

Н. И. ЦИОПЛИАКИС

## БЫСТРЫЙ БЛОЧНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ ВИЗУАЛЬНО-ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

*В статье описывается быстрый блочный фильтр Калмана (ББФК) для визуально-инерциальной навигации. Этот фильтр позволяет рекуррентно оценить вектор состояния, включающий навигационные параметры подвижного объекта и координаты  $N$  визуальных признаков, с вычислительной сложностью, сниженной до  $O(N)$  за счет декомпозиции алгоритма оценивания. При этом сложность  $O(N)$  обеспечивается при одновременном наблюдении всех  $N$  признаков в течение произвольного времени. За счет специальной процедуры расширения исходного вектора состояния, производимой с использованием метода главных компонент, оценки блочного фильтра приближены к оценкам обобщенного фильтра Калмана (ОФК). Ранее показано, что ОФК обладает в данной задаче высокой точностью при адекватности моделей погрешностей. Сравнение с ОФК по времени вычислений и точности оценок выполнено путем моделирования работы БИНС, корректируемой на основе информации о визуальных признаках. Полученные результаты показали, что пренебрежимо малые отклонения от оценок ОФК имеют место при размерностях расширения исходного вектора состояния, незначительно влияющих на объем вычислений. Продемонстрирована также возможность обработки сотен признаков в реальном времени в однопоточном режиме.*

**Ключевые слова:** визуально-инерциальная навигация, калмановская фильтрация, вычислительная эффективность, бесплатформенная инерциальная навигационная система, визуальные признаки.

### 1. Введение

В визуально-инерциальной навигационной системе (ВИНС) бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС) на основе трех датчиков угловой скорости и акселерометров объединена с системой технического зрения (СТЗ), где обрабатываются изображения с бортовой видеокамеры. Измерения СТЗ, используемые для коррекции БИНС, представляют собой координаты проекций наблюдаемых визуальных признаков на плоскость изображения видеокамеры [1]. Под визуальным признаком понимается какой-либо постоянный и локализуемый элемент наблюдаемой сцены, который конкретная СТЗ может обнаружить и отследить в последовательных кадрах для получения информации о движении камеры.

Для реализации совместной обработки информации БИНС и СТЗ в ВИНС можно сформулировать задачу рекуррентного оценивания навигационных параметров подвижного объекта и координат признаков, которая решается с помощью традици-

---

**Циоплиакис** Николаос Илиас. Аспирант, кафедра информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск).

онных алгоритмов фильтрации [2]. Ранее было показано, что обобщенный фильтр Калмана (ОФК) для ВИНС имеет высокую точность при использовании адекватных моделей погрешностей, в частности, сформированных с учетом проблем нелинейности и состоятельности [3, 4]. Последнее означает, что вырабатываемая алгоритмом расчетная матрица ковариаций совпадает с действительной [5, 6].

В ВИНС при одновременном отслеживании большого числа визуальных признаков применение традиционных рекуррентных фильтров затруднено из-за роста вычислительной сложности до  $O(N^3)$  (см. раздел «Обозначения»). Для задач такого типа разработаны более быстрые оконные алгоритмы, основанные на фильтрации и оптимизации [1, 7], включая оптимизацию на фактор-графах [8], а также алгоритмы с оптимизацией по ключевым кадрам [9]. Среди оконных алгоритмов с фильтрацией наиболее распространены алгоритмы типа фильтра Калмана с ограничениями на множественные состояния (Multi-State Constraint Kalman Filter, MSCKF) [10, 11]. В них применяется сочетающийся с различными моделями погрешностей ВИНС [4, 12] подход к уменьшению вычислительной сложности ОФК до  $O(N)$  за счет исключения из вектора состояния параметров визуальных признаков и их расчет путем оптимизации по накопленному массиву измерений [10]. Общим недостатком оконных фильтров является ограничение максимального времени отслеживания каждого признака длительностью скользящего временного окна, задействуемого для накопления массива измерений, что неоптимально в условиях длительного обзора одних и тех же признаков.

Для задачи одновременной локализации и картографирования (Simultaneous Localization and Mapping, SLAM), родственной задачам визуально-инерциальной навигации, созданы эффективные алгоритмы нерекуррентного оценивания множества статичных точек карты и последовательных состояний навигационной системы [13, 14]. В них сложность вычислений снижается до  $O(N_m)$ , где  $N_m$  – число точек карты (по сравнению с  $O(N_m^2)$ -сложностью ОФК для SLAM), а точность оценок сохраняется. В таких алгоритмах используется естественная разреженность совместной информационной матрицы, вытекающая из независимости точек карты друг от друга и наблюдения в каждый момент времени лишь малой части карты [13]. В отличие от SLAM, в ВИНС (особенно для объектов с траекторией, не образующей петель) нет необходимости долго хранить данные визуальных признаков, пропавших из области видимости, поэтому соответствующие алгоритмы должны быть адаптированы для одновременного отслеживания всех признаков, а не их малой части.

