

Т. Н. СИРАЯ

РАСШИРЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРОВ НАВИГАЦИОННОЙ АППАРАТУРЫ

В статье приведены основные принципы, по которым формируются расширения стационарных моделей данных, актуальные для задач контроля навигационной аппаратуры.

Рассматриваются две группы расширенных моделей данных. К первой относятся стационарные случайные процессы с наложенными систематическими составляющими погрешностей; ко второй – случайные процессы со стационарными приращениями.

Перечислены особенности описанных нестационарных моделей данных. Анализируются методы оценивания параметров в расширенных моделях и условия сходимости оценок, которые в свою очередь сопоставляются с аналогичными условиями сходимости в рамках стационарных моделей.

Ключевые слова: модель экспериментальных данных, стационарный случайный процесс, дисперсия, систематическая погрешность, винеровский процесс, случайный процесс со стационарными приращениями, структурная функция, состоятельная оценка.

Введение

В настоящее время при проектировании и эксплуатации навигационной аппаратуры используются разнообразные методы обработки экспериментальных данных, основанные на различных вероятностных моделях, в том числе на стационарных и нестационарных случайных процессах [1].

Однако на этапах процедур контроля параметров навигационной аппаратуры, цель которых – сделать выводы о ее соответствии установленным требованиям, исследователи обычно получают сравнительно небольшой объем экспериментальных данных. Это подчеркивает значимость анализа и учета свойств данных в ходе этих процедур.

Применяемые в настоящее время на практике методы обработки данных при контроле навигационной аппаратуры ориентированы прежде всего на классические стационарные модели [2, 3]. Вместе с тем реальные экспериментальные данные нередко отклоняются от стационарных моделей. В таких случаях их обработка в предположении стационарности модели может повлечь за собой получение некорректных оценок параметров и характеристик аппаратуры (например, значительное занижение оценок погрешностей), что в итоге ведет к неверным выводам при контроле аппаратуры. Ввиду этого целесообразно выделить наиболее простые физически обоснованные расширения стационарных моделей, которые описывают самые распространенные на практике виды отклонений от используемых моделей.

Сирая Татьяна Николаевна. Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (С.-Петербург). Действительный член общественного объединения «Академия навигации и управления движением».

В рамках расширенных моделей следует уточнить методы обработки данных, с тем чтобы получать оценки параметров моделей, а также достоверно оценивать их точность. Во-первых, следует учитывать наличие систематических составляющих погрешностей (СистП) [4–10], во-вторых, необходимо рассматривать нестационарные случайные процессы, наиболее важные для задач контроля аппаратуры [2, 3, 11, 12].

В статье обсуждаются общие принципы формирования расширенных моделей, а также описываются две группы нестационарных моделей данных, актуальных для задач контроля навигационной аппаратуры. Эти модели, с одной стороны, представляют собой естественные расширения стационарных моделей (в некотором смысле их можно считать минимальными расширениями). С другой стороны, они конструктивны, то есть дают основу для разработки методов оценивания и контроля параметров аппаратуры, и в то же время достаточно просты, что позволяет использовать при оценивании параметров традиционные статистические методы или их модификации.

Работа структурирована следующим образом. В первом разделе изложены основные принципы и направления расширения моделей, во втором – описаны стационарные модели с наложенными СистП и приведена классификация последних. В третьей части рассматриваются методы оценивания СистП, а также их суммирования со случайными составляющими. В четвертой части представлены модели случайных процессов со стационарными приращениями, которые сопоставляются со стационарными моделями.

1. Основные принципы и направления расширения стационарных моделей при обработке данных

1.1. Общие принципы расширения моделей данных

Вопросы построения, расширения или выбора моделей данных рассматриваются во многих работах, в том числе по прикладной статистике [13, 14] и теории измерений [8, 15–17].

Конкретные способы расширения моделей данных зависят от задач обработки и имеющейся априорной информации, однако можно выделить общие принципы формирования расширенных моделей [14, 16]:

- **преемственность** – исходная модель остается естественным подмножеством расширенной, причем ее общий вид и структура при расширении сохраняются, но в нее вводятся дополнительные параметры и структурные составляющие;
- **непрерывность** – введенные в модель дополнительные параметры или составляющие должны отражать степень ее расширения, а путем их выбора можно обеспечить как небольшое, так и значительное расширение;
- **конструктивность** – в рамках расширенной модели можно получить состоятельные оценки параметров, которые учитывают отклонения данных от исходной модели;
- **измеримость** – в расширенную модель могут быть введены дополнительные характеристики оценок параметров, которые отражают зависимость получаемых при обработке в ней погрешностей оценок от степени отклонений данных от исходной модели;

- **сопоставимость** – можно оценить и сопоставить погрешности двух оценок – новой, полученной в рамках расширенной модели, и прежней, полученной в предположении соответствия данных исходной модели;
- **экономичность** – расширение модели должно быть простым и минимально необходимым, чтобы обеспечить согласованность экспериментальных данных с содержанием задачи контроля и целью измерения.

Перечисленные принципы расширения не являются строго формализованными и независимыми, но отражают эвристические приемы, которые прослеживаются в основных задачах обработки данных. Тем не менее при анализе конкретных задач обработки данных указанные принципы удается частично формализовать, что позволяет использовать полезный статистический аппарат.

В качестве простого примера можно привести построение градуировочной характеристики (ГХ) средства измерений в виде алгебраического полинома, включая выбор его степени и оценивание его коэффициентов, оценивание погрешностей построенной ГХ и проверку ее адекватности [8, 16, 18].

1.2. Основные направления расширения моделей данных

На практике направления расширения моделей данных обычно выбирают на основе наиболее существенных ограничений, которые вводятся в исходные модели, но могут быть нарушены при получении данных в реальных условиях. В связи с этим выполняется детальный анализ исходных моделей данных с учетом всех введенных в них ограничений и предположений (в том числе сделанных в неявном виде) и выявляются наиболее значимые из них, которые на практике могут не выполняться.

Контроль заданного параметра аппаратуры обычно осуществляется путем сравнения показаний прибора с опорными (эталонными) значениями. Полученный набор экспериментальных данных $\{x_1, \dots, x_n\}$ (результаты наблюдений $x_p, i = 1 \dots n$) можно описать моделью вида

$$x_i = Q + \xi_i \quad (1)$$

где Q – оцениваемый параметр, ξ_i – погрешности измерений, $i = 1 \dots n$ [4–6].

