяющим вклад ошибки измерения в погрешность оценивания с помощью ЛОА в (28), можно пренебречь, то тогда

$$\mathbf{P}^{lin} \approx \frac{\sigma_0^2 \sigma_d^2}{\sigma_0^2 (h^{lin})^2 + \sigma_d^2}. \quad (28)$$

В частности, при $\sigma_0^2 (h^{lin})^2 \gg \sigma_d^2$ и $r^2 = 0$ имеем

$$\mathbf{P}^{lin} \approx \frac{\sigma_d^2}{(h^{lin})^2} = \frac{6b^2\sigma_0^6}{(a + 3b\sigma_0^2)^2}. \quad (29)$$

Таким образом, погрешность оценивания искомого $\mathbf{x}$ с помощью ЛОА не может быть меньше этой величины, что есть следствие того факта, что дополнительная составляющая ошибки не наблюдаема. К примеру, если $a=0$, то $\mathbf{P}^{lin} \geq \frac{2}{3}\sigma_0^2$, т.е. дисперсия ошибки оценивания с использованием ЛОА не может быть меньше величины, в сущности соизмеримой с σ_0 .

Оценку сверху для НГТ можно получить, привлекая эквивалентные линейные измерения

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \tilde{\mathbf{h}}^{HGT} \mathbf{x} + \mathbf{v}_i, \quad \tilde{\mathbf{h}}^{HGT} = \sqrt{(a^2 + 6ab\sigma_0^2 + 9b^2\sigma_0^4)} = h^{lin}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (30)$$

В этом случае оценка (23) для НГТ определяется как

$$\tilde{\mathbf{P}}^{HGT} = \frac{\sigma_0^2 r^2}{\sigma_0^2 m (\tilde{\mathbf{h}}^{lb})^2 + r^2}. \quad (31)$$

Сопоставив (31) и (24), обратим внимание, что при использовании оценки сверху для НГТ удастся выявить вторую, наиболее существенную из указанных выше причин возможных ограничений по точности для ЛОА по сравнению с НОА. Результаты моделирования, полностью подтвердили сделанные выводы.

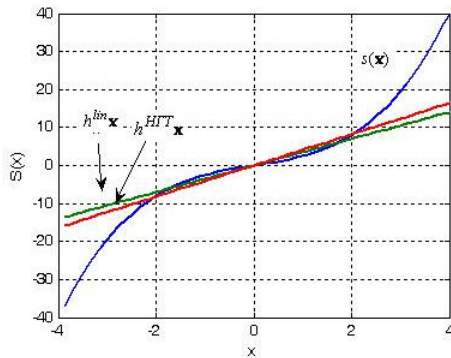


Рис. 1. Графики зависимости, $h^{lin} \mathbf{x}$, $h^{HGT} \mathbf{x}$

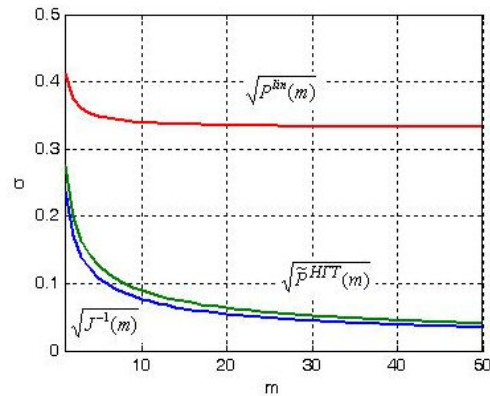


Рис. 2. $\sqrt{J^{-1}(m)}$, $\sqrt{\tilde{P}^{HGT}(m)}$, $\sqrt{P^{lin}(m)}$ при $\sigma_0 = 1$

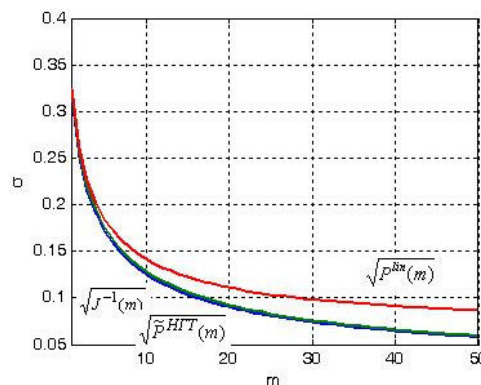


Рис. 3. $\sqrt{J^{-1}(m)}$, $\sqrt{\tilde{P}^{HGT}(m)}$, $\sqrt{P^{lin}(m)}$ при $\sigma_0 = 0,5$

На рис. 1 приведены графики функции и ее линейных представлений, используемых в ЛОА и при вычислении НГТ, для , , , а на рис. 2 и 3 графики зависимости , , от числа измерений, при , , , .

