

А. А. ГОЛОВАН, К. А. КУЗНЕЦОВА

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ В РЕЖИМЕ ПОСТОБРАБОТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФАЗОВЫХ И ДОПЛЕРОВСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИЕМНИКА СИГНАЛОВ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

*Навигационные измерения глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) служат важными данными для аэрогравиметрии [1, 2]. В коммерческом программном обеспечении ГНСС основное внимание уделяется выработке координат, а задача вычисления ускорения при помощи первичных спутниковых измерений – доплеровских и фазовых – практически не ставится. В настоящей работе представлено ее решение в режиме постобработки с использованием первичной спутниковой и эфемеридной информации. Основная идея состоит в дифференцировании первых разностей доплеровских и фазовых измерений. Приводится качественный анализ результатов обработки экспериментальных данных.*

*Статья написана в развитие подхода, изложенного в [2] для задачи определения скорости.*

**Ключевые слова:** аэрогравиметрия, глобальные спутниковые навигационные системы, доплеровские измерения, фазовые измерения, первые разности, численное дифференцирование.

### Введение

Основная задача обработки первичных измерений приемника сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) – определение местоположения объекта. Для ее решения привлекаются так называемые кодовые и/или фазовые спутниковые измерения, полученные в стандартном (автономном) или дифференциальном режиме функционирования приемников. Изучению этой задачи, математи-

---

**Голован** Андрей Андреевич. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией управления и навигации, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Действительный член общественного объединения «Академия навигации и управления движением». ORCID 0000-0001-5628-248X.

**Кузнецова** Ксения Алексеевна. Студент, МГУ имени М.В. Ломоносова.

ческих моделей и алгоритмов ее решения посвящено огромное число статей, сборников материалов конференций, фундаментальных монографий [3, 4] и др. Среди последних выделим [3], где представлено исчерпывающее описание моделей, задач и алгоритмов, применяемых в спутниковой навигации. В то же время вычислению ускорения внимания практически не уделяется. Ранее в статье [2] авторами рассматривалась методически схожая задача – расчет скорости объекта в режиме постобработки про помощи фазовых измерений приемника сигналов ГНСС. Основные модели и подходы, проанализированные в [2], применены и в настоящей статье. Далее решение задачи определения ускорения при помощи первичных измерений ГНСС будем для краткости называть акселерометрическим решением.

Вычислению ускорения объекта по сигналам ГНСС посвящена, в частности, статья [5]. Автор использует фазовые измерения, их первые разности, первую и вторую производные, но не описывает процесс численного дифференцирования. Акселерометрическое решение приводится не в гринвичской системе координат (в англоязычной литературе эта система называется Earth-Centered, Earth-Fixed – ECEF), а в инерциальных осях и представляет собой вторую производную позиционного решения.

Для пояснения важности вычисления ускорения по данным ГНСС [2] рассмотрим основное уравнение скалярной аэрогравиметрии [6] – уравнение движения чувствительной массы гравиметра в проекции на географическую вертикаль:

$$\ddot{h} = \dot{V}_{UP} = \underbrace{2uV_E \cos B}_{\text{поправка}} + \underbrace{\frac{V_E^2}{R_E + h} + \frac{V_N^2}{R_N + h}}_{\text{Этвеша}} + f_{UP} - g^{(n)} - \delta g. \quad (1)$$

Здесь  $B$ ,  $h$  – географические широта и высота;  $u$  – угловая скорость вращения Земли;  $R_E$ ,  $R_N$  – долготный и широтный радиусы кривизны навигационного эллипсоида Земли;  $V_E$ ,  $V_N$ ,  $V_{UP}$  – восточная, северная и вертикальная составляющие вектора скорости;  $f_{UP}$  – вертикальная компонента внешней удельной силы, действующей на чувствительную массу гравиметра;  $g^{(n)}$  – абсолютное значение нормальной составляющей удельной силы тяжести в проекции на географическую вертикаль, вычисляемое по известным моделям [7];  $\delta g = \delta g(L, B, h)$  – вертикальная компонента вектора возмущения силы тяжести [7],  $L$  – долгота места.

Основными данными для оценивания аномалии  $\delta g$  в уравнении (1) служат показания гравиметра, измеряющего величину  $f_{UP}$ , и спутниковая информация о координатах и скорости движения объекта, в частности о высоте полета  $h$  и вертикальной скорости  $V_{UP}$ .

Использование модели (1) в задаче расчета  $\delta g$  на основе акселерометрических решений очень условно можно описать следующим образом [2, 7]. Обозначим акселерометрическое решение  $a_{UP}^{GNSS}(t) = \ddot{h}$ , а проекцию на географическую вертикаль внешней удельной силы  $f$ , измеряемой гравиметром, –  $f_{UP}^{INS}(t)$ . Теперь на основе  $a_{UP}^{GNSS}(t)$ ,  $f_{UP}^{INS}(t)$  с учетом (1) мы сможем оценить аномалию силы тяжести.

Этот подход требует получения акселерометрических решений (см. также [19]) именно на основе обработки первичных спутниковых данных, прежде всего фазовых, как наиболее инструментально точных. Далее будем использовать режим постобработки первичной информации приемника сигналов ГНСС, зарегистрированной в стандартизованном формате Receiver Independent Exchange Format – RINEX (см., например, [16–18]).

Статья посвящена разработке математических моделей и алгоритмов вычисления ускорения объекта при помощи первичных измерений приемника сигналов ГНСС. Помимо введения она содержит 5 разделов. В разделе 1 рассматриваются базовые модели задачи с точки зрения теоретической механики [8]. В разделе 2 представлен алгоритм решения с привлечением первичных фазовых измерений, который разбит на два последовательных этапа. На первом этапе рассчитываются радиальные ускорения по линиям «объект – спутники», а на втором – с использованием полученных оценок методом наименьших квадратов (МНК) определяется ускорение фазового центра антенны приемника. В разделе 3 описываются модель и алгоритм расчета ускорения на основе доплеровских измерений. Раздел 4 посвящен теоретическому анализу спектральных плотностей мощности (СПМ) погрешностей акселерометрических решений на основе доплеровских и фазовых измерений. В разделе 5 приведены результаты обработки экспериментальных данных, в том числе подтверждающие основные выводы спектрального анализа. В заключении подводятся итоги исследования.

### 1. Базовые модели задачи определения ускорения

Уравнение для производной скорости фазового центра спутниковой антенны в осях гринвичской системы координат  $O\eta$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta^{rcv} &= 2\hat{u}_\eta V_\eta^{rcv} + g_\eta + f_\eta^{rcv}, \\ g_\eta &= g_\eta^0 - \hat{u}_\eta^2 \eta^{rcv}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $V_\eta^{rcv}$  – вектор скорости фазового центра относительно Земли ( $rcv \rightarrow receiver$ );  $u_\eta = (0, 0, u)^T$  – вектор угловой скорости вращения Земли ( $\hat{u}_\eta$  – кососимметрическая матрица, соответствующая вектору  $u_\eta$ );  $g_\eta, g_\eta^0$  – удельные силы тяжести и тяготения;  $f_\eta^{rcv}$  – внешняя удельная сила, действующая на объект.