В наиболее простых задачах обработки данных предполагается (нередко по умолчанию), что погрешности представляют собой классическую случайную выборку, т.е. ξ_i – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Кроме того, часто предполагают, что ξ_i имеют гауссовское распределение с нулевым средним [5–7].

В большинстве задач контроля навигационной аппаратуры в качестве основной модели данных принимается стационарная случайная последовательность $X_i, i = 1 \dots N$, определяемая условиями [2, 3]:

- математическое ожидание постоянно – $M X_i = Q$;
- корреляционная функция зависит только от разности номеров элементов последовательности

$$R(i, i+k) = M(X_i - Q)(X_{i+k} - Q) = R(k), \quad (2)$$

где $i, i+k$ – номера элементов последовательности, $1 \leq i, i+k \leq N$.

Эта модель непосредственно распространяется и на стационарные случайные процессы в непрерывном времени $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, но далее мы будем рассматривать в основном дискретный случай, поскольку данные чаще всего регистрируются в дискретные моменты времени t_p , $i = 1 \dots N$.

Несмотря на то что класс стационарных моделей является достаточно широким, тем не менее он не охватывает все важные для практики случаи. Анализ отклонений данных от стационарных моделей указывает на основные направления формирования простых и полезных расширенных моделей.

I. Часто встречающееся минимальное нестационарное расширение указанной модели данных – это стационарная последовательность (процесс) с наложенными СистП различного вида. При этом модели СистП могут быть различными – как детерминированными, так и стохастическими.

Хотя этот вид моделей давно используется в измерительной практике, методы анализа и оценивания СистП были разработаны и стандартизованы преимущественно для прямых измерений [6, 7], в меньшей степени – для косвенных и более сложных категорий измерений [8, 18–20]. В то же время такие методы не вполне позволяют решать задачи, возникающие при контроле навигационной аппаратуры.

II. Вторая группа расширенных моделей сигналов состоит из случайных процессов со стационарными приращениями (СПСтП) [11, 12].

Свойства СПСтП непосредственно обобщают свойства стационарных процессов, в частности они также имеют спектральные представления. Однако множество СПСтП является значительным расширением класса стационарных процессов, поскольку включает винеровские процессы и ряд других полезных нестационарных моделей [3, 11, 12].

Эта группа процессов отличается также тем, что основной характеристикой СПСтП оказывается не дисперсия, а структурная функция процесса, то есть дисперсия приращений процесса.

2. Стационарные модели с наложенными систематическими составляющими погрешностей

2.1. Основные определения и свойства стационарных моделей с учетом систематических погрешностей

Общая модель данных может быть представлена в виде

$$x_i = Q + \varepsilon_i + \theta_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (3)$$

где Q – постоянный (измеряемый) параметр; ε_i – случайная погрешность (СлП), описываемая стационарной моделью; θ_i – СистП.

СистП определяется в [6] как «составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины». Разнообразие СистП и значимость их анализа в общем круге задач измерений и контроля параметров устройств неоднократно отмечались в литературе [5, 6, 9, 10, 21]. Это в полной мере относится и к задачам контроля навигационной аппаратуры (см., в частности, [16, 22–24]). Ряд примеров СистП, типичных для задач контроля навигационной аппаратуры, приведен далее.

В целом СистП могут различаться – как по физической природе источников, так и по свойствам их проявления. При этом далеко не все вопросы анализа и оценивания СистП решены на сегодняшний момент, потому исследования в области СистП до сих пор остаются актуальными [6, 9, 10, 21, 22].

К сожалению, в настоящее время в рамках теоретической и законодательной метрологии СистП интенсивно не изучаются. Отчасти это объясняется тем, что в современных международных и эталонных метрологических работах активно употребляется понятие «неопределенность измерения» (вместо классического «погрешность измерения») [25–27]. Аргументируется это тем, что «истинное значение измеряемой величины (а следовательно, и погрешности) неизвестны» [25, 27]. В результате понятие СистП оказывается в тени и не получает должного развития.

В то же время в области прикладной и промышленной метрологии понятие «погрешность измерения», безусловно, востребовано [5, 7, 9, 10, 28–30]. Сегодня наблюдается определенное разграничение сфер влияния двух концепций оценивания точности измерений, в том числе регламентированное нормативными документами [7, 28]. Таким образом, вопросы анализа и оценивания СистП также требуют дальнейших исследований [8, 10, 17, 21].

С этой точки зрения особенно интересна работа [29], в которой впервые было введено понятие неопределенности как альтернативы погрешности. В ней описываются процедуры (схемы) оценивания СлП, СистП и суммарных погрешностей или неопределенностей, а также показаны логическая эквивалентность двух подходов и соотношения получаемых результатов. Кроме того, в работе продемонстрировано, что содержательно рассматривать СистП возможно в рамках каждого из двух подходов.

Изучение СистП важно для навигационного приборостроения, что подтверждается необходимостью решения задач контроля и испытаний аппаратуры.

2.2. Специфика задач анализа и оценивания систематических погрешностей

Методы работы с СистП, их анализ и оценивание существенно отличаются от традиционных подходов к оцениванию СлП и связаны со следующими процедурами [6–8]:

- выявление (обнаружение) составляющих СистП;
- оценивание (приближенное вычисление) выявленных СистП;
- внесение поправок на СистП;
- оценивание неисключенных остатков СистП (НСП);
- суммирование оценок составляющих СистП или НСП.

В дополнение на заключительном этапе оценивания погрешностей возникает также задача суммирования оценок СистП и СлП.

Расширенная модель данных, включающая стационарные СлП и различные СистП, значима на всех этапах контроля и измерений, в том числе при их планировании, разработке методик измерений, выполнении экспериментов и обработке полученных данных, а также при оценивании погрешностей и анализе конечных результатов. Как показывает практика, недостаточный (неполный) учет СистП может приводить к существенному увеличению погрешностей измерений, а также их ошибочным оценкам [10]. Это снижает качество измерений и лишает достоверности выводы на их основе.