Поскольку, как отмечалось в предыдущем разделе, существует вопрос о соотношении НГТ и действительной потенциальной точности, кроме описанных были проведены расчеты, показавшие, что потенциальная точность в этом примере, определяемая согласно (16), при $\mu = opt$, практически совпадает с НГТ. При этом оптимальная оценка вычислялась с использованием метода Монте-Карло. Кроме того, были проведены расчеты, подтверждающие адекватность вырабатываемой в ЛОА расчетной характеристики точности. С этой целью с использованием (16) при $\mu = lin$ была вычислена действительная ошибка, которая, как и ожидалось, совпала с расчетной. ♦

Из приведенных результатов следует, что возможности линейного оптимального алгоритма в рассматриваемом примере ограничены в основном наличием дополнительной ошибки. Этот недостаток ЛОА достаточно просто выявляется на основе сопоставления вида эквивалентных линейных измерений для ЛОА и НГТ. Причем здесь важен даже не уровень этой ошибки, а ее свойства, в силу которых она не наблюдаема. При использовании НОА такая составляющая ошибки отсутствует, что и является причиной достижения более высокой точности по сравнению с ЛОА.

Любопытно также отметить, что в силу нелинейного характера задачи предельно достижимая точность и, как следствие, точность, соответствующая ЛОА, может повышаться при увеличении уровня априорной неопределенности. Особо отчетливо это следует из анализа выражений (24), (26), если принять $a = 0$.

Сопоставим далее ЛОА и НОА на примерах *нелинейных навигационных задач*.

♦ **Пример 2.** Рассмотрим задачу определения координат места на плоскости по информации о дальностях до двух точечных ориентиров. Для простоты примем, что объект расположен в окрестности начала координат. Измерения (1) для этой задачи можно представить в виде

$$y_i^k = s_i^k(\mathbf{x}) + v_i^k = \sqrt{(x_1 - x_1^k)^2 + (x_2 - x_2^k)^2} + v_i^k, \quad (32)$$

где $i = \overline{1, m}$, x_1^k, x_2^k – координаты точечных ориентиров, $k = \overline{1, 2}$, x_1, x_2 – неизвестные координаты объекта. Предположим, что матрица ковариаций вектора $\mathbf{x}$ имеет вид $\mathbf{P}_{xx} = \sigma_0^2 \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_2$ – единичная матрица размерности 2×2 , а ошибки измерения $\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} v_i^1 & v_i^2 \end{bmatrix}^T$ – центрированные, не зависящими между собой случайные векторы с матрицей ковариаций $\mathbf{P}_{v_i} = r^2 \mathbf{E}_2$.

В целях сопоставления ЛОА и НОА было проведено моделирование при следующих условиях: координаты ориентиров: $\mathbf{x}^1 = [\rho, 0]^T$, $\mathbf{x}^2 = [0, \rho]^T$. Значение ρ принималось равным 3000 m , $\sigma_0 = 500 - 750 \text{ m}$, а величина $r = 30 \text{ m}$ (0.01ρ). Интегралы (3), (7), (8), (16) отыскивались с использованием метода Монте-Карло.

Для оценки точности вычислялись значения, характеризующие действительные дисперсии ошибок оценок, соответствующих ЛОА ($\mu = lin$) и НОА ($\mu = opt$) по формулам типа (16).

Результаты моделирования при $\sigma_0 = 500 m$ приведены на рис. 4 для одной компоненты вектора состояния, для второй компоненты они аналогичны.

Видно, что НГТ совпадает с НОА. Это обосновывает возможность использования НГТ для анализа точности НОА. Сравнение σ^{opt} с σ^{lin} показывает их заметное отличие, т.е. точность ЛОА существенно ниже потенциальной точности. В целях выявления причин такого отличия попытаемся оценить проигрыш в точности, возникающий вследствие упомянутых выше причин — замены нелинейной функции линейной и появления дополнительной методической ошибки в модели эквивалентных линейных измерений.