Цель решения задачи – определить величину  $f_\eta^{rcv}$  или сумму  $f_\eta^{rcv} + g_\eta$ , так как абсолютное ускорение объекта складывается из ускорения силы тяготения и ускорения от воздействия внешних сил:

$$f_\eta^{rcv} = \dot{V}_\eta^{rcv} - 2\hat{u}_\eta V_\eta^{rcv} - (g_\eta^0 - \hat{u}_\eta^2 \eta^{rcv}). \quad (3)$$

Для вычисления вектора  $g_\eta^0$  применим модель из интерфейсного контрольного документа системы ГЛОНАСС [9]:

$$\begin{aligned} g_{\eta_1}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left( 5 \frac{(\eta_3^{rcv})^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta_1^{rcv}, \\ g_{\eta_2}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left( 5 \frac{(\eta_3^{rcv})^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta_2^{rcv}, \\ g_{\eta_3}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left( 5 \frac{(\eta_3^{rcv})^2}{r^2} - 3 \right) \right] \eta_3^{rcv}, \\ r &= \sqrt{(\eta_1^{rcv})^2 + (\eta_2^{rcv})^2 + (\eta_3^{rcv})^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu = 398600,44 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$  – константа гравитационного поля Земли;  $C_{20} = -1082,6257 \cdot 10^{-6}$  – коэффициент при второй зональной гармонике разложения

гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям;  $a = 6378136$  м – большая полуось модельного эллипсоида Земли координатной системы ПЗ-90.

Чтобы найти величину  $f_{\eta}^{rcv}$ , следует вычислить производную  $\dot{V}_{\eta}^{rcv}$  относительной скорости движения объекта.

Остальные члены в правой части уравнения ускорения формируются на основе известных позиционных и скоростных решений ГНСС:

$V_{\eta}^{rcv}$  – скорость, рассчитанная путем обработки доплеровских и/или фазовых измерений (см., например, [2]);

$\eta^{rcv}$  – координаты приемника, полученные обработкой кодовых и/или фазовых измерений (здесь эта задача не обсуждается);

$g_{\eta}^0(\eta^{rcv})$  – функция известных координат  $\eta^{rcv}$ .

Аналогично [2] разделим задачу расчета ускорения на два последовательных этапа. На этапе I оценим величины первых разностей ускорений по линиям «объект – спутники» с помощью дифференцирующего окна в сочетании с МНК. На этапе II рассчитаем ускорение с использованием МНК.

## 2. Алгоритм определения ускорения при помощи фазовых измерений

### Модель фазовых измерений

Будем следовать терминологии работы [3] и считать фазовые измерения  $Z_{\phi}$  результатом измерения разности фаз  $\phi$  между принимаемым спутниковым радиосигналом и генерируемым в приемнике опорным сигналом [3, 10]. Фазовые измерения интерпретируются как мера расстояния от объекта до спутника, поскольку их приращение для двух соседних отсчетов (при отсутствии сбоев, с точностью до вариаций атмосферных задержек, с учетом различий времени излучения и детектирования сигнала) пропорционально изменению расстояния «объект – спутник» на этом временном интервале. Запишем модель фазового измерения [3, 10] с размерностью [м]:

$$Z_{\phi}^{(i)} = \rho^{(i)} - c(\Delta\tau - \Delta T^{(i)}) + \lambda N^{(i)} + \Delta\phi_{atm}^{(i)} + \Delta\phi^{(i)s}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  – длина волны радиосигнала диапазона  $L_1$  или  $L_2$ ;  $\rho^{(i)}$  – расстояние от объекта до спутника;  $c$  – скорость света;  $\Delta T^{(i)}$  – погрешность часов  $i$ -го спутника;  $\Delta\tau$  – неизвестная общая погрешность часов приемника;  $N^{(i)}$  – целочисленная неопределенность фазового измерения;  $\Delta\phi_{atm}^{(i)}$  – погрешность от прохождения радиосигнала через слои ионосферы и тропосферы;  $\Delta\phi^{(i)s}$  – случайная составляющая.

Примечание. Если приемник двухчастотный, то на основе измерений в диапазонах  $L_1$  и  $L_2$  можно сформировать так называемую ионосферно-свободную комбинацию  $Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)}$  фазовых измерений [10, 8]:

$$Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)} = \lambda_1 \left( \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{Z_{\phi}^{(i)}(L_1)}{\lambda_1} - \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{Z_{\phi}^{(i)}(L_2)}{\lambda_2} \right), \quad (6)$$

где  $f_1, f_2$  – значения частот радиосигналов  $L_1, L_2$ ;  $\lambda_1, \lambda_2$  – соответствующие длины волн.

Комбинацию  $Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)}$  рекомендуется использовать при возмущении ионосферы.

Ниже приводятся соотношения для обработки фазовых измерений диапазона  $L_1$ , но их легко можно перенести и на случай использования  $Z_{\phi_{iono-free}}^{(i)}$ .

Далее полагаем, что при решении эфемеридной задачи и обработке кодовых псевдодалностей смоделированы погрешности  $\Delta T^{(i)}$  часов спутников, а также возможные атмосферные задержки, которые скомпенсированы в фазовых измерениях.

Будем считать, что  $1, 2, \dots, M$  – это условные номера спутников. Выделим спутник с наибольшим углом возвышения (зенитный) и обозначим его через  $M_z$ . Для удобства записи последующих формул будем считать, что зенитный спутник является последним в цепочке  $1, 2, \dots, M$ .

Введем первые разности фазовых измерений:

$$\nabla Z_{\phi}^{(i)} = Z_{\phi}^{(i)} - Z_{\phi}^{(M_z)}, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (7)$$

В соответствии с (5) теперь полезным сигналом будет первая разность расстояний от объекта до спутника  $\nabla \rho^{(i)} = \rho^{(i)} - \rho^{(M_z)}$ , основное ее свойство (7) – отсутствие погрешности  $\Delta t$  часов приемника.

### Этап I. Оценивание производных первых разностей фазовых измерений

Шкалой времени  $\{t_j\}$  спутникового приемника будем называть шкалу, определяемую частотой регистрации приемником первичных спутниковых измерений в формате RINEX. Например, если частота регистрации составляет 10 Гц, то приращение времени в RINEX-файле – 0,1 с.

Под истинной шкалой времени  $\{t_{r,j}\}$  понимается шкала времени [3]

$$t_{r,j} = t_j - \Delta\tau_j, \quad (8)$$

где  $\Delta\tau_j$  – погрешность часов приемника в момент времени  $t_j$ .

Погрешность  $\Delta\tau_j$  оценивается на этапе обработки кодовых измерений, результатом которой является величина  $\Delta\tilde{\tau}_j$ .

Шкалу времени  $\{\tilde{t}_j\} : \tilde{t}_j = t_j - \Delta\tilde{\tau}_j$  будем называть моделью истинной шкалы времени приемника, или, для краткости, неравномерной шкалой времени.