Контроль параметров аппаратуры включает не только выполнение измерений с использованием средств измерений (СИ) высокой точности, но и задание испытательных воздействий посредством соответствующего испытательного оборудования (ИО), к которому предъявляются такие же требования, как и к СИ. В частности, необходимо определять метрологические характеристики ИО [23] (включая погрешности воспроизведения воздействий) и проводить аттестацию ИО в соответствии со стандартом [31].

В целом результаты анализа и оценивания СистП в ходе контроля и измерений обычно весьма специфичны и зависят от особенностей устройства и заданных требований к параметрам, а также от режима испытаний и характеристик применяемых ИО и СИ (см., например [5, 6, 22, 31]).

Кроме того, при контроле характеристик навигационной аппаратуры возникают новые задачи, связанные с динамическим режимом измерений. Они требуют новых подходов при анализе СистП, а также при аттестации ИО для обеспечения контроля в динамическом режиме.

Выявление и анализ СистП основаны на классификации их составляющих по нескольким признакам, в том числе:

- источникам возникновения погрешностей;
- характеру их изменения.

В соответствии с этим определяются и методы оценивания СистП.

2.3. Классификация систематических погрешностей

2.3.1 Классификация по источникам СистП. Она является наиболее значимой при выявлении этих погрешностей.

Анализ общих принципов и структуры методик контроля аппаратуры, с учетом их аналогичности методикам измерений [5, 8, 17, 32], позволяет выделить составляющие погрешностей на основе факторов их появления.

Краткий перечень таких составляющих погрешностей (с указанием их видов – СлП или СистП) приведен в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Основные составляющие погрешностей при контроле параметров аппаратуры

№	Причины (факторы), обуславливающие появление составляющих погрешностей	Вид составляющей
1	Неточность воспроизведения испытательного воздействия	СистП + СлП
2	Неточность определения метрологических характеристик ИО	СистП
3	Неточность определения модели объекта контроля и измеряемой величины	СистП
4	Несовершенство уравнений измерений	СистП
5	Неточность установки, горизонтирования объекта контроля, СИ и ИО	СистП
6	Неточность выполнения операций подготовки СИ	СистП
7	Искажение параметров из-за взаимодействия СИ с объектом	СистП + СлП
8	Наличие помех (мешающих воздействий) на входе СИ	СлП

№	Причины (факторы), обуславливающие появление составляющих погрешностей	Вид составляющей
9	Неточность определения метрологических характеристик СИ	СистП
10	Реакция СИ и объекта контроля на изменения влияющих величин	СистП + СлП
11	Инерционность СИ, скорость изменения сигнала	СистП + СлП
12	Неточность реализации метода измерений	СистП
13	Помехи на выходе СИ	СлП
14	Неточность регистрации сигнала, отсчетов (показаний) СИ	СистП + СлП
15	Несовершенство модели экспериментальных данных	СистП
16	Несовершенство алгоритма обработки данных	СистП
17	Неточность реализации алгоритма вычислительным устройством	СистП + СлП
18	Несовершенство процедур передачи и ввода данных	СистП + СлП

Настоящий перечень ориентирован на типовую схему процедур контроля и измерений [17, 32] и при решении конкретных задач может быть уточнен и дополнен. Разработчикам методик измерений и контроля полезно использовать его для полного учета основных групп составляющих погрешностей.

Приведенные в табл. 1 данные показывают, что СистП присутствуют почти во всех случаях (кроме пп. 8 и 13) и являются единственными в пп. 2–6, 9, 12, 15 и 16.

По источникам возникновения составляющие погрешностей можно разделить на несколько основных групп:

- методические погрешности, обусловленные несовершенством принятого метода измерений (контроля) и неточностью его реализации (составляющие по пп. 1, 3–4, 7, 12, 15, 16);
- инструментальные погрешности, обусловленные несовершенством применяемых СИ и ИО (составляющие по пп. 2, 6, 8–9, 11, 13, частично 14);
- установочные погрешности, обусловленные неточной установкой объектов контроля и используемых СИ и ИО (составляющие по п. 5);
- погрешности, вызванные внешними условиями (составляющие по п. 10);
- личные погрешности, обусловленные индивидуальными особенностями работы операторов в процессе экспериментов (часть составляющих по п. 14).

Практически все отмеченные группы погрешностей содержат систематические составляющие и значимы для контроля навигационной аппаратуры. В частности, обычно большую роль играют установочные СистП (по п. 5), связанные с выставкой или горизонтированием аппаратуры, СИ и ИО.

Исключение составляют только личные погрешности (п. 14) оператора, вызванные неточным отсчитыванием показаний СИ. В настоящее время их стремятся снизить путем введения автоматической регистрации (отсчитывания) показаний СИ; оставшиеся СистП частично входят в инструментальные составляющие (п. 14).

Методические погрешности, так же как и инструментальные, вносят существенный вклад в общую (суммарную) погрешность. При этом оценить их (и даже обнаружить) значительно сложнее, чем инструментальные составляющие, основную информацию о которых можно получить из документации на используемые СИ [6–8].

Таким образом, составляющие СистП весьма разнообразны, что обусловлено их источниками и физической природой. Их выявление и анализ отличаются в зависимости от вида аппаратуры, поскольку определяются ее физическими принципами и методиками контроля ее параметров.

В качестве характерного примера можно привести испытания морских гравиметров, анализ и оценивание погрешностей которых, включая СистП, выполняются в наиболее полном объеме [24, 33]. В ходе исследований, в том числе экспериментальных, изучены основные физические факторы, вызывающие СистП, и определены зависимости от них составляющих СистП. Это позволяет ввести ряд поправок на основные эффекты, оценить неисключенные остатки СистП и суммировать их. Учет СистП и их корректное оценивание позволяют обеспечить высокую точность измерений при использовании морских гравиметров [33].

2.3.2. Классификация по характеру изменения СистП. При анализе и оценивании СистП существенную роль также играет классификация их составляющих по свойствам и характеру изменения.

Кроме постоянных СистП, по характеру изменения традиционно выделяются еще несколько их основных групп [6, 8], включая:

- ступенчатые (кусочно-постоянные) СистП, обусловленные факторами, которые постоянны на одном интервале времени, но изменяются при переходе от одного интервала к другому;
- прогрессирующие СистП (тренды), которые возрастают или убывают под влиянием определенных факторов;
- периодические СистП, обусловленные циклическими процессами;
- СистП, изменяющиеся по более сложным законам (например, полиномиальным или гармоническим), которые являются комбинациями перечисленных выше факторов.