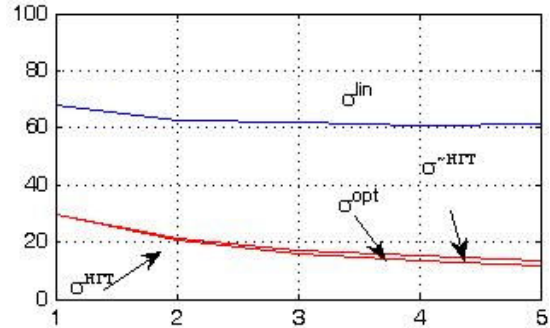


Рис. 4. Зависимость СКВ от числа измерений для НГТ (σ^{HGT}), её оценки ($\sigma^{\sim HGT}$), НОА (σ^{opt}) и ЛОА (σ^{lin})

Потери в точности вследствие замены нелинейной функции на линейную можно оценить на основании сравнения матриц $\mathbf{H}^{lin}$ и $\mathbf{H}^{HGT}$. Результаты моделирования и приближенного аналитического расчета показывают, что $\mathbf{H}^{lin} \approx \tilde{\mathbf{H}}^{HGT} \approx c\mathbf{H}^{HGT}$, где c — коэффициент, близкий к единице $c \approx 0,9 \div 1$. Если пренебречь вкладом дополнительной ошибки, то очевидно, что с точностью до коэффициента c можно полагать $\mathbf{P}^{lin} \approx \tilde{\mathbf{P}}^{HGT} \approx \mathbf{P}^{HGT}$. Это означает, что замена нелинейной функции на линейную в этом примере не приводит к заметной потере в точности.

Проанализируем теперь потери в точности, обусловленные наличием методической ошибки $\mathbf{v}_{don}$. В табл. 1 приведены параметры среднеквадратического эллипса (малая и большая полуоси). Их значения существенно превосходят принятое СКВ шума измерений r . Кроме того, с некоторой долей приближения можно принять $a_{don} \approx b_{don}$. Это означает, что составляющие дополнительной ошибки, соответствующие разным ориентирам, не коррелированы между собой. Поскольку для каждого ориентира вид функции при разных измерениях не меняется, дополнительная ошибка одинакова для всех измерений. Иными словами, для каждого ориентира наличие дополнительной ошибки эквивалентно наличию систематических составляющих ошибки, которые очевидно не наблюдаемы. Таким образом, основная причина отличия точности ЛОА от НОА — появление не наблюдаемой методической ошибки, уровень которой существенно превосходит уровень шума измерений. Для определения значения этой ошибки можно получить приближенное выражение

$$a_{don} \approx b_{don} \approx \sqrt{\sigma_0^2(1 - c^2 - \sigma_0^2/(4\rho^2))}.$$

Таблица 1		
Параметры среднеекватического эллипса		
	$\sigma_0 = 500$	$\sigma_0 = 750$
c	0.99	0.97
$a_{\text{доп}}, \text{м}$	63	143
$b_{\text{доп}}, \text{м}$	58	126

Таким образом, в рассматриваемой задаче сам факт замены нелинейной функции на линейную не приводит к заметной потере в точности, а основной причиной проигрыша в точности ЛОА по сравнению с НОА является появление не наблюдаемой дополнительной ошибки. ♦

Принимая во внимание полученные результаты, можно сформулировать необходимые условия, при которых с использованием ЛОА можно рассчитывать на получение точности, близкой к потенциальной. Суть их заключается в том, чтобы значения производных для линейной функции, с помощью которой аппроксимируется $s(\mathbf{x})$, незначительно отличались от осредненного в области априорной неопределенности значения производных $s(\mathbf{x})$, при этом необходимо, чтобы уровень методической ошибки был существенно ниже уровня шумов измерений. Эти условия хорошо могут быть проиллюстрированы на примере имеющей важное прикладное значение задачи навигации с использованием карты.

♦ **Пример 3.** Суть задачи навигации с использованием карты заключается в уточнении координат места подвижного объекта путем сопоставления измеренных и снятых с карты значений поля. Нелинейный ее характер обусловлен нелинейной зависимостью измеряемых параметров от координат объекта.