Примечание. В приемниках первых поколений величина  $\Delta\tau_j$  аппаратно поддерживается в диапазоне  $[-0,0005, 0,0005]$  с (реже  $[-0,001, 0,001]$  с) и ее изменение во времени носит пилообразный характер.

Итак, имеем две шкалы времени:

- равномерную –  $\{t_j\} : t_{j+1} = t_j + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}$ ;
- неравномерную –  $\{\tilde{t}_j\} : \tilde{t}_j = t_j - \Delta\tilde{\tau}_j$

Рассмотрим скользящий интервал (окно) времени

$$\left[ \tilde{t}_{j-\frac{N-1}{2}}, \tilde{t}_{j-\frac{N-1}{2}+1}, \dots, \tilde{t}_j, \dots, \tilde{t}_{j+\frac{N-1}{2}} \right], \quad j = \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} + 1, \dots,$$

где  $N$  – число отсчетов времени в рассматриваемом окне (будем задавать его нечетным во избежание фазовых сдвигов результата при дифференцировании).

Например, при  $N = 5$ :

$$\left[ \tilde{t}_{j-2}, \tilde{t}_{j-1}, \tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+1}, \tilde{t}_{j+2} \right], \quad j = 2, 3, \dots,$$

где  $\tilde{t}_j$  – время центральной точки окна.

Введем обозначение  $N_c = (N - 1)/2$ .

Для удобства преобразований заменим время в скользящем интервале так, чтобы время  $\tilde{t}_c^0 = \tilde{t}_j^0$  центральной точки было равно 0:

$$\tilde{t}_k^0 = \tilde{t}_k - \tilde{t}_j, k = \overline{j - N_c, j + N_c}.$$

Эту локальную временную шкалу назовем центрированной неравномерной шкалой. Именно ее мы будем использовать далее.

Для каждого момента времени  $\tilde{t}_k^0$  с помощью (7) сформируем первые разности  $\nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0)$ .

Примечание. Если спутниковый приемник мультисистемный (т.е. регистрирует измерения от разных систем – GPS, Galileo, BeiDou, ГЛОНАСС и др.), то первые разности формируются в рамках измерений каждой системы.

Полагаем, что на интервале  $[\tilde{t}_{j-N_c}^0, \tilde{t}_{j+N_c}^0]$

- не меняется состав спутникового созвездия;
- не изменяются номера зенитных спутников;
- нет сбоя фазы в фазовых измерениях  $Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0)$ ,  $k = \overline{j - N_c, j + N_c}$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

Отметим, что первые два условия соблюдаются благодаря логике обработки измерительной информации.

Теперь поставим задачу поиска на основе набора  $\{\nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0)\}$  первых разностей измерений значения второй производной  $\nabla \ddot{Z}_\phi^{(i)}$  в центральной точке  $\tilde{t}_c^0$  интервала дифференцирования.

Для решения аппроксимируем набор первых разностей квадратичной функцией времени. Ее удвоенный коэффициент при  $\tilde{t}_k^{0^2}$  будем считать искомой второй производной. Параметры функции вычислим с помощью МНК. Таким образом, на первом этапе обработки фазовых измерений необходимо решить  $(M - 1)$  задач оценивания.

Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) &= A^{(i)}(\tilde{t}_k^0)^2 + B^{(i)}\tilde{t}_k^0 + C^{(i)} + \nabla r_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0), \\ \nabla r_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) &= \Delta\phi^{(i)s}(\tilde{t}_k^0) - \Delta\phi^{(M_z)s}(\tilde{t}_k^0), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_{j-N_c}^0) \\ \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_{j-N_c+1}^0) \\ \dots \\ \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_{j+N_c}^0) \end{pmatrix}}_{\nabla Z_\phi^{(i)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} (\tilde{t}_{j-N_c}^0)^2 & \tilde{t}_{j-N_c}^0 & 1 \\ (\tilde{t}_{j-N_c+1}^0)^2 & \tilde{t}_{j-N_c+1}^0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{t}_{j+N_c}^0)^2 & \tilde{t}_{j+N_c}^0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_{\nabla\phi}} \underbrace{\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ B^{(i)} \\ C^{(i)} \end{pmatrix}}_{x^{(i)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla r_\phi^{(i)}(\tilde{t}_{j-N_c}^0) \\ \nabla r_\phi^{(i)}(\tilde{t}_{j-N_c+1}^0) \\ \dots \\ \nabla r_\phi^{(i)}(\tilde{t}_{j+N_c}^0) \end{pmatrix}}_{\nabla r_\phi^{(i)}}, \quad (10)$$

$$\text{или} \quad \nabla Z_\phi^{(i)} = H_{\nabla\phi} x^{(i)} + \nabla r_\phi^{(i)}, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (11)$$

Предполагая, что шумы фазовых измерений независимы в каждый момент времени  $\tilde{t}_k^0$ ,  $k = \overline{j - N_c, j + N_c}$ , а также индивидуальны для каждого спутника и остаточные атмосферные погрешности после вычисления первых разностей малы, мы используем для матрицы ковариаций  $W_\phi^{(i)} = M[\nabla r_\phi^{(i)} \nabla r_\phi^{(i)T}]$  модель равноточных измерений:

$$W_{\varphi}^{(i)} = \sigma_{\nabla\varphi}^{(i)^2} \cdot I, \quad \sigma_{\nabla\varphi}^{(i)^2} = \sigma_{\varphi}^{(i)^2} + \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (12)$$

где  $I$  – единичная матрица размерности  $N \times N$ ;  $\sigma_{\varphi}^{(i)^2}$  – дисперсия шума фазового измерения  $i$ -го спутника.

Обоснованием модели (12) для задачи МНК (11) служит следующее рассуждение: если принять во внимание зависимость интенсивности  $\sigma^{(i)^2}$  шума измерений от угла возвышения  $El$  спутника [2], то можно сделать вывод, что на ограниченном интервале времени  $[\tilde{t}_{j-N_c}^0, \tilde{t}_{j+N_c}^0]$  (в аэрогравиметрии – не более 1 с) углы возвышения существенно не изменяются, следовательно не меняется и значение

$$\sigma_{\nabla\varphi}^{(i)^2} = \sigma_{\varphi}^{(i)^2} + \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2}.$$

Тогда

$$\tilde{x}^{(i)} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(i)} \\ \tilde{B}^{(i)} \\ \tilde{C}^{(i)} \end{pmatrix} = (H_{\nabla\varphi}^T H_{\nabla\varphi})^{-1} H_{\nabla\varphi}^T \nabla Z_{\varphi}^{(i)} = H_{\varphi}^{\oplus} \nabla Z_{\varphi}^{(i)}, \quad (13)$$

где  $H_{\varphi}^{\oplus}$  – псевдообратная матрица (не зависит от номера  $i$ ).