Целью работы является синтез рекуррентного алгоритма с уменьшенным по сравнению с ОФК временем вычислений, называемого далее быстрым блочным фильтром Калмана (ББФК), и проверка его эффективности путем моделирования работы ВИНС. Особенность ББФК состоит в том, что он позволяет без привлечения скользящего окна измерений оценивать со сложностью  $O(N)$  текущие векторы состояния, описывающие погрешности координат  $N$  визуальных признаков и погрешности ВИНС при одновременном обзоре всех  $N$  признаков в течение произвольного времени. ББФК совместим с различными моделями погрешностей, применяемыми в интегрированной системе «ОФК – ВИНС», в том числе с параметризацией в связанной с подвижным объектом системе координат [3, 12], и может применяться при использовании инвариантных погрешностей [4, 15].

Вычислительная сложность в ББФК, как и в других рекуррентных децентрализованных фильтрах Калмана (ДФК) [16–18], снижается за счет декомпозиции алго-

ритма оценивания и отказа от расчета совместной матрицы ковариации оценок. Например, в рекуррентном федеративном фильтре [16] для сети из  $N$  датчиков, которые имеют неизвестные смещения нуля (частные векторы состояния размерностью  $n_p$ ) и измеряют один и тот же случайный динамический процесс (общий вектор состояния размерностью  $n_c$ ), параметры ковариации описывают корреляцию каждого частного вектора состояний с общим вектором, но не друг с другом. Эта неполнота информации вынуждает использовать завышение ковариаций (covariance inflation [16]) и в конечном счете приводит к субоптимальному оцениванию [16, 19]. Тем не менее именно такой подход позволяет реализовать параллельную обработку данных и деккомпозировать алгоритм оценивания введением вместо единого ОФК размерностью  $n_c + Nn_p$  набора из  $N$  обособленных локальных ОФК с векторами состояния меньшего порядка ( $n_c + n_p$ ), за счет чего уменьшается время вычислений.

В ББФК аналогом измерений вышеупомянутой сети  $N$  датчиков [16] служат данные СТЗ о проекциях  $N$  визуальных признаков, погрешности координат признаков выступают в качестве частных векторов состояния, а роль совместно измеряемого процесса играют погрешности БИНС. При тех же параметрах ковариации, что и в [16], в ББФК размерность задач локальных ОФК уменьшается до  $n_p$ , т.е. локальные фильтры не оценивают общий вектор состояния. Это обеспечивает снижение вычислительной сложности с  $O(Nn_c^3)$  в [16] до  $O(Nn_c^3)$ . Кроме того, в отличие от ДФК [16–18], в ББФК применяется экономичная аппроксимация корреляционных связей между погрешностями оценок координат признаков с помощью метода главных компонент [20], реализованная путем расширения общего вектора состояния. Это позволяет сохранить больше информации о корреляциях и достичь пренебрежимо малых отклонений от оценок ОФК. Обе отмеченные особенности ББФК являются следствием его адаптации для ВИНС, где число признаков  $N$  может быть значительным (до нескольких сотен), а децентрализация направлена только на ускорение вычислений в одном устройстве и не нужно минимизировать передаваемые между локальными фильтрами данные.

Отметим, что ББФК разработан в развитие фильтра, рассмотренного в [21], но отличается от него способом формирования расширенного общего вектора состояний и организацией процесса вычислений.

Структура работы следующая. В разделе 2 раскрывается суть задачи коррекции ВИНС. В разделе 3 приведена соответствующая постановка линеаризованной задачи фильтрации, вводятся модели динамики и измерений ББФК, обсуждаются их особенности. В разделе 4 описывается ББФК и дается обоснование применения метода главных компонент, а в разделе 5 поясняются вычислительные процедуры. Раздел 6 содержит сравнительный анализ ББФК и ОФК по вырабатываемым оценкам и длительности вычислений путем моделирования. В приложении дан псевдокод алгоритмов этапов прогноза и коррекции ББФК, а также стандартной квадратно-корневой реализации ОФК, использованной для сравнения.