Для многих видов составляющих СистП исследованы их зависимости от внешних условий (например, от температуры) и разработаны методы введения поправок [6, 8]. После введения поправок оценивают НСП, которые часто описываются приближенными вероятностными моделями, то есть рандомизируются.

Подобное распределение СистП по группам не является в строгом смысле классификацией – оно скорее рабочее и отчасти условное. Более того, классическое разделение на СистП и СлП тоже до некоторой степени условно и зависит от поставленных задач. В целом характер составляющей погрешности часто определяется областью распространения или локализацией рабочей (измерительной) модели.

Например, относительность СистП (как и СлП) проявляется в возможности перехода одной и той же составляющей из одной группы в другую. Так, СлП градуировки СИ проявляется на этапе его применения в виде СистП градуировочной характеристики. Напротив, постоянная СистП конкретного образца СИ может выглядеть как СлП на множестве образцов СИ одного типа (то есть является СлП определенного типа СИ).

Процедуры выявления и оценивания СистП существенно различаются в зависимости от характера изменений составляющих во времени. Методически сложнее всего выявить строго постоянную СистП, поскольку ее невозможно обнаружить в рамках одного измерения – для этого требуются дополнительные измерения того же параметра с использованием других методов и более точных СИ.

При наличии СистП формальная обработка данных в предположении, что они являются реализацией стационарного процесса, приводит к некорректным результатам, например слишком большим (или неправдоподобно малым) оценкам погрешностей измерений [10]. Ввиду этого при обработке данных следует учитывать наличие и свойства соответствующих СистП.

Наиболее сложным оказывается выявить и ввести поправки на постоянные СистП, которые могут различаться по области постоянства значений. На практике целесообразно выделить следующие основные группы [6, 8, 10]:

- 1) строго постоянные СистП, которые остаются неизменными при повторных измерениях тем же методом;
- 2) локально-постоянные СистП, которые остаются неизменными:
 - в однородной серии измерений с использованием конкретных СИ;
 - в одной группе данных (в течение одного запуска аппаратуры).

Характер изменения или область постоянства СистП обычно определяют с помощью физического анализа задачи и источников происхождения погрешностей. Например, нередко на практике можно обосновать нерегулярность изменений СистП от одной группы данных к другой, и тогда можно использовать приближенные статистические методы. На этом базируются практические методы оценивания СистП и суммирования СлП и СистП [6, 7], которые являются эвристическими и основаны на правдоподобных предположениях и статистических аналогиях. Они проверены на практике, широко обсуждались специалистами, в итоге согласованы и включены в нормативные документы (стандартизованы) [7].

3. Оценивание случайных и систематических погрешностей в рамках расширения стационарных моделей

3.1. Выделение и оценивание систематических погрешностей

Задача оценивания СистП, как отмечено выше, неразрывно связана с выявлением СистП, и потому многие оценки основаны на критериях проверки наличия СистП.

Основные методы анализа и оценивания СистП были разработаны и стандартизованы преимущественно для прямых измерений [6, 7], в дальнейшем они были распространены на некоторые группы более сложных измерений, таких как косвенные и совместные [6, 18–20, 32].

Для обнаружения монотонных СистП можно использовать известные методы регрессионного анализа (в частности, [35, 36]). При выявлении функционального вида СистП (в том числе линейного) можно ввести поправки в результаты измерений. Далее необходимо оценить НСП с учетом оценок погрешностей построенной зависимости. Применительно к основным измерительным задачам такие методы излагаются, например, в [8, 18].

Кроме того, выявить монотонные СистП позволяет критерий Аббе [6, 35], основанный на сравнении выборочной дисперсии S^2 :

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1), \quad (4)$$

где \bar{x} – выборочное среднее

$$\bar{x} = x_{cp} = \sum x_i / n, \quad (5)$$

и оценки дисперсии, полученной на основе последовательных разностей элементов выборки:

$$\sigma_a^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 / 2(n-1). \quad (6)$$

Статистика критерия Аббе имеет вид:

$$r = \sigma_a^2 / S^2. \quad (7)$$

Критерий Аббе применяется в измерительной практике [6] для проверки гипотезы о наличии СистП в выборке (1). Проверяется нулевая гипотеза о постоянном среднем выборки

$$H_0: Mx_k = c$$

против альтернативы о наличии систематического сдвига данных:

$$H_1: Mx_{k+1} = Mx_k + h.$$

Критерий Аббе можно также использовать для проверки гипотезы H_0 против альтернативы о наличии некоррелированных случайных сдвигов

$$H_2: x_{k+1} = x_k + z_k,$$

которая соответствует присутствию рандомизованных СистП.

Аналогичным образом критерий Аббе позволяет обнаружить монотонные СистП среди однородных групп данных.

Например, если выполнены n серий наблюдений по m наблюдений в каждой, а именно:

$$x_{ik} = Q + \theta_i + \varepsilon_{ik}, \quad i = 1 \dots n; \quad k = 1 \dots m, \quad (8)$$

где θ_i – СистП (постоянные по группам), $i = 1 \dots n$; ε_{ik} – случайные составляющие, $i = 1 \dots n$, $k = 1 \dots m$, то можно применить критерий Аббе к ряду средних значений по группам данных: \bar{x}_i , $i = 1 \dots n$.

В случае выявления СистП можно их аппроксимировать функцией, частично исключить из данных и далее приближенно оценить НСП на основе погрешностей аппроксимации.

Некоторые СистП, например инструментальные составляющие, рассчитываются на базе метрологических характеристик СИ (приведенных в соответствующей документации). В частности, для многих СИ нормированы температурные коэффициенты или функции, которые позволяют ввести поправки на температуру [5, 6].

Вместе с тем поправки имеют ограниченную точность, поэтому остаются НСП. Так, при введении температурной поправки НСП обусловлены неточностью определения температурного коэффициента (функции) и погрешностью измерения температуры. Следует также учитывать, что поправки вносятся в результаты измерений, потому к их точности предъявляются высокие требования. В связи с этим для их расчета необходима достаточно полная априорная информация и точные экспериментальные данные.

К сожалению, на практике введение поправок не всегда оказывается целесообразным из-за их недостаточной точности, например в тех случаях, когда температурная зависимость СИ известна неточно или невозможно точно измерить температуру.