Величину  $2\tilde{A}^{(i)}$  будем считать оценкой  $\nabla \tilde{A}_p^{(i)}$  первой разности  $A_p^{(i)} - A_p^{(M_z)}$  радиальных ускорений «объект – спутники», отнесенной к центральной точке  $\tilde{t}_c^0$  интервала дифференцирования  $[\tilde{t}_{j-N_c}^0, \tilde{t}_{j+N_c}^0]$ :

$$\nabla \tilde{A}_p^{(i)}(\tilde{t}_c^0) = 2\tilde{A}^{(i)}. \quad (14)$$

Соотношения для погрешности расчета  $\Delta x^{(i)}$  и погрешности оценки  $\Delta A^{(i)} = A^{(i)} - \tilde{A}^{(i)}$  величины  $\nabla \tilde{A}_p^{(i)}$  аналогичны приведенным в [2], но в них используется псевдообратная матрица, которая состоит уже из трех строк размерностью  $1 \times N$ :

$$H_{\varphi}^{\oplus} = \begin{pmatrix} h_I^T \\ h_{II}^T \\ h_{III}^T \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\Delta A^{(i)} = -h_I^T \nabla r_{\varphi}^{(i)}, \quad M[\Delta A^{(i)^2}] = \sigma_{\nabla\varphi}^{(i)^2} \|h_I\|^2. \quad (16)$$

Погрешности оценки  $\Delta A^{(l)}, \Delta A^{(k)}$ , ( $l \neq k$ ) оказываются коррелированными, поскольку в соответствующих измерениях присутствуют данные от одного и того же зенитного спутника. Это свойство будет учитываться при построении алгоритмов этапа II.

В случае независимости погрешностей фазовых измерений от каждого спутника имеем:

$$M[\Delta A^{(l)} \Delta A^{(k)}] = \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \|h_I\|^2, \quad (17)$$

$$M[\Delta A \Delta A^T] = W_{\nabla\varphi} = \begin{pmatrix} \sigma_{\nabla\varphi}^{(1)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \\ \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\nabla\varphi}^{(2)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\nabla\varphi}^{(M-2)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} \\ \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \dots & \sigma_{\varphi}^{(M_z)^2} & \sigma_{\nabla\varphi}^{(M-1)^2} \end{pmatrix} \|h_I\|^2. \quad (18)$$

Формулы псевдообращения

С учетом выводов статьи [2] далее мы будем использовать только центрированную неравномерную шкалу времени  $\{\tilde{t}_k^0\}$ .

В этом случае:

$$H = \begin{pmatrix} (\tilde{t}_{j-N_c}^0)^2 & \tilde{t}_{j-N_c}^0 & 1 \\ (\tilde{t}_{j-N_c+1}^0)^2 & \tilde{t}_{j-N_c+1}^0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{t}_j^0)^2 & \tilde{t}_j^0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{t}_{j+N_c}^0)^2 & \tilde{t}_{j+N_c}^0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$H^T H = \begin{pmatrix} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^4 & \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^3 & \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2 \\ \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^3 & \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2 & \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \tilde{t}_k^0 \\ \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2 & \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \tilde{t}_k^0 & N \end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^4, & b &= \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^3, \\ e &= \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2, & d &= \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \tilde{t}_k^0. \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H^T H &= \begin{pmatrix} a & b & e \\ b & e & d \\ e & d & N \end{pmatrix}, \\ (H^T H)^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(H^T H) = aeN - e^3 - Nb^2 - d^2a + 2ebd, \\ a_{11} &= Ne - d^2, a_{12} = -Nb + ed, a_{13} = bd - e^2, \\ a_{22} &= aN - e^2, a_{23} = -ad + eb, a_{33} = ae - b^2. \end{aligned}$$

В соответствии с (20), (21) для (13) получаем:

$$\tilde{A}^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \left( a_{11} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2 \nabla Z_\varphi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) + a_{12} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \tilde{t}_{r,k}^0 \nabla Z_\varphi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) + a_{13} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \nabla Z_\varphi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) \right), \tag{22}$$

$$\tilde{B}^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \left( a_{12} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2 \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) + a_{22} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \tilde{t}_k^0 \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) + a_{23} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) \right), \quad (23)$$

$$\tilde{C}^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \left( a_{13} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} (\tilde{t}_k^0)^2 \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) + a_{23} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \tilde{t}_k^0 \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) + a_{33} \sum_{k=j-N_c}^{j+N_c} \nabla Z_\phi^{(i)}(\tilde{t}_k^0) \right). \quad (24)$$

**Примечание.** Оценка  $\tilde{C}^{(i)}$  больше не задействуется в исследуемых задачах, но ее следует применять при анализе невязок решения (13) МНК для диагностики возможных сбоев фазовых измерений. Здесь же отметим, что именно случаи  $N=3, N=5$  рассматриваются в задачах комплексной обработки информации в аэрогравиметрии.

### Этап II. Расчет ускорения при помощи оценок вторых производных первых разностей фазовых измерений

Путем двойного дифференцирования уравнения для расстояния «объект – спутник» можно показать, что радиальное ускорение  $A_\rho^{(i)}$  является суммой двух составляющих:

$$A_\rho^{(i)} = A_I^{(i)} + A_{II}^{(i)}, \quad (25)$$

$$A_I^{(i)} = \frac{(V_\eta^{sat_i} - V_\eta^{rcv})^T (V_\eta^{sat_i} - V_\eta^{rcv})}{\rho^{(i)}} - \frac{(V_\rho^{(i)})^2}{\rho^{(i)}} + \frac{(\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})^T \dot{V}_\eta^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \quad (26)$$

$$A_{II}^{(i)} = -\frac{(\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})^T \dot{V}_\eta^{rcv}}{\rho^{(i)}}. \quad (27)$$

Здесь  $\eta^{sat_i} = (\eta_1^{sat_i}, \eta_2^{sat_i}, \eta_3^{sat_i})^T$  – координаты  $i$ -го спутника в гринвичских осях [2, 6, 11];

$V_\eta^{sat_i} = (V_{\eta_1}^{sat_i}, V_{\eta_2}^{sat_i}, V_{\eta_3}^{sat_i})^T$  – вектор относительной (по отношению к Земле) скорости спутника;

$V_\eta^{rcv} = (V_{\eta_1}^{rcv}, V_{\eta_2}^{rcv}, V_{\eta_3}^{rcv})^T$  – вектор относительной скорости приемника, взятый из скоростного решения;

$\rho^{(i)} = \sqrt{(\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})^T (\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})}$  – расстояние от объекта до спутника;

$V_\rho^{(i)} = V_\rho^{sat_i} + V_\rho^{rcv_i}$  – радиальная скорость «объект – спутник», где

$$V_\rho^{sat_i} = \frac{(\eta^{sat_i} - \eta^{rcv})^T}{\rho^{(i)}} V_\eta^{sat_i}, \quad (28)$$

$$V_\rho^{rcv_i} = \frac{(\eta^{sat_i} - \eta)^T}{\rho^{(i)}} V_\eta^{rcv}.$$

Для расчета величины  $\dot{V}_\eta^{sat_i}$  естественно воспользоваться известным динамическим уравнением движения (3):

$$\dot{V}_\eta^{sat_i} = 2\hat{u}_\eta V_\eta^{sat_i} + g_\eta^0(\eta^{sat_i}) - \hat{u}_\eta^2 \eta^{sat_i}. \quad (29)$$

Первую составляющую  $A_I^{(i)}$  можно вычислить в явном виде на основе данных о координатах и скоростях спутника и объекта, а величина  $A_{II}^{(i)}$  содержит информацию об искомой производной  $\dot{V}_\eta^{rcv}$  скорости объекта.