#### Список обозначений и определений

СК видеокамеры  $O_c X_c Y_c Z_c$  – ортогональная система координат с центром в оптическом центре камеры, ее ось  $O_c Z_c$  направлена вдоль оптической оси видеокамеры,

оси  $O_c X_c$  и  $O_c Y_c$  сонаправлены соответствующим осям пиксельной сетки изображения и образуют вместе с  $O_c Z_c$  правую тройку осей.

Связанная СК  $O_b X_b Y_b Z_b$  (ССК) – ортогональная система координат, связанная с корпусом подвижного объекта и имеющая начало в точке размещения акселерометров.

Опорная СК  $O_h X_h Y_h Z_h$  – ортогональная система координат, имеющая начало в точке с заданными географическими координатами  $\lambda, \varphi, h$ : ось  $O_h X_h$  направлена вдоль параллели на Восток, ось  $O_h Y_h$  – вдоль меридиана на Север, ось  $O_h Z_h$  – вверх по нормали к поверхности земного эллипсоида.

$(\cdot)_b$  – вектор  $(\cdot)$  в ССК.

$(\cdot)_h$  – вектор  $(\cdot)$  в опорной СК.

$(\cdot)_c$  – вектор  $(\cdot)$  в СК видеокамеры.

$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T, \mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T$  – вектор параметров ВИНС, где  $\mathbf{x}_s$  – вектор параметров БИНС, включающий навигационные параметры подвижного объекта, смещения нуля гироскопов и акселерометров;  $\mathbf{x}_p, i = 1 \dots N$  – векторы координат визуальных признаков.

$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_s^T, \mathbf{X}_1^T, \dots, \mathbf{X}_N^T]^T$  – вектор погрешностей оценок параметров ВИНС, где  $\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_p, i = 1 \dots N$  – векторы погрешностей оценок параметров БИНС и  $N$  визуальных признаков соответственно.

$k$  – номер шага фильтра, обновляемый при поступлении новых измерений СТЗ.

$\hat{\cdot}$  – обозначение прогнозируемых оценок  $k$ -го шага, их погрешностей и параметров ковариации.

$\wedge$  – обозначение оценок  $k$ -го шага.

$\sim$  – обозначение нормированных величин.

$I_m$  – единичная матрица размерности  $m$ .

$0_{m \times n}$  – нулевая матрица размерности  $m \times n$ .

$\text{blkdiag}(A, B)$  – блочно-диагональная матрица из блоков  $A$  и  $B$ .

$\mathbf{L} = \mathbf{P}^{1/2}$  – нижнетреугольный квадратно-корневой фактор положительно полуопределенной матрицы  $\mathbf{P}$ , такой что  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{P}$ .

$y(N) = O(f(N))$  – запись « $O$ » означает, что при стремлении  $N$  к бесконечности  $y(N)$  возрастает не быстрее, чем  $f(N)$ , умноженная на константу.

$y(x) = o(f(x))$  – запись « $o$ » означает, что при стремлении  $x$  к нулю  $y(x)$  уменьшается быстрее, чем  $f(x)$ .

$N$  – число отслеживаемых визуальных признаков.

$x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \mathbf{P}_x)$  – гауссовский случайный вектор со средним  $\mu_x$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{P}_x$ .

$\mathbf{P}_1 \succeq \mathbf{P}_2$  – запись, означающая, что матричная разность  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$  является положительно полуопределенной матрицей.

$\mathcal{H}_{(\cdot)}$  – подпространство в гильбертовом пространстве случайных величин, образованное всеми линейными комбинациями элементов гауссовского случайного вектора  $(\cdot)$  с нулевым средним.

$\mathcal{P}_{(\cdot)}$  – оператор проектирования на подпространство  $(\cdot)$ .

$\triangleq$  – знак равенства по определению.

$\mathbf{v}, \mathbf{w}$  – белые шумы измерений, непрерывные и дискретные соответственно.

$\mathbf{w}, \mathbf{w}$  – порождающие белые шумы модели динамики погрешностей, непрерывные и дискретные соответственно.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим перемещающийся над земной поверхностью объект, оснащенный видеокамерой, датчиками угловой скорости (ДУС) и акселерометрами. Бортовая СТЗ используется для отслеживания на кадрах с видеокамеры проекций  $N$  контрастных точечных визуальных признаков, расположенных на поверхности Земли. Координаты признаков в трехмерном пространстве заранее не известны, и определяются на основе их проекций, а также оценок координат и ориентации подвижного объекта.

Предполагается, что к началу решения задачи координаты, скорость и ориентация в опорной СК  $O_h X_h Y_h Z_h$  известны с достаточно малой погрешностью со среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_{r_0}$  для каждой координаты,  $\sigma_{v_0}$  – для составляющих вектора скорости,  $\sigma_{\varphi_0}$  – для ориентации ССК вокруг вертикальной оси  $O_h Z_h$ ,  $\sigma_{\varphi_0}$  – для ориентации ССК вокруг каждой из осей  $O_h X_h$ ,  $O_h Y_h$ .