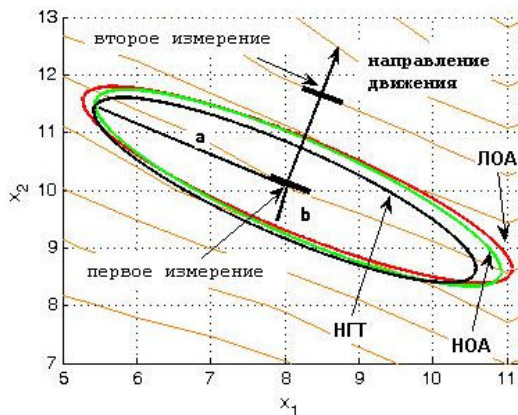


Рис. 5. Вид изолиний поля рельефа для задачи навигации с использованием карты и среднеекватические эллипсы ошибок, соответствующие ЛОА, НОА и НГТ

На рис. 5 представлен пример изолиний поля. Ясно, что на таком участке поля в принципе уточнить можно лишь составляющую координат в направлении, перпендикулярном направлению изолиний поля. Другая составляющая практически уточняться не будет, что подтверждается результатами расчета НГТ [2, 4, 11].

В данной задаче модель эквивалентных «линейных оптимальных» измерений можно записать в следующем виде:

$$y_i^{\text{lin}} = h_{1i}^{\text{lin}} x_1 + h_{2i}^{\text{lin}} x_2 + v_i + v_{\text{доп } i},$$

где $h_1^{\text{lin}} \cong \tilde{h}_1^{\text{НГТ}} = 0.15 \div 0.20$, $h_2^{\text{lin}} \cong \tilde{h}_2^{\text{НГТ}} = 0.09 \div 0.11$, $\sigma_{\text{доп}} \approx (0.3 - 0.4)r$.

В этих условиях можно ожидать, что точность ЛОА будет близка к потенциальной, что подтверждается результатами моделирования, представленными в табл. 2. Эти результаты соответствуют среднеекватическому эллипсу с параметрами $a, b = 1$.

Можно показать, что функция $s_i(x_1, x_2)$ в этом примере достаточно хорошо аппроксимируется плоскостью, у которой значение производной вдоль уточ-

Таблица 2.			
Параметры апостериорного среднеекватического эллипса ошибок после двух измерений			
	ЛОА	НОА	НГТ
a	0.98	0.98	0.80
b	0.15	0.14	0.14

няемого направления будет близко к значениям производной для исходной нелинейной функции. В этих условиях следует ожидать, что с помощью ЛОА можно обеспечить точность, близкую к потенциальной, что и подтверждается результатами моделирования. Эффективный алгоритм решения задачи навигации на основе ЛОА, обеспечивающий уточнение обеих составляющих координат, может быть построен путем последовательного использования участков, на которых уточняются различные направления. При этом можно сформулировать требования к участкам, при выполнении которых влияние дополнительной ошибки, обусловленной заменой нелинейной функцией ее линейным аналогом, будет незначительно сказываться на точности оценивания.

Заключение

В статье на примере простейшей нелинейной задачи обработки навигационной информации, суть которой заключается в оценивании вектора постоянных параметров, исследованы особенности и проанализирована взаимосвязь и отличия линейного оптимального алгоритма, минимизирующего среднеквадратический критерий в классе линейных оценок, и нелинейного оптимального алгоритма, обеспечивающего нахождение математического ожидания апостериорной плотности. На основе введенного понятия эквивалентных линейных измерений предложена методика, позволяющая приближенно оценивать возможные потери линейного алгоритма по сравнению с нелинейным.

Опыт использования ЛОА в навигационных задачах показал, что его применение для существенно нелинейных задач (задач, в которых апостериорная плотность имеет многоэкстремальный вид) не позволяет в общем случае получить точности, близкие к потенциальной точности. Для задач с одноэкстремальной апостериорной плотностью условия, при которых следует ожидать высокую точность, заключаются в том, чтобы значения производных для линейной функции, с помощью которой аппроксимируется $s(\mathbf{x})$, незначительно отличались от осредненного в области априорной неопределенности значения производных $s(\mathbf{x})$, при этом необходимо, чтобы уровень методической ошибки был существенно ниже уровня шумов измерений.