При помощи первых разностей фазовых измерений на этапе I на неравномерной шкале времени определяются оценки  $\nabla \tilde{A}_p^{(i)}(\tilde{t}_c^0)$  первых разностей радиальных ускорений «объект – спутники», см. (13), (14).

Введем вектор измерений  $\nabla Z_{A_p}$  для момента времени  $\tilde{t}_c^0$ :

$$\nabla \tilde{Z}_{A_p} = \left( \nabla \tilde{A}_p^{(1)}, \nabla \tilde{A}_p^{(2)}, \dots, \nabla \tilde{A}_p^{(M-1)} \right)^T. \quad (30)$$

Скомпенсируем в момент времени  $\tilde{t}_c^0$  оценки первых разностей радиальных ускорений на величины  $\nabla A_I^{(i)}$ :

$$z_{A_p} = z_{A_p}(\tilde{t}_c^0) = \nabla \tilde{Z}_{A_p}(\tilde{t}_c^0) - \nabla A_I(\tilde{t}_c^0), \quad (31)$$

где 
$$\nabla A_I(\tilde{t}_c^0) = \left( \nabla A_I^{(1)}(\tilde{t}_c^0), \nabla A_I^{(2)}(\tilde{t}_c^0), \dots, \nabla A_I^{(M-1)}(\tilde{t}_c^0) \right)^T, \quad (32)$$

$$\nabla A_I^{(i)}(\tilde{t}_c^0) = A_I^{(i)}(\tilde{t}_c^0) - A_I^{(M_z)}(\tilde{t}_c^0), i = \overline{1, M-1}. \quad (33)$$

В результате получим модель для расчета производной скорости приемника при помощи первых разностей фазовых измерений:

$$z_{A_p} = H_{\nabla} \dot{V}_{\eta}^{rcv} + \Delta A, H_{\nabla} = H_{\nabla}(\tilde{t}_c^0), \quad (34)$$

где

$$H_{\nabla} = \begin{pmatrix} h_{(1)}^{*T} \\ h_{(2)}^{*T} \\ \dots \\ h_{(M-1)}^{*T} \end{pmatrix}, h_{(i)}^{*T} = h_{(i)}^T - h_{(M_z)}^T, i = \overline{1, M-1}, \quad (35)$$

$$h_{(i)}^T = \left( \frac{\eta_1^{rcv} - \eta_1^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \frac{\eta_2^{rcv} - \eta_2^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \frac{\eta_3^{rcv} - \eta_3^{sat_i}}{\rho^{(i)}} \right). \quad (36)$$

Отметим, что  $\Delta A = (\Delta A^{(1)}, \Delta A^{(2)}, \dots, \Delta A^{(M-1)})^T$  – это погрешности, которые зависят не только от разностей погрешностей фазовых измерений в каждой эпохе (т.е. в момент времени регистрации измерений приемником ГНСС), но и от их вариации от эпохи к эпохе.

Теперь найдем искомую оценку  $\dot{V}_{\eta}^{rcv}$ :

$$\dot{V}_{\eta}^{rcv} = \left( H_{\nabla}^T W_{\nabla\phi}^{-1} H_{\nabla} \right)^{-1} H_{\nabla}^T W_{\nabla\phi}^{-1} z_{A_p}. \quad (37)$$

### 3. Алгоритм определения ускорения с использованием доплеровских измерений

#### Модель доплеровских измерений

Рассмотрим методически схожую задачу вычисления ускорения с привлечением первичных доплеровских измерений, используя модель, описанную в [2, 8]. Предположим, что при необходимости первичные доплеровские измерения преобразуются таким образом, что в результате доплеровское измерение  $Z_V^{(i)}$  навигационного спутника с условным номером  $i$  приобретает размерность [м/с].

Обобщенная модель первичных доплеровских измерений  $Z_V^{(i)}$  имеет вид [3, 9]:

$$Z_V^{(i)} = V_p^{(i)} - \Delta V_p + \Delta V^{(i)s}, \quad (38)$$

где  $V_p^{(i)}$  – радиальная скорость «объект – спутник», полезный сигнал измерения;  $\Delta V_p$  – неизвестная величина, называемая здесь скоростью ухода часов приемника, общая для всех измерений в эпохе;  $\Delta V^{(i)s}$  – остаточный шум измерения.

В модели (38) не учитываются методические погрешности пренебрежимо малого уровня, например вызванные скоростью ухода часов спутника, погрешностью от многолучевости и др. [10].

#### Оценивание производных первых разностей доплеровских измерений

Поставим задачу на основе набора первых разностей измерений  $\nabla Z_V^{(i)}(\tilde{t}_{j-N_c}^0), \nabla Z_V^{(i)}(\tilde{t}_{j-N_c+1}^0), \dots, \nabla Z_V^{(i)}(\tilde{t}_{j+N_c}^0)$ ,  $i = 1, M-1$  в моменты времени  $\tilde{t}_k^0$ ,  $k = j - N_c, j + N_c$  оценить значение производной  $\nabla \dot{Z}_V^{(i)}$  в центральной точке  $\tilde{t}_c^0$  интервала дифференцирования.

Для этого аппроксимируем набор  $\{\nabla Z_V^{(i)}(\tilde{t}_k^0)\}$  первых разностей линейной функцией времени и будем ее наклон считать искомой производной. Параметры функции рассчитаем с помощью МНК. Алгоритм аппроксимации линейной функцией используется в задаче определения скорости и подробно описан в [2].

Этап II задачи расчета ускорения при помощи доплеровских измерений аналогичен этапу II, описанному выше для фазовых измерений.

#### 4. Анализ спектральных плотностей мощности погрешностей акселерометрических решений

В спутниковых акселерометрических решениях присутствует шумовая составляющая, обусловленная погрешностями первичных измерений (доплеровских, фазовых). Оценим ее влияние на эти решения путем анализа соответствующих СПМ. Для простоты рассмотрим случай, когда решения получены на равномерной шкале времени.

##### СПМ при использовании фазовых измерений

Предположим, что погрешности  $q_{Z_\phi}^{(i)}(t_k)$  фазовых измерений являются дискретным белым шумом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\phi^2$  [3]. Найдем СПМ для акселерометрических решений с разными моделями дифференцирующих окон, описанных в [2].

1. Модель второй центральной разности при  $N = 3$ :

$$\nabla \ddot{Z}_\phi^{(i)}(t_k) = \frac{\nabla Z_\phi^{(i)}(t_k + \Delta t) - 2\nabla Z_\phi^{(i)}(t_k) + \nabla Z_\phi^{(i)}(t_k - \Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (39)$$

Таким образом, фильтр для расчета СПМ модели (39) имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega\Delta t} - 2 + e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t^2} = \frac{2(\cos \omega\Delta t - 1)}{\Delta t^2}, \quad (40)$$

где  $j$  – мнимая единица.