Необходимо использовать для коррекции БИНС визуальную информацию и замедлить рост погрешностей выработки этих параметров по сравнению с автономным режимом работы БИНС.

Рис. 1 иллюстрирует изменение неопределенности оценок координат, вырабатываемых ВИНС в автономном режиме (без коррекции) и с коррекцией в моменты времени  $t_1, t_2$  при отслеживании визуального признака, выделенного в момент  $t_0$ .

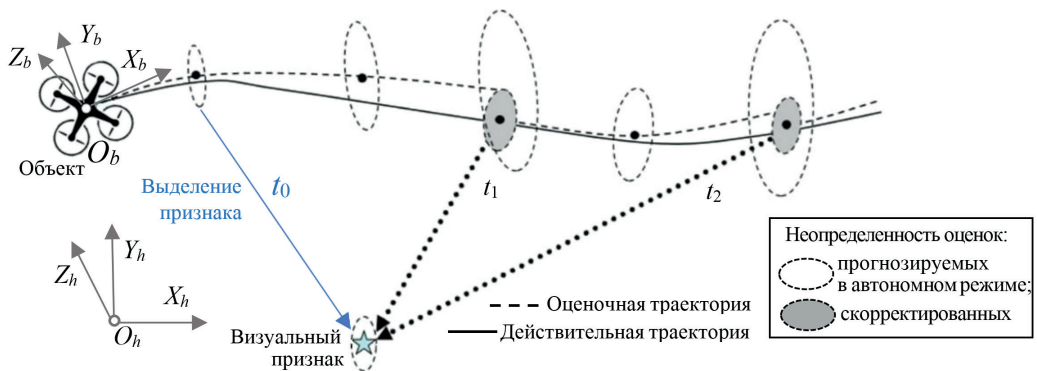


Рис. 1. Изменение неопределенности оценок, вырабатываемых ВИНС

Введем вектор параметров ВИНС  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T, \mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T$ , включающий векторы параметров БИНС  $\mathbf{x}_s$  и визуальных признаков  $\mathbf{x}_i$ :

$$\mathbf{x}_{s \ 16 \times 1} = [\mathbf{q}_{hb}^T, \mathbf{r}_h^T, \mathbf{v}_h^T, \mathbf{b}_{gyr}^T, \mathbf{b}_{acc}^T]^T, \quad \mathbf{x}_i \ 3 \times 1 = \mathbf{r}_h^i, \quad i = 1 \dots N, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}_{hb}$  – кватернион перехода из опорной СК в ССК;  $\mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h$  – векторы координат и скорости подвижного объекта в опорной СК;  $\mathbf{b}_{gyr}, \mathbf{b}_{acc}$  – векторы смещения нулей ДУС и акселерометра соответственно;  $\mathbf{r}_h^i$  – вектор координат  $i$ -го признака в опорной СК.

Запишем уравнения для измерений ДУС  $\boldsymbol{\omega}_{gyr}$  и акселерометра  $\mathbf{n}_{acc}$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{gyr \ 3 \times 1} = \mathbf{C}_{hb}^T \boldsymbol{\omega}_h - \mathbf{b}_{gyr} + \mathbf{v}_\omega, \quad \mathbf{n}_{acc \ 3 \times 1} = \mathbf{C}_{hb}^T (\mathbf{a}_h - \mathbf{g}_h) - \mathbf{b}_{acc} + \mathbf{v}_n, \quad (2)$$

где  $\mathbf{C}_{hb} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_{hb})$  – матрица перехода из опорной СК в ССК;  $\boldsymbol{\omega}_h, \mathbf{a}_h, \mathbf{g}_h$  – векторы угловой скорости, линейного и гравитационного ускорения в опорной СК соответственно;  $\mathbf{v}_\omega, \mathbf{v}_n$  – белые гауссовские шумы измерений с нулевым средним.

Смещения нуля  $\mathbf{b}_{gyr}$ ,  $\mathbf{b}_{acc}$  в (2) моделируются как экспоненциально коррелированные случайные процессы с СКО  $\sigma_{m(\cdot)}$  и временем корреляции  $T_{m(\cdot)}$ , много большим периода  $\Delta t$  измерений СТЗ. Формирующие фильтры для  $\mathbf{b}_{gyr}$ ,  $\mathbf{b}_{acc}$  описываются дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{b}}_{(\cdot)} = -1/T_{m(\cdot)} \mathbf{b}_{(\cdot)} + \sigma_{m(\cdot)} \sqrt{2/T_{m(\cdot)}} \mathbf{w}_{(\cdot)}, \quad (3)$$

где  $(\cdot)$  заменяет индекс *acc* или *gyr*;  $\mathbf{w}_{(\cdot)}$  – вектор порождающего белого гауссовского шума.