3.2. Суммирование составляющих систематической погрешности

Обычно составляющие СистП или их НСП оцениваются границами Θ : $|\theta| \leq \Theta$, которые получают приближенными методами, близкими к статистическим. Различные составляющие СистП часто оценивают порознь, используя разные методы.

Ввиду этого для СистП возникает задача суммирования полученных границ составляющих СистП, Общую СистП представляют в виде суммы составляющих

$$\theta = \sum \theta_p,$$

для которых заданы (оценены) границы Θ_i : $|\theta_i| \leq \Theta_i, i = 1 \dots m$.

Необходимо определить общую границу Θ суммарной СистП, которая обеспечивает условие $|\theta| \leq \Theta$. Эта задача не имеет однозначного строгого решения, поэтому привлекаются различные приближенные методы. Проще всего принять для суммарной СистП арифметическую границу Θ_a , равную сумме границ составляющих:

$$\Theta_a = \sum_{i=1}^m \Theta_i. \quad (9)$$

Такая граница является наиболее надежной, поскольку наверняка выполнено условие $|\theta| \leq \Theta_a$. Арифметическое суммирование целесообразно, если составляющие строго постоянны, то есть неизменны при любом измерении этим методом. Например, это верно для составляющих, обусловленных неточностью констант или формул при обработке данных.

Тем не менее во многих случаях арифметическая граница СистП оказывается значительно завышенной, а следовательно, дает неверное представление о реальной точности измерения. По этой причине необходимо найти приближенные, но более реалистические границы с учетом свойств суммируемых СистП.

Наиболее часто составляющие СистП квазипостоянны, то есть неизменны при повторных наблюдениях в рамках данного измерения, однако изменяются при разных измерениях одной и той же величины тем же методом. Тогда целесообразно применять квазистатистические методы суммирования.

При суммировании составляющие СистП θ_i рассматриваются как случайные величины (то есть рандомизированные). Поскольку для СистП известны лишь границы Θ_i , то осторожно допускается, что они имеют равномерные распределения на интервалах $(-\Theta_i, \Theta_i)$ [6].

Суммируя составляющие СистП как независимые случайные величины с равномерными распределениями, получают приближенную доверительную границу суммарной СистП:

$$\Theta_p = k_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2}, \quad (10)$$

где коэффициент k_p зависит от доверительной вероятности P и числа слагаемых m , а также соотношения границ Θ_i [6, 7].

Для практических целей достаточно принимать следующие значения коэффициентов:

$$k_p = 0,95 \text{ при } P = 0,90; \quad k_p = 1,1 \text{ при } P = 0,95, \\ k_p = 1,4 \text{ при } P = 0,99 \text{ и } m \geq 4.$$

При доверительной вероятности $P = 0,99$, характерной для точных измерений, зависимость коэффициента k_p от числа слагаемых при $m < 4$ оказывается значимой. Так что при $m < 4$ коэффициент k_p можно определить по графику, приведенному в [6, 7], либо принять для суммарной СистП арифметическую границу Θ_a как наиболее надежную.

3.3. Суммирование систематической и случайной составляющих погрешностей

В рамках описанной расширенной модели погрешностей, включающей как СлП, так и СистП, существенную роль играют методы оценивания двух групп составляющих, а также их суммирование, то есть получение оценки суммарной погрешности.

Для оценивания СлП при измерениях и контроле используются различные статистические методы, разработанные для основных прикладных задач обработки данных, включая оценивание математического ожидания и дисперсии, построение эмпирических зависимостей по экспериментальным данным. Такие методы различаются по уровню априорной информации и видам моделей при обработке данных – в частности, классические (оптимальные), робастные и непараметрические методы оценивания параметров, регрессионные и конфлюентные методы построения зависимостей. Методы оценивания СлП выходят за рамки основной темы настоящей статьи, и даже их краткое изложение или обзор потребовали бы большого объема, поэтому укажем здесь лишь несколько работ, посвященных этим вопросам: [1–3, 6, 8, 14, 34–36].

В качестве примера применения методов суммирования СлП и СистП опишем наиболее распространенный на практике вариант, когда при прямых измерениях получена случайная выборка и из априорной информации известно, что СлП подчиняется гауссовскому распределению.

Тогда за результат измерения обычно принимают выборочное среднее \bar{x} (5), а дисперсия его погрешности оценивается как

$$S^2(\bar{x}) = S^2 / n, \quad (11)$$

где S^2 – выборочная дисперсия вида (4).

Приведенные оценки являются оптимальными при гауссовском распределении СлП. Доверительная граница погрешности измерения вычисляется по формуле

$$\varepsilon(P) = tS(\bar{x}), \quad (12)$$

где $t = t_{n-1}(P)$ – коэффициент Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы для доверительной вероятности P .

Разумеется, на практике возможны и иные оценки математического ожидания и дисперсии, в том числе соответствующие другим распределениям выборки (если они известны), а также робастные и непараметрические оценки (при ограниченной априорной информации о распределении) [14, 36].

После того как получены границы составляющих погрешностей: $\varepsilon(P)$ – граница СлП, Θ – граница СистП, ставится задача определения границы суммарной погрешности.

Арифметическая граница суммарной погрешности

$$\Delta_a = \Theta + \varepsilon(P), \quad (13)$$

как уже говорилось выше, является надежной, но явно завышена, поэтому обычно стремятся найти более реалистическую приближенную границу.

Строгое решение задачи суммирования невозможно: практические (эмпирические) формулы суммирования основаны на эвристических предположениях и моделях погрешностей, а также зависят от принятого уровня точности их оценивания. Поскольку границы составляющих (СлП и СистП) оценены приближенно (допускаются погрешности в пределах $\pm 15\%$), то и при их суммировании не требуется более высокой точности.

Точность оценивания погрешностей влияет и на критерии, в соответствии с которыми одной из составляющих – СлП или СистП – можно пренебречь ввиду ее малости. Количественный критерий сравнения составляющих определяется [6–8] отношением

$$r = \Theta / S(x_{cp}), \quad (14)$$

где Θ – граница СистП, $S(x_{cp})$ – среднеквадратическое отклонение (СКО) СлП.

Если $r < 0,8$, то СистП считают пренебрежимо малой по сравнению со СлП и границу суммарной погрешности принимают равной границе СлП: $\Delta = \varepsilon(P)$.