Тогда для СПМ погрешностей фазовых измерений верна модель [15]:

$$S_{q_{z_\phi}}(\omega) = \left| \frac{2(\cos \omega \Delta t - 1)}{\Delta t^2} \right|^2 S_{q_{z_\phi}}(\omega) = \frac{4(\cos \omega \Delta t - 1)^2}{\Delta t^4} S_{q_{z_\phi}}(\omega), \quad (41)$$

где 
$$S_{q_{z_\phi}}(\omega) = \frac{\sigma_\phi^2}{2\pi}. \quad (42)$$

2. Модель второй центральной разности при  $N = 5$ :

$$\nabla \ddot{Z}_\phi^{(i)}(t_k) = 2 \times \left( \frac{\nabla Z_\phi^{(i)}(t_k + 2\Delta t) - \frac{1}{2} \nabla Z_\phi^{(i)}(t_j + \Delta t) - \nabla Z_\phi^{(i)}(t_j) - \frac{1}{2} \nabla Z_\phi^{(i)}(t_k - \Delta t) + \nabla Z_\phi^{(i)}(t_k - 2\Delta t)}{7\Delta t^2} \right). \quad (43)$$

Следовательно, СПМ принимает вид:

$$S_{q_{z_\phi}}(\omega) = \frac{4(2 \cos 2\omega \Delta t - \cos \omega \Delta t - 1)^2}{49\Delta t^4} S_{q_{z_\phi}}. \quad (44)$$

*СПМ при использовании доплеровских измерений*

Предположим, что погрешности  $q_{z_V}^{(i)}(t_k)$  доплеровских измерений являются производной дискретного белого шума с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_V^2$  [3], и вычислим СПМ для решений с различными моделями дифференцирующих окон.

1. Модель первой центральной разности при  $N = 3$ :

$$\nabla \dot{Z}_V^{(i)}(t_k) = \frac{\nabla Z_V^{(i)}(t_k + \Delta t) - \nabla Z_V^{(i)}(t_k - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (45)$$

Следовательно, формирующий фильтр для СПМ погрешностей модели (42) имеет вид [15]

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega\Delta t} - e^{-j\omega\Delta t}}{2\Delta t} = \frac{j \sin \omega \Delta t}{\Delta t}. \quad (46)$$

Тогда

$$S_{q_{z_V}}(\omega) = \left| \frac{j \sin \omega \Delta t}{\Delta t} \right|^2 S_{q_{z_V}}(\omega) = \frac{\sin^2(\omega \Delta t)}{\Delta t^2} S_{q_{z_V}}(\omega), \quad (47)$$

где 
$$S_{q_{z_V}}(\omega) = \frac{\sigma_V^2}{2\pi}. \quad (48)$$

2. Соответствующая (45) модель первой центральной разности [2] при  $N = 5$ :

$$\nabla \dot{Z}_V^{(i)}(t_k) = \frac{\nabla Z_V^{(i)}(t_k + 2\Delta t) + \frac{1}{2} \nabla Z_V^{(i)}(t_k + \Delta t) - \frac{1}{2} \nabla Z_V^{(i)}(t_k - \Delta t) - \nabla Z_V^{(i)}(t_k - 2\Delta t)}{5\Delta t}. \quad (49)$$

Тогда

$$S_{q_{zv}}(\omega) = \frac{4 \left( \frac{1}{2} \sin \omega \Delta t + \sin(2\omega \Delta t) \right)^2}{25 \Delta t^2} S_{q_{zv}}(\omega). \quad (50)$$

Примечание. Отметим, что модели (43) и (49) для центральной первой и второй разностей ранее не были описаны в литературе. Известные модели были получены с предположением об идеальности измерений. Использование МНК для получения численных формул первой и второй производных позволяет учитывать погрешности первичных измерений.

Итак, приведенные выше формулы описывают модельные распределения СПМ погрешностей акселерометрических решений при разной ширине окна дифференцирования. Графики теоретически полученных СПМ показаны на рис. 1.

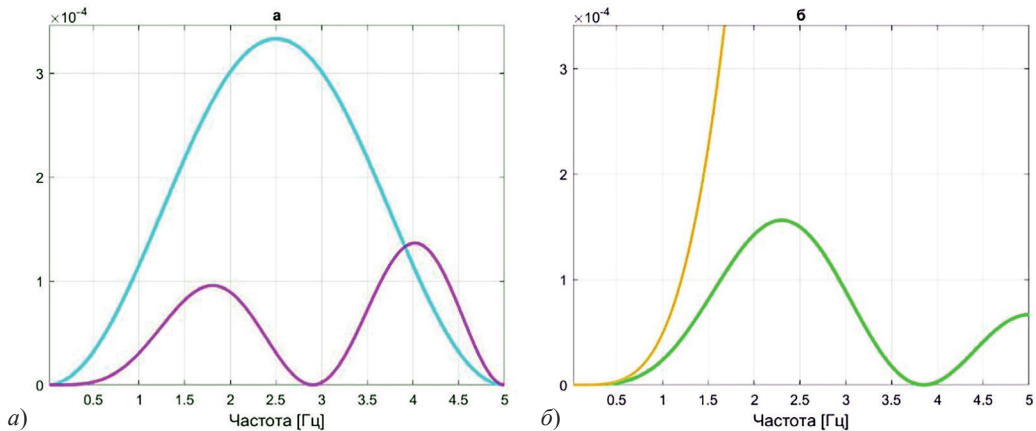


Рис. 1. Кривые нормированной СПМ погрешностей акселерометрических решений:  
 а) при  $N = 3$  (голубой цвет),  $N = 5$  (розовый) и использовании доплеровских измерений;  
 б) при  $N = 3$  (желтый),  $N = 5$  (зеленый) и использовании фазовых измерений

Заметим, что на обоих графиках значение СПМ при  $N = 5$  заметно меньше, чем при  $N = 3$ . Это говорит о более слабом влиянии шумовых составляющих погрешностей измерений на акселерометрическое решение. В связи с этим при построении СПМ для экспериментальных данных будем рассматривать случай  $N = 5$ .

## 5. Результаты обработки экспериментальных данных

### Сравнение решений при выборе разных шкал времени

В [2] было показано, что в скоростных фазовых решениях следует использовать неравномерную шкалу времени. Тот же вывод справедлив и для акселерометрических решений (подтверждающие это результаты обработки экспериментальных данных здесь не приводятся во избежание повтора материала статьи [2]).

### Данные и результаты

Использовались данные приемника сигналов GPS компании JAVAD, находящегося в статическом положении (на неподвижном основании); частота регистрации первичных данных – 10 Гц, длительность теста – 6 ч.

Далее приведены:

- сравнение решений при  $N = 3: [\tilde{t}_0^0, 0, \tilde{t}_2^0]$  и  $N = 5: [\tilde{t}_0^0, \tilde{t}_1^0, 0, \tilde{t}_3^0, \tilde{t}_4^0]$ , а также математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (СКО) для  $f_{UP} + g$  ( $g$  – удельная сила тяжести) для этих случаев;
- доплеровское и фазовое акселерометрические решения и анализ СПМ моделей их погрешностей.