Измерения СТЗ представляют собой двумерные координаты  $\mathbf{y}_i^{CV}$  проекции  $i$ -го признака на нормализованную плоскость изображения видеокамеры, находящуюся на единичном расстоянии от оптического центра  $C_c$  камеры перпендикулярно ее оптической оси  $C_c Z_c$ . Модель измерений СТЗ имеет вид

$$\mathbf{y}_{i \ 2 \times 1}^{CV} = h^{CV}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i^{CV}, \quad h^{CV}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i) = \text{pr} \left( \mathbf{C}_{bc}^T \left[ \mathbf{C}_{hb}^T (\mathbf{r}_h^i - \mathbf{r}_h) - \mathbf{d}_b^c \right] \right), \quad i = 1 \dots N, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}_i^{CV} \sim \mathcal{N}(0_{2 \times 1}, \sigma^{CV} I_2)$  – дискретный белый шум измерений;  $\mathbf{C}_{bc}$  – матрица перехода из ССК в СК камеры;  $\mathbf{d}_b^c$  – вектор координат центра СК камеры, заданный в ССК;  $\text{pr}(I) = [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2]^T / I_3$  – функция, определяющая проекцию на плоскость  $z_c = 1$  произвольного трехмерного вектора  $\mathbf{l} = [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3]^T$ , заданного в СК камеры.

В общем случае для начального оценивания координат визуальных признаков на основе измерений координат их проекций (4) требуется либо сделать несколько последовательных измерений из различных положений, либо применить стереокамеру. Альтернативный подход, позволяющий включить признак в процесс рекуррентного оценивания до определения его декартовых координат, заключается в использовании параметризации обратной глубины [22]. В настоящей работе применяется упрощение: начальная оценка координат  $i$ -го признака  $\hat{\mathbf{r}}_h^{i,k}$ , впервые обнаруженного на  $k$ -м шаге, вычисляется в предположении, что он находится на горизонтальном участке поверхности Земли с высотой  $z_0$  (с точностью до малого отклонения  $\delta z_0^i$ ). В таком случае для вычисления  $\hat{\mathbf{r}}_h^{i,k}$  достаточно данных одного измерения проекций признака  $\mathbf{y}_i^{CV k}$ :

$$\hat{\mathbf{r}}_h^{i,k} = \hat{\mathbf{r}}_h^{c,k} + c \cdot \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \hat{\mathbf{C}}_{hc}^k [\mathbf{y}_i^{CV k T}, 1]^T, \quad c = (z_0 - \hat{\mathbf{r}}_{h,3}^{c,k}) / I_3, \quad (5)$$

где  $\hat{\mathbf{r}}_h^{c,k}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_{hc}^k$  – оценки вектора координат и матрицы перехода из опорной СК в СК камеры в момент первого наблюдения визуального признака;  $\delta z_0^i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{z_0})$  – отклонения, рассматриваемые как независимые для различных признаков.

Процесс начального оценивания координат визуальных признаков  $\hat{\mathbf{r}}_h^{i,k}$  на основе (5) с использованием вырабатываемых БИНС текущих оценок положения и ориентации камеры будем далее называть инициализацией визуальных признаков.

В интервалах между поступлениями измерений от СТЗ приращения оценок параметров  $\hat{\mathbf{q}}_{hb}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_h$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_h$ ,  $\hat{\mathbf{b}}_{gyr}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}_{acc}$  рассчитываются интегрированием системы дифференциальных уравнений БИНС и формирующих фильтров, а оценки положений визуальных признаков  $\hat{\mathbf{r}}_h^i$  остаются неизменными:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{hb} = 1/2 \hat{\mathbf{q}}_{hb} \circ (\boldsymbol{\omega}_{gyr} + \hat{\mathbf{b}}_{gyr}), \quad \dot{\hat{\mathbf{v}}}_h = \hat{\mathbf{C}}_{hb} (\mathbf{n}_{acc} + \hat{\mathbf{b}}_{acc}) + \mathbf{g}_h, \quad \dot{\hat{\mathbf{r}}}_h = \hat{\mathbf{v}}_h, \quad (6)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{hb} = 1/2 \hat{\mathbf{q}}_{hb} \circ (\boldsymbol{\omega}_{gyr} + \hat{\mathbf{b}}_{gyr}), \quad \dot{\hat{\mathbf{v}}}_h = \hat{\mathbf{C}}_{hb} (\mathbf{n}_{acc} + \hat{\mathbf{b}}_{acc}) + \mathbf{g}_h, \quad \dot{\hat{\mathbf{r}}}_h = \hat{\mathbf{v}}_h. \quad (7)$$