Если $r > 8$, то СлП считают пренебрежимо малой по сравнению с СистП и границу суммарной погрешности принимают равной границе СистП: $\Delta = \Theta$.

При промежуточных значениях $0,8 \leq r \leq 8$ необходимо учитывать обе составляющие погрешности, тогда границу суммарной погрешности вычисляют по одной из эмпирических формул:

$$\Delta = K(\Theta + \varepsilon(P)), \quad (15)$$

$$\Delta = k_{\Sigma} S(\Sigma), \quad (16)$$

которые соответствуют квазистатистическому способу суммирования СистП и СлП.

В формуле (15) коэффициент K зависит от доверительной вероятности P и отношения r , но на практике обычно достаточно следующих значений:

$$K = 0,8 \text{ при } P = 0,95; \quad K = 0,85 \text{ при } P = 0,99.$$

Наиболее распространенной при точных измерениях является формула (16), которая регламентирована [6, 7]. В ней использованы оценки:

$S(\Sigma)$ – суммарное СКО результата измерения

$$S(\Sigma) = [S^2(x_{cp}) + S^2(\theta)]^{1/2}, \quad (17)$$

k_{Σ} – усредненный коэффициент:

$$k_{\Sigma} = (\theta + \varepsilon(P)) / (S(x_{cp}) + S(\theta)), \quad (18)$$

где $S(x_{cp})$ и $S(\theta)$ – оценки СКО СлП и СистП; $\varepsilon(P)$ и Θ – границы СлП и СистП.

В частности, если для составляющих СистП приняты равномерные распределения, то СКО СистП оценивают как

$$S(\theta) = [\Sigma \Theta_i^2 / 3]^{1/2}. \quad (19)$$

Приведенная схема оценивания составляющих и суммарных погрешностей позволяет находить основанные на эвристических методах приближенные оценки погрешностей, в том числе при недостаточной априорной информации об их свойствах. При более полной априорной информации о составляющих СистП можно получить более строгие оценки погрешностей по аналогичным формулам.

4. Модели случайных процессов со стационарными приращениями

4.1. Основные определения и свойства случайных процессов со стационарными приращениями

Вторая группа расширенных моделей данных является естественным стохастическим расширением множества стационарных процессов [3, 11].

Случайный процесс $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, является СПСтП, если математические ожидания приращений пропорциональны разностям аргументов

$$M(X(s) - X(t)) = a(s - t) \quad (20)$$

и ковариация приращений зависит только от разностей моментов времени

$$M[(X(u) - X(t))(X(s) - X(t))] = D(u - t, s - t).$$

Ввиду этого корреляционные свойства процесса описываются структурной функцией $D_0(\tau)$, которая зависит только от приращений аргумента:

$$D_0(\tau) = M[X(t + \tau) - X(t)]^2. \quad (21)$$

Иначе говоря, для СПСтП при любом заданном τ процесс $Y_\tau(t)$, образованный приращениями (с шагом τ)

$$Y_\tau(t) = X(t + \tau) - X(t)$$

является стационарным процессом параметра t . Очевидно, дисперсия процесса $Y_\tau(t)$ равна значению структурной функции $D_0(\tau)$ процесса $X(t)$.

Множество СПСтП является существенным расширением множества стационарных процессов, поскольку содержит также ряд важных нестационарных процессов. На практике наиболее востребован винеровский процесс [3, 11], для которого структурная функция имеет вид:

$$D_0(\tau) = \sigma^2 \tau. \quad (22)$$

В физическом смысле СПСтП описываются как процессы со стационарным развитием (накоплением стабильных эффектов), которое нередко наблюдается в природе и технике; например, СПСтП нашли широкое применение при изучении динамических процессов атмосферы и океана [11, 12].

Подобно стационарным процессам, СПСтП имеют спектральные представления, однако другого вида:

$$X(t) = \int [(e^{it\omega} - 1)/(i\omega)] dZ(\omega) + X_0, \quad (23)$$

где $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями; X_0 – случайная величина.

Структурная функция СПСтП также имеет спектральное представление

$$D_0(\tau) = 2 \int [(1 - \cos \tau \omega) / \omega^2] dF(\omega), \quad (24)$$

где $F(\omega)$ – неубывающая спектральная функция, такая что при $\omega > \mu$

$$M |Z(\omega) - Z(\mu)|^2 = F(\omega) - F(\mu).$$

В общем случае спектральная функция $F(\omega)$ удовлетворяет следующему условию: при любом $a > 0$ конечны интегралы вида

$$\int_a^\infty dF(\omega) / \omega^2 < \infty, \quad \int_{-\infty}^{-a} dF(\omega) / \omega^2 < \infty. \quad (25)$$

Вместе с тем свойства СПСтП отличаются от свойств стационарных процессов, а свойства структурной функции $D_0(\tau)$ вида (21) – от корреляционной функции $R_0(t)$ стационарного процесса. Например, корреляционная функция $R_0(t)$ всегда ограничена:

$$|R_0(t)| \leq R_0(0),$$

а структурная функция $D_0(\tau)$ может быть неограниченной. В частности, винеровский процесс имеет структурную функцию (22) линейного вида.

Тем не менее структурная функция все же ограничена по скорости роста и подчиняется условию [11]

$$D_0(\tau) \leq C \tau^2. \quad (26)$$

При этом в (26) равенство достигается для линейной функции

$$X(t) = A + B t \quad (27)$$

с независимыми случайными коэффициентами, которой соответствует структурная функция $D_0(\tau) = C \tau^2$.

4.2. Оценивание характеристик случайных процессов со стационарными приращениями

В классе СПСтП в качестве основной характеристики выступает структурная функция $D_0(\tau)$ [11, 12], поэтому ее оценки наиболее значимы. Оказывается, что эффективной оценкой структурной функции является широко применяемая на практике вариация Аллана (ВА) [37, 38]:

$$\sigma_a^2(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau))^2 / 2(n-1), \quad (28)$$

где $x_k(\tau)$ – среднее значение $X(t)$ на интервале $I_k = (t_0 + k \tau, t_0 + (k+1)\tau)$, $k = 1 \dots n$.

Если функциональный вид структурной функции известен, то по значениям ВА можно оценить ее параметры, которые соответствуют основным характеристикам исходного процесса $X(t)$.