При статическом положении приемника референсное значение величины  $f_{UP} + g$  равно 0. Это учитывается при получении качественных характеристик решений.

*Сравнение акселерометрических решений при ширине окна дифференцирования  $N = 3$  и  $N = 5$*

Таблица 1

**Результаты обработки экспериментальных данных на неравномерной сетке**

Неравномерная сетка + равноточные измерения	$N = 3$	$N = 5$
Среднее значение $f_{UP} + g$ , м/с <sup>2</sup>	$9,6 \cdot 10^{-5}$	$-2,3 \cdot 10^{-5}$
СКО $f_{UP} + g$ , м/с <sup>2</sup>	0,46	0,11
Максимальное значение $f_{UP} + g$ , м/с <sup>2</sup>	1,2	0,3

Из табл. 1 следует, что при расширении окна дифференцирования с  $N = 3$  до  $N = 5$  интенсивность шумовой составляющей акселерометрического решения снижается примерно в 4,5 раза.

Соответствующие графики для величины  $f_{UP} + g$  демонстрируются на рис. 2. По ним можно сделать предварительный вывод, что при расчете ускорения рекомендуется использовать  $N = 5$ .

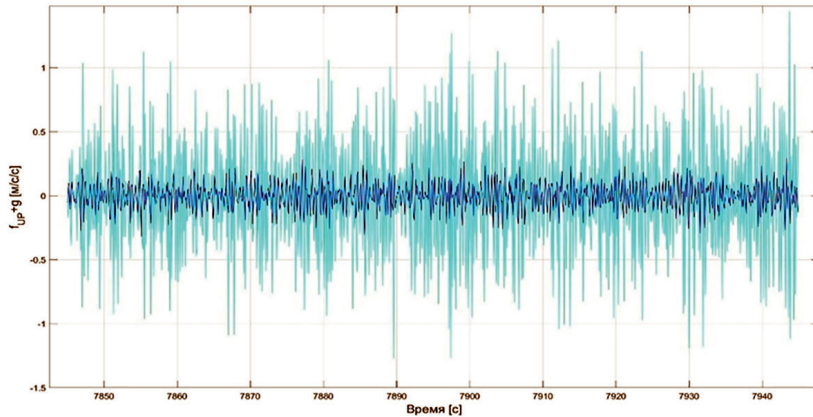


Рис. 2. Акселерометрическое решение с применением неравномерной сетки при  $N = 3$  (голубой цвет) и  $N = 5$  (синий)

*Сравнение доплеровского и фазового акселерометрических решений*

Приведем графики акселерометрических решений, полученных на основе доплеровских и фазовых измерений при  $N = 5$  на интервале 100 с (для наглядности, рис. 3).

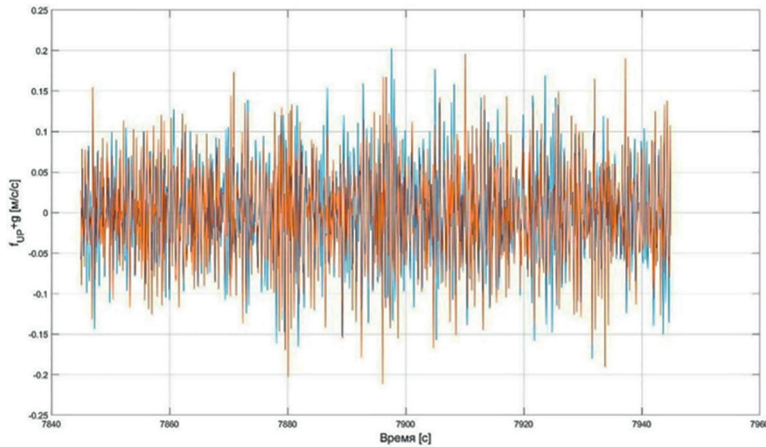


Рис. 3. Доплеровское (коричневый цвет) и фазовое (синий) акселерометрические решения с использованием статистических данных для  $N = 5$

Таблица 2

**Сравнение доплеровского и фазового решений задачи определения ускорения при  $N = 5$  на интервале 100 с**

Неравномерная сетка + равноточные измерения	Фазовое решение	Доплеровское решение
СКО $f_{UP} + g$ , м/с <sup>2</sup>	0,061	0,063
Среднее значение $f_{UP} + g$ , м/с <sup>2</sup>	$-3,3 \cdot 10^{-5}$	$-4,6 \cdot 10^{-5}$

Из рис. 3 и табл. 2 видно, что значимых отличий в реализациях оценок  $f_{UP} + g$  и их статистических характеристик нет, в связи с этим далее описаны дополнительные исследования.

Примечание. Полученное среднее значение  $-3,3$  мГал (для фазовых измерений) и  $-4,6$  мГал (для доплеровских измерений) отражает точностные возможности расчета вертикального ускорения в неподвижной точке при осреднении 100 с и использовании одночастотных  $L_1$ -фазовых и доплеровских измерений, эфемеридной информации и данных о погрешностях часов навигационных спутников, поступающих в режиме реального времени. В дальнейшем для повышения точности решения рассматриваемой задачи в режиме постобработки планируется использовать данные международной службы International GNSS Service (IGS), позволяющие с минимальными отклонениями моделировать траекторные параметры движения навигационных спутников, погрешности их часов и атмосферные задержки.

*СПМ погрешностей доплеровского и фазового акселерометрических решений*

Для анализа погрешностей акселерометрических решений построим СПМ вертикальной компоненты суммы  $f_{UP} + g$  (рис. 4).

Графики для экспериментальных данных (рис. 4) можно сравнить с теоретическими кривыми (рис. 1) СПМ погрешностей фазового и доплеровского акселерометрических решений при разной ширине окна дифференцирования. Видно, что при

наложении графиков реальной и теоретической СПМ друг на друга их траектории совпадают. Шумы доплеровских и фазовых измерений по-разному ведут себя на частотах больше 1,5 Гц, а при низких частотах их поведение и значения сопоставимы. Таким образом, на практике при рассмотрении различных диапазонов частот можно получить разные выводы.

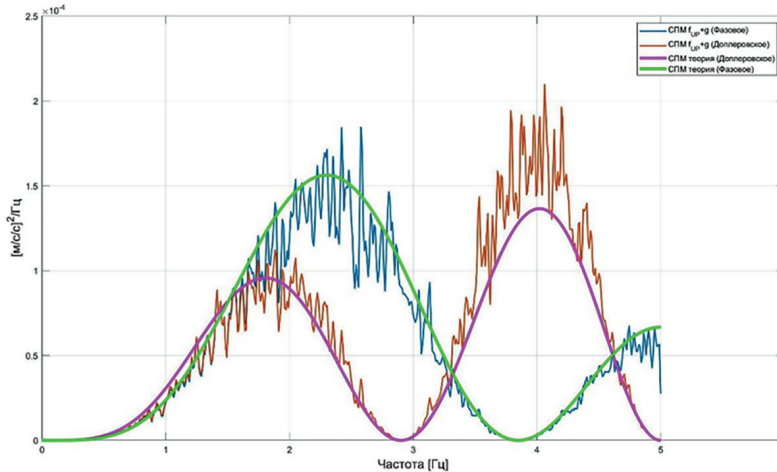


Рис. 4. СПМ погрешностей ускорений для фазовых и доплеровских измерений при  $N = 5$

Примечание. По рис. 4 можно проанализировать влияние шумов только на высоких частотах. Для решений на низких частотах (в аэрогравиметрии – меньше 0,1 Гц) необходимы дополнительные исследования, которые планируется отразить в будущих публикациях.