Как следует из представленных материалов, реализация ЛОА сводится к вычислению первых двух моментов (7)–(8) и последующему использованию соотношений (4), (5). В настоящей статье вопросы построения экономичных в вычислительном отношении процедур отыскания интегралов (7)–(8) не затрагивались. Однако заметим, что в последнее время применительно к решению задачи оценивания изменяющихся параметров предложен целый набор алгоритмов, основанных на приближенном вычислении указанных моментов. Здесь, несомненно, следует упомянуть, алгоритмы, использующие unscented преобразование (так называемые unscented и сигма-пойнт алгоритмы) [12 – 16]; алгоритмы, основанные на методе Монте-Карло и его модификациях [11, 17]; алгоритмы с использованием нейронных сетей [17], а также линейные регрессионные алгоритмы [18]). В дальнейшем предполагается исследовать особенности построения ЛОА в такой задаче и проанализировать связь ЛОА с указанными выше алгоритмами.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 09-08-00828-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов, О.А.** Линейный оптимальный алгоритм в нелинейных задачах обработки навигационной информации// Гироскопия и навигация. – 2006. – № 4. – С. 11–21.
2. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 496 с.
3. **Степанов, О.А.** Сопоставление субоптимальных алгоритмов калмановского типа в нелинейных навигационных задачах / О.А. Степанов, А.Б. Торопов, Ю.В. Королева //Труды VI Российской научно-технической конференции «Современное состояние и проблемы навигации и океанографии» НО-2007, СПб: ГУНиО МО, 2007. – С. 55-63.
4. **Торопов, А.Б.** Решение задачи корреляционно-экстремальной навигации на основе комбинированного использования линейного оптимального и итерационного алгоритмов/ Материалы IX конференции молодых ученых «Навигация и управление движением», - СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2007, - С. 235-242.
5. **Торопов, А.Б.** Оптимальные и субоптимальные линейные алгоритмы для решения нелинейных навигационных задач / А.Б. Торопов, Ю.В.Королева, В.А.Васильев // Материалы X конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2009. – С. 206-213.
6. **Королева, Ю. В.** Сопоставление субоптимальных алгоритмов калмановского типа для решения нелинейных задач оценивания параметров гармонического сигнала // Материалы IX конференции молодых ученых «Навигация и управление движением», СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2007. С. 228-234.
7. **Stepanov O. A., Amosov O.S., Toropov A.B.** (2007). Comparison of Kalman-Type Algorithms in Nonlinear Navigation Problems for Autonomous Vehicles. In: *Proc. of 6-th IFAC Symposium IAV-2007*.
8. **Bergman, N.** (1999). *Recursive Bayesian estimation. Navigation and Tracking Applications*. Linkoping Studies in Science and Technology. Dissertations, 579. Dept. Elect. Eng., Linkoping Univ., SE-581-83 Linkoping, Sweden.
9. **Meditch, J. S.** (1969). *Stochastic optimal linear estimation and control*. Mc. Graw Hill, New York
10. **Степанов О.А.** . *Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации*. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2003г, 369стр.
11. **Doucet, A., de Freitas, N. and Gordon, N.J.** Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Springer-Verlag, New York, 2001, p.581.
12. **Juiler, S. J., J. K. Uhlmann and H.F. Durrant-Whyte** (1995). A New Approach for Filtering Nonlinear Systems. In *Proceedings of American Control Conference*, Seattle, Washington, pp 1628-1632.
13. **Li, X. R. and V.P. Jilkov** (2004). A survey of Maneuvering Target Tracking: Approximation Techniques for Nonlinear Filtering. *Proc. 2004 SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego*, pp 537-535
14. **Juiler, S. J. and J. K. Uhlmann** (2004). Unscented Filtering and Nonlinear Estimation, *Proc. IEEE*, Vol. 92(3) , pp 401-422.
15. **Van der Merwe, R. and E. A. Wan** (2001). The Unscented Kalman Filter. In: *Kalman Filtering and Neural Networks* (Haykin S.), pp 221-268, John Wiley & Sons. Inc.
16. **Van der Merwe, R. and E. A. Wan** (2004). Sigma-Point Kalman Filters for Integrated Navigation. *ION 60th Annual Meeting U.S. Air Force Institute of Technology*.
17. **Stepanov, O.A. and O.S. Amosov** (2006). Optimal Estimation Algorithms Based on the Monte Carlo Method and Neural Networks for Nonlinear Navigational Problems. In: *Proc. of the CAC/CACD/ICC, Munich, Germany*.
18. **Lefebvre, T., H. Bruyninckx and J. De Schutter** (2005). *Nonlinear Kalman Filtering for Force-Controlled Robot Tasks*. Springer, Berlin.

Abstract. A nonlinear estimation problem often encountered in processing navigation data is considered. The linear optimal estimator (LOE) that minimizes the root mean-square (RMS) criterion in the class of linear estimates for this nonlinear estimation problem is investigated. The equivalent linear models for nonlinear measurements have been introduced for the LOE and the Cramer-Rao Bound. The features of the LOE in comparison with the Bayesian nonlinear optimal estimator (NOE), which corresponds to the conditional mean, are studied. Some examples are considered to illustrate the results obtained.

Материал поступил 19.05.10