Введем вектор погрешностей ВИНС  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_s^T, \mathbf{X}_1^T, \dots, \mathbf{X}_N^T]^T$  – гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, содержащий векторы погрешностей оценок параметров БИНС  $\mathbf{X}_s$  и визуальных признаков  $\mathbf{X}_i$ :

$$\mathbf{X}_{s \ 15 \times 1} = [\delta\boldsymbol{\varphi}_h^T, \delta\mathbf{r}_h^T, \delta\mathbf{v}_h^T, \delta\mathbf{b}_{gyr}^T, \delta\mathbf{b}_{acc}^T]^T, \quad \mathbf{X}_{i \ 3 \times 1} = \delta\mathbf{r}_h^i, \quad i = 1 \dots N, \quad (8)$$

где  $\delta\boldsymbol{\varphi}_h$  – вектор погрешностей оценок ориентации подвижного объекта (вектор конечного поворота в опорной СК);  $\delta\mathbf{r}_h, \delta\mathbf{v}_h$  – векторы погрешностей выработки координат и скорости подвижного объекта в опорной СК;  $\delta\mathbf{b}_{gyr}, \delta\mathbf{b}_{acc}$  – векторы погрешностей оценок смещения нулей ДУС и акселерометров;  $\delta\mathbf{r}_h^i$  – векторы погрешностей оценки координат  $i$ -го визуального признака в опорной СК.

Для минимизации количества параметров погрешность ориентации в (8) представлена вектором конечного поворота в опорной СК  $\delta\boldsymbol{\varphi}_h$ , а не кватернионом  $\delta\mathbf{q}_{hb}$ . Оценка кватерниона ориентации  $\hat{\mathbf{q}}_{hb}$  выражается функцией  $\delta\boldsymbol{\varphi}_h$  и  $\mathbf{q}_{hb}$ :

$$\hat{\mathbf{q}}_{hb} = q(\delta\boldsymbol{\varphi}_h) \circ \mathbf{q}_{hb} \approx [1, \delta\boldsymbol{\varphi}_h^T]^T \circ \mathbf{q}_{hb}, \quad (9)$$

где  $q(\boldsymbol{\varphi}) = [\cos(\|\boldsymbol{\varphi}\|/2), \sin(\|\boldsymbol{\varphi}\|/2)/\|\boldsymbol{\varphi}\| \boldsymbol{\varphi}^T]^T$  – вектор-функция, описывающая преобразование произвольного вектора конечного поворота  $\boldsymbol{\varphi}$  в кватернион поворота.

Оценки остальных параметров ВИНС находим как суммы соответствующих истинных значений из (1) и погрешностей из (8):

$$\hat{\mathbf{r}}_h = \mathbf{r}_h + \delta\mathbf{r}_h, \quad \hat{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_h + \delta\mathbf{v}_h, \quad \hat{\mathbf{b}}_{gyr} = \mathbf{b}_{gyr} + \delta\mathbf{b}_{gyr}, \quad \hat{\mathbf{b}}_{acc} = \mathbf{b}_{acc} + \delta\mathbf{b}_{acc}, \quad \hat{\mathbf{r}}_h^i = \mathbf{r}_h^i + \delta\mathbf{r}_h^i. \quad (10)$$

Выражения (9), (10) описывают зависимость оценок параметров  $\hat{\mathbf{x}}$ , вырабатываемых ВИНС, от истинных значений  $\mathbf{x}$  (1) и погрешностей  $\mathbf{X}$  (8).

Выбранная параметризация погрешностей (8)–(10) аналогична рассмотренным в работах [1, 23].

Задача коррекции ВИНС заключается в том, чтобы на основе поступивших на  $k$ -м шаге измерений СТЗ  $\mathbf{y}^k = [\mathbf{y}_1^{CV^k T}, \dots, \mathbf{y}_N^{CV^k T}]^T$  вычислить поправки к оценкам параметров ВИНС исходя из минимизации их расчетных дисперсий. Коррекция позволяет замедлить увеличение погрешностей выработки оценок координат  $\delta\hat{\mathbf{r}}_h$  и угловой ориентации относительно местной вертикали  $\delta\boldsymbol{\varphi}_{h,3}$  по сравнению с БИНС в автономном режиме, а также обеспечить наблюдаемость остальных компонентов вектора погрешностей БИНС  $\mathbf{X}_s$  и предотвратить их возрастание.