Т а б л и ц а 3

**СПМ погрешностей доплеровского и фазового акселерометрических решений при  $N = 5$  на всем интервале статистических данных**

Неравномерная сетка + равноточные измерения	Фазовое решение	Доплеровское решение
СКО реальных $f_{UP} + g$ , м/с <sup>2</sup>	0,060	0,063
Площадь под графиком СПМ ( $f_{UP} + g$ )	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$

Таким образом, с учетом данных табл. 3 и рис. 4 можно сделать вывод, что решения, основанные на фазовых и доплеровских измерениях, при  $N = 5$  имеют примерно одинаковую точность.

Примечание. В некоторых случаях различие в третьем знаке после запятой в величине СКО может быть существенным.

**Заключение**

Описаны модели и разработаны алгоритмы решения задачи определения ускорения объекта в режиме постобработки с привлечением первичных фазовых и доплеровских измерений ГНСС.

Представленные алгоритмы основаны на численных схемах дифференцирования, построенных на  $N$  узлах окна дифференцирования с использованием МНК.

Подробно разобраны случаи  $N = 3$ ,  $N = 5$ , что не ограничивает рассмотрения более широких окон дифференцирования.

Теоретический спектральный анализ погрешностей ускорений показал, что при  $N = 5$  численные схемы позволяют получить заметно более точные решения, чем при  $N = 3$  (как при доплеровских, так и при фазовых измерениях).

Обработка экспериментальных данных подтвердила основные выводы теоретического анализа: решения при  $N = 5$  на основе фазовых и доплеровских измерений близки по точности.

Следует отметить, что результаты получены для приемника на неподвижном основании и составляющая погрешности измерения, связанная с искажением полезного сигнала, не исследовалась. Это предполагается сделать в дальнейшем. Кроме того, планируется применить построенные алгоритмы для обработки данных аэрограмметрических съемок.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания  
МГУ имени М.В. Ломоносова.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли** / под ред. В.Г. Пешехонова, О.А. Степанова. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
2. **Голован А.А., Кузнецова К.А.** Определение скорости при помощи фазовых измерений приемника сигналов глобальных навигационных спутниковых систем в автономном режиме // *Гироскопия и навигация*. 2025. Т. 33. № 3(130). С. 3–19. EDN: BAUWXY.
3. **Teunissen, P., Montenbruck, O.** (Eds.), *Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems*, Springer, 2017.
4. **Leick, A., Rapoport, L., Tatarnikov, D.** *GPS satellite surveying*. 4th ed. Wiley, 2015. <https://doi.org/10.1002/9781119018612/>
5. **Jekeli, C., Garcia, R.**, GPS phase accelerations for moving-base vector gravimetry, *Journal of geodesy*, 1997, 71, pp. 630–639.
6. **Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11)**: справочный документ. М.: ВТУ ГШ ВС РФ, 2014.
7. **Болотин Ю.В., Голован А.А., Кручинин П.А., Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Трубников С.А.** Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 1999. № 2. С. 36–41.
8. **Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А., Трубников С.А.** Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: Изд-во МГУ, 2009.
9. **GLONASS. Interface control document**. Ed. 5.1. М., 2008. URL: <https://russianspacesystems.ru/bussines/navigation/glonass/interfeysnyy-kontrolnyy-dokument/>
10. **Голован А.А., Вавилова Н.Б.** Спутниковая навигация. Задачи обработки первичных измерений спутниковой навигационной системы для геофизических приложений // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2005. Т. 11. Вып. 7. С. 181–196.
11. **World Geodetic System 1984 (WGS84)**. URL: <https://confluence.gps.nl/qinsky/en/world-geodetic-system-1984-wgs84-29855173.html/>
12. **Zhang, J., Zhang, K., Grenfell, R., Deakin, R.**, GPS Satellite Velocity and Acceleration Determination using the Broadcast Ephemeris, *The Journal of Navigation*, 2006, 59, pp. 293–305, <https://doi.org/10.1017/S0373463306003638>
13. **Golovan, A.A., Vavilova, N.B.**, Satellite navigation. Raw data processing for geophysical applications, *J. Math. Sci.*, 2007, 146, 5920–5930, <https://doi.org/10.1007/s10958-007-0406-9/>

14. Thompson, B.F., Lewis, S.W., Brown, S.A., Scott, T.M., Computing GPS satellite velocity and acceleration from the broadcast navigation message, *Navigation*, 2019, 66, pp. 769–779, <https://doi.org/10.1002/navi.342/>
15. Архипова А.С., Вязьмин В.С. Фильтр Калмана в задаче бескарданной аэрогравиметрии с учетом уточненной модели погрешностей спутниковых данных // Автоматика и телемеханика. 2025. № 6. С. 86–101. DOI: 10.31857/S0005231025060055
16. <https://gnss.4du.ru/wp-content/uploads/2016/02/rinex211rus.pdf/>
17. <https://web.archive.org/web/20211016143803/https://files.igs.org/pub/data/format/rinex302.pdf/>
18. [https://files.igs.org/pub/data/format/rinex\\_4.02.pdf/](https://files.igs.org/pub/data/format/rinex_4.02.pdf/)
19. Блажнов Б.А., Кошаев Д.А., Степанов О.А. Исследование эффективности использования спутниковых измерений при определении УСТ на ЛА // Гирокоспия и навигация. 2002. № 3. С. 33–47. EDN: RVZQGT

---

**Golovan, A.A., Kuznetsova, K.A.** (Lomonosov Moscow State University, Moscow)

Acceleration Estimation Using GNSS Raw Doppler/Carrier Phase Measurements in Postprocessing Mode, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2026, vol. 34, no. 1 (132), pp. 3–20.

**Abstract.** Raw measurements from Global Navigation Satellite Systems (GNSS) provide important data for aerogravimetry [1, 2]. While commercial GNSS software focus primarily on determination of coordinates, the problem of determining acceleration specifically using raw satellite measurements—doppler/carrier phase—has never been addressed. The paper presents a postprocessing solution to this problem using raw GNSS measurements and ephemeris data. The basic idea is to differentiate single differences of Doppler and phase measurements. A qualitative analysis of the experimental data processing results is provided. The authors develop the approach outlined in [2] for the velocity determination problem.

**Key words:** airborne gravimetry, GNSS, doppler measurements, carrier phase measurements, single differences.

Материал поступил 13.02.2026