Следует отметить, что статистический аппарат СПСтП и ВА развивались практически одновременно, но в различных прикладных областях. С одной стороны, модели СПСтП задействуются при исследованиях гидро- и аэродинамических процессов атмосферы и океана [11, 12]. С другой стороны, ВА была введена как альтернативная оценка дисперсии в области измерений времени и частоты [37], чтобы оценивать уровень шумов, к которым классические оценки дисперсии неприменимы. Вскоре эта оценка стала широко использоваться во многих областях измерений и в других прикладных задачах.

В настоящее время ВА востребована также при контроле навигационной аппаратуры [39, 40]. Согласно стандартам IEEE (например, [40]), эта характеристика нормируется для акселерометров, гироскопов и других навигационных датчиков. Кроме того, она особенно полезна в нестационарном случае (например, для винеровских процессов), когда обычная дисперсия неприменима.

Следует также отметить, что оценка ВА, по существу, давно используется в прикладной статистике как альтернативная оценка дисперсии, которую можно сравнивать с классической оценкой дисперсии. Выше отмечалось (п. 3.1), что классический критерий Аббе [6] основан на сравнении выборочной дисперсии S^2 с оценкой дисперсии (6), аналогичной ВА. В измерительной практике [6] с помощью критерия Аббе часто проверяется наличие СистП в выборке. Таким образом, кроме оценивания структурной функции, ВА позволяет решать и другие задачи, в том числе связанные с анализом СистП.

Следует отметить, что в рамках модели СПСтП можно также рассматривать некоторые виды СистП. В частности, линейная функция со случайными коэффициентами вида (27) описывает один из важных видов СистП. Такие составляющие линейно изменяются в рамках одной реализации процесса (например, при каждом запуске аппаратуры), однако для различных реализаций эти линейные функции будут отличаться.

В целом модель СПСтП имеет более ограниченную область применения и распространяется на этапы обработки экспериментальных данных и заключительного анализа результатов измерений. В то же время она может быть задействована во многих неклассических случаях, когда традиционные методы анализа, основанные на стационарных моделях, не подходят. При этом она дает полезную информацию о структуре данных, включая нестационарные составляющие.

4.3. Условия состоятельности оценок в расширенных моделях

При построении и практическом использовании расширенных моделей важную роль играют условия сходимости получаемых на их основе статистических оценок к искомым параметрам, то есть критерии состоятельности оценок. В данном случае можно сравнить условия состоятельности для стационарной модели и СПСтП.

Для стационарного процесса $X_0(t)$ с корреляционной функцией $R_0(t)$ условие состоятельности оценок параметров, как известно, задается эргодической теоремой [2, 3]. Если корреляционная функция стационарного процесса $R_0(t)$ удовлетворяет условию

$$R_0(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (29)$$

то выборочные оценки математического ожидания и корреляционной функции являются состоятельными.

При наличии СистП это условие может нарушаться даже в случае их рандомизации. Например, если присутствуют неисключенные постоянные СистП, условие эргодичности не соблюдается и оценки несостоятельны. На практике это соответствует ситуации, когда имеется постоянная (в рамках реализации) СистП, которая изменяется при каждом запуске аппаратуры.

Для СПСтП основной характеристикой служит структурная функция, поэтому ставится вопрос о состоятельности ВА, то есть ее сходимости к структурной функции. Условие состоятельности, полученное в [41], формулируется в терминах структурной функции $D_0(\tau)$. Если при любом $\tau > 0$ выполняется условие

$$[D_0(t + \tau) + D_0(t - \tau)] / 2 - D_0(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (30)$$

то ВА является состоятельной оценкой структурной функции $D_0(\tau)$.

Условие (30) верно для многих СПСтП, в том числе имеющих неограниченные структурные функции. В частности, это верно для винеровского процесса, которому соответствует линейная структурная функция (22).

Вместе с тем условие (30) не выполняется для входящей во множество СПСтП линейной функции (27) со случайными коэффициентами, поэтому ВА – несостоятельная оценка ее структурной функции.

Поскольку стационарные процессы также входят в класс СПСтП, полезно сравнить их классические эргодические условия (29) с аналогичными условиями в расширенной модели (30). Очевидно, что в случае стационарного процесса условие состоятельности ВА (30) в классе СПСтП оказывается менее жестким, чем условие состоятельности выборочной дисперсии (29) в классе стационарных процессов.

Таким образом, если для стационарного процесса выполнено условие (30), но не выполнено (29), то ВА – это состоятельная оценка структурной функции, а выборочная дисперсия S^2 не является состоятельной оценкой дисперсии. Для такого стационарного процесса целесообразно оценивать не дисперсию, а его структурную функцию [11, 41]. В частности, это означает, что в данном случае возможно исключить некоторые составляющие СистП.

Заключение

1. Для получения достоверных оценок параметров и их погрешностей при контроле аппаратуры целесообразно использовать расширенные модели экспериментальных данных, которые позволяют учитывать возможные отклонения реальных данных от классических стационарных моделей.

Приведенные общие принципы расширения моделей отражают особенности построения полезных для практики моделей данных. В рамках расширенных моделей можно контролировать отклонения данных от исходных моделей, оценивать погрешности получаемых оценок параметров и сопоставлять их с ранее полученными оценками.

2. Выделены две группы расширенных моделей данных, которые актуальны для задач контроля навигационной аппаратуры.

Первая группа включает стационарные модели данных с наложенными систематическими погрешностями. При анализе последних ставятся специфические задачи, связанные с выявлением основных систематических составляющих и введением поправок на них.

Приведенные методы обработки данных в рамках расширенной модели основаны на анализе источников и свойств систематических погрешностей, а также на использовании эвристических методов оценивания систематических и суммарных погрешностей.

3. Вторая группа расширенных моделей данных включает класс случайных процессов со стационарными приращениями. В этом случае в качестве основной характеристики выступает структурная функция, а ее оценкой является вариация Аллана, которая актуальна для многих задач контроля навигационной аппаратуры.