Далее будем использовать следующие обозначения для прогнозируемой и скорректированной оценок ВИНС:

$\tilde{\mathbf{x}}^k \triangleq \hat{\mathbf{x}}^{k/k-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}^k \triangleq \mathbf{X}^{k/k-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}^k \triangleq \mathbf{P}^{k/k-1}$  – прогнозируемая оценка, ее погрешность и матрица ковариаций на  $k$ -м шаге;

$\hat{\mathbf{x}}^k \triangleq \hat{\mathbf{x}}^{k/k}$ ,  $\mathbf{X}^k \triangleq \mathbf{X}^{k/k}$ ,  $\mathbf{P}^k \triangleq \mathbf{P}^{k/k}$  – оценка после коррекции по измерениям  $\mathbf{y}^k$ , ее погрешность и матрица ковариаций.

Это упростит изложение материала, так как позволит опускать индексы шагов  $k, k-1$  там, где не возникнет неоднозначности.

### 3. Фильтрация с использованием линейризованных моделей

Приведенные в предыдущем разделе соотношения позволяют сформулировать задачу нелинейной фильтрации вектора состояний (1) по измерениям (4). Однако

ее можно решить и с использованием линеаризованных моделей, что существенно упростит алгоритм.

Рассмотрим ОФК, основанный на линеаризации. В качестве точки линеаризации на каждом  $k$ -м шаге примем нулевое значение погрешностей прогнозируемых оценок:  $\tilde{\mathbf{X}}^k \text{лин} = \mathbf{0}_{15+3N \times 1}$ .

Изменение погрешностей за шаг прогноза описывается моделью динамики погрешностей ВИНС. Выражения для нее получены на основе (2), (3), (6), (7) путем линеаризации уравнений (2), (6) относительно погрешностей (8) и дискретизации по времени с шагом  $\Delta t$ :

$$\tilde{\mathbf{X}}^k = \mathbf{F}^k \mathbf{X}^{k-1} + \mathbf{M}_w^k \mathbf{w}_s^k, \tag{11}$$

где  $\tilde{\mathbf{X}}^k$  – погрешности прогнозируемых оценок на  $k$ -м шаге;  $\mathbf{X}^{k-1}$  – то же на предыдущем шаге;  $\mathbf{w}_s^k \sim \mathcal{N}(0_{12 \times 1}, I_{12})$  – вектор порождающего дискретного белого шума, отражающий вклад шумов в моделях (2), (3) в погрешность.

Раскроем матричные обозначения в (11):

$$\mathbf{F}^k = \text{blkdiag}(\mathbf{F}_s^k, I_{3N}), \mathbf{F}_s^k = I_{15} + \Delta t \cdot \mathbf{A}^k + o(\Delta t), \mathbf{M}_w^k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ws}^{kT} & \mathbf{0}_{12 \times 3N} \end{bmatrix}^T, \tag{12}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}_h \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{C}}_{hb} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -[\mathbf{n}_h \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_{hb} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -I_3/T_m \text{ gyr} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -I_3/T_m \text{ acc} \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{ws}^k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{hb} ARW \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{C}}_{hb} VRW \sqrt{\Delta t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_3 \sigma_p \text{ acc} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_3 \sigma_p \text{ gyr} \end{bmatrix},$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени;  $\boldsymbol{\omega}_h, \mathbf{n}_h$  – векторы угловой скорости и кажущегося ускорения в опорной СК;  $ARW, VRW$  – случайное блуждание в измерениях угла ДУС и замерах скорости акселерометром;  $\sigma_p \text{ gyr}, \sigma_p \text{ acc}$  – СКО входных дискретных порождающих шумов формирующих фильтров для смещений нуля:

$$\sigma_{p(\cdot)} = \sigma_{m(\cdot)} \sqrt{(2 - \Delta t/T_{m(\cdot)}) \cdot \Delta t/T_{m(\cdot)}}. \tag{13}$$

Запишем выражения для модели измерений ВИНС, полученной путем линеаризации моделей измерений СТЗ для отдельных признаков (4) относительно погрешностей (8) и их объединения по  $i = 1 \dots N$ :

$$\mathbf{y}^k = \tilde{\mathbf{y}}^k - \mathbf{H}^k \tilde{\mathbf{X}}^k + \mathbf{M}_v \mathbf{v}^k, \tilde{\mathbf{y}}^k = \left[ h^{CV}(\tilde{\mathbf{x}}_s^k, \tilde{\mathbf{x}}_1^k)^T, \dots, h^{CV}(\tilde{\mathbf{x}}_s^k, \tilde{\mathbf{x}}_N^k)^T \right]^T, \tag{14}$$

где  $\mathbf{v}^k \sim \mathcal{N}(0, I_{2N})$  – вектор дискретного белого шума измерений на  $k$ -м шаге;  $\tilde{\mathbf{x}}_s^k, \tilde{\mathbf{x}}_i^k, i = 1 \dots N$  – прогнозируемые оценки параметров БИНС и визуальных признаков;

$$\mathbf{H}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1s}^k & \mathbf{H}_1^k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{2s}^k & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^k & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{Ns}^k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_N^k \end{bmatrix} \triangleq [\mathbf{H}_s^k, \mathbf{H}_f^k], \mathbf{M}_v = \text{blkdiag}(\mathbf{M}_{v1}, \dots, \mathbf{M}_{vN}),$$

$$\mathbf{H}_s^k = [\mathbf{H}_{1s}^{kT}, \dots, \mathbf{H}_{Ns}^{kT}]^T, \mathbf{H}_f^k = \text{blkdiag}(\mathbf{H}_1^k, \dots, \mathbf{H}_N^k),$$

$$\mathbf{H}_{is}^k = \mathbf{H}_i^k \left[ [(\tilde{\mathbf{r}}_h^i - \tilde{\mathbf{r}}_h) \times], \quad -I_3, \quad 0_{3 \times 9} \right], \quad \mathbf{H}_i^k = \partial \text{pr}(\mathbf{l}_c) \cdot \mathbf{C}_{bc}^T \tilde{\mathbf{C}}_{hb}^T, \quad \mathbf{M}_{iv} = \sigma^{CV} \cdot I_2,$$

$$\partial \text{pr}(\mathbf{l}_c) = \begin{bmatrix} 1/l_{c3} & 0 & -l_{c1}/l_{c3}^2 \\ 0 & 1/l_{c3} & -l_{c2}/l_{c3}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_c = (l_{c1}, l_{c2}, l_{c3})^T = \mathbf{C}_{bc}^T \tilde{\mathbf{C}}_{hb}^T (\tilde{\mathbf{r}}_h^i - \tilde{\mathbf{r}}_h) - \mathbf{d}_b^c, \quad i = 1 \dots N.$$

Уравнения для модели погрешности инициализации  $i$ -го признака, впервые обнаруженного на  $k$ -м шаге, получены, как отмечалось выше, линеаризацией (5) относительно погрешностей входных данных – скорректированных оценок  $k$ -го шага от БИНС, измерений СТЗ и уровня высоты  $z_0$ :

$$\mathbf{X}_i^k = \mathbf{M}_{is}^k \mathbf{X}_s^k + \mathbf{M}_i^k \mathbf{v}_{i0}^k, \quad \mathbf{M}_{is}^k = [\mathbf{M}_{ip}^k, \mathbf{M}_{ir}^k, \mathbf{0}_{3 \times 9}], \quad \mathbf{M}_i^k = [c \mathbf{M}_{ir}^k \hat{\mathbf{C}}_{hc}^T [I_2, \mathbf{0}_{2 \times 1}]^T \sigma^{CV}, l/l_3 \cdot \sigma_{z0}], \quad (15)$$

где  $\mathbf{v}_{i0}^k \sim \mathcal{N}(0, I_3)$  – случайный вектор, отражающий вклад  $\mathbf{v}_i^{CV}$  и  $\delta z_0^i$ ;

$$\mathbf{M}_{ir}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1/l_3 \\ 0 & 1 & -l_2/l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{ip}^k = -c \mathbf{M}_{ir}^k \cdot \hat{\mathbf{C}}_{hc}^T [I, \times]; \quad l = \hat{\mathbf{C}}_{hc} [y_i^{CVT}, 1]^T; \quad c = (z_0 - \hat{r}_{h,3}^c)/l_3.$$

При обработке очередного  $k$ -го измерения ОФК вырабатывает вектор поправок  $\hat{\mathbf{X}}^k$ , оптимальных в линейном приближении, а затем они добавляются к вектору параметров ВИНС согласно (9), (10). Вычисления производятся с использованием вектора невязок  $\tilde{\mathbf{Y}}^k$  между измерениями  $\mathbf{y}^k$  и их прогнозом  $\tilde{\mathbf{y}}^k$ . Коэффициент усиления  $\mathbf{K}^k$  находят с помощью расчетной матрицы ковариаций вектора погрешностей оценок  $\tilde{\mathbf{P}}^k$ , обновляемой в