4. Предложенные расширенные модели данных применяются в задачах контроля навигационной аппаратуры и имеют ясный физический смысл. На их основе возможно разработать практические методы оценивания и контроля параметров аппаратуры с использованием как классических методов математической статистики, так и соответствующих эвристических подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 1. Введение в теорию оценивания / издание 3-е, испр. и дополн. СПб., 2017. 510 с.
2. **Свешников А.А.** Прикладные методы теории случайных функций / издание 3-е, стер. СПб.: Лань, 2019. 464 с.
3. **Крамер Г., Лидбетгер М.** Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969. 398 с.
4. **МИ 1317-2004.** ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.
5. **Земельман М.А.** Метрологические основы технических измерений. М.: Изд-во стандартов, 1991.
6. **Рабинович С.Г.** Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978. 262 с.
7. **ГОСТ Р 8.736-2011.** ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.
8. **Грановский В.А., Сирая Т.Н.** Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
9. **Сох, М.Г.,** Systematic-error modeling, with application to complex permittivity measurement, *Proc. 16th IMEKO, TC4 Symp.*, Florence, 2008.
10. **Granovsky, V.A., Siraya, T.N.,** Systematic errors: methodology of detection, elimination, and evaluation, *Proc. XX IMEKO World Congress*, 2012, Busan, Republic of Korea.
11. **Yaglom, A.M.,** Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Springer-Verlag, New York, 1987, vol. 1, 2.
12. **Monin, A.S. and Yaglom, A.M.,** Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Dover Publications, 2007.
13. **Айвазян С.А., Енюков Н. С., Мешалкин Л.Д.** Прикладная статистика. Основы моделирования и первичной обработки данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 472 с.
14. **Устойчивые статистические методы оценки данных** / под ред. Л. Р. Лонера, Г.Н. Уилкинсона. М.: Машиностроение, 1984.
15. **Грановский В.А.** Системная метрология: метрологические системы и метрология систем. СПб.: ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор», 1999. 360 с.
16. **Грановский В.А., Сирая Т.Н.** Проблема адекватности моделей в измерениях // Датчики и системы. 2007. №10.
17. **Сирая Т.Н.** Методы обработки данных при измерениях и метрологические модели // Измерительная техника. 2018. №1.
18. **Семенов Л.А., Сирая Т.Н.** Методы построения градуировочных характеристик средств измерений. М.: Изд-во стандартов, 1986. 128 с.

19. **МИ 2083-90.** ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей.
20. **МИ 2175-91.** ГСИ. Градуировочные характеристики средств измерений. Методы построения, оценивание погрешностей.
21. **Rabinovich, S.G.,** Measurements errors and uncertainties. Theory and practice, Third edition, Springer, 2005, 308 p.
22. **Басун О.Б., Грановский В.А., Сирая Т.Н., Сухарев А.П.** Метрологическое сопровождение разработки навигационных систем: постановка проблем, пути решения // Гироскопия и навигация. 2003. №2 (41).
23. **Гороховский К.С., Яворовская Н.Л., Яковенко О.А.** Опыт проведения аттестации высокоточных имитаторов движения // 6-я Межд. научно-техн. конф. «Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях» (Судометрика-2016). 2016. С. 125-126.
24. **Краснов А.А., Сирая Т.Н., Соколов А.В.** Метрологические вопросы контроля и испытаний прецизионных бортовых гравиметров // 6-я Межд. научно-техн. конф. «Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях» (Судометрика-2016). 2016 С. 104-110.
25. **Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML), ISO, 1993.** (Руководство по выражению неопределенности измерения / пер. с англ. СПб.: ФГУП «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1999.)
26. **ГОСТ 34100.3-2017/ISO/IEC Guide 90-3:2008** Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения.
27. **Чуновкина А.Г., Слаев В.А.** Оценивание точности измерений: погрешности и неопределенности // Российская метрологическая энциклопедия / 2-е изд.; под ред. акад. В.В. Окрепилова. Том 1. СПб.: ИИФ «Лики России», 2015. С. 71–75.
28. **РМГ 91-2009** ГСИ. Совместное использование понятий «погрешность измерения» и «неопределенность измерения». Общие принципы.
29. **Кэмпион П. Дж., Барнс Д. Е., Вильямс А.** Практическое руководство по представлению результатов измерений. М.: Энергия, 1979.
30. **Кузнецов В.А., Исаев Л. К., Шайко И. А.** Метрология. М.: ФГУП «Стандартинформ», 2005. 300 с.
31. **ГОСТ Р 8.568-2017.** ГСИ. Аттестация испытательного оборудования. Основные положения.
32. **Лячнев В.В., Довбета Л.И., Сирая Т.Н.** Метрологические основы теории измерительных процедур. СПб.: Элмор, 2011. 435 с.
33. **Соколов А.В., Краснов А.А., Железняк Л.К.** Методы повышения точности морского гравиметра // Гироскопия и навигация. 2019. №2 (105).
34. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
35. **Линник Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
36. **Мостеллер Ф., Тьюки Дж.** Анализ данных и регрессия. М.: Финансы и статистика, 1984. Вып. 1, 2.
37. **Barnes, J.A., Allan, D.W.,** A Statistical model of Flicker noise, *Proc. IEEE*, 1966, vol. 54, no. 2.
38. **Аллан Д.У.** Вариации Аллана: история создания, преимущества и недостатки, основные области применения // Гироскопия и навигация. 2015. №4 (91). С. 3–20.
39. **Степанов О.А., Челпанов И.Б., Моторин А.В.** Точность оценивания постоянной составляющей погрешности датчиков и ее связь с вариацией Аллана // Гироскопия и навигация. 2016. №4. С. 63–74.
40. **IEEE Std 952-1997** IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros.
41. **Сирая Т.Н.** Статистическая интерпретация вариации Аллана как характеристики измерительных и навигационных систем // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. №1. С. 3–18.

Siraya, T.N. (Concern CSRI «Elektropribor», JSC, Saint-Petersburg)

Extensions of Stationary Data Models in Navigation Equipment Tests, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2026, vol. 34, no. 1 (132), pp. 21–40.

Abstract. The paper presents the main principles of extending stationary data models relevant for testing the navigation equipment. Two groups of extended data models are considered. The first group includes stationary random processes with the added systematic errors; the second group is a set of random processes with stationary increments. The features of the described nonstationary data models are considered. Parameter estimation methods in extended models and conditions for consistent estimates are discussed. Consistency conditions are compared with those for stationary models.

Key words: experimental data model, stationary random process, variance, systematic error, Wiener process, random process with stationary increments, structure function, consistent estimate.

Материал поступил 24.11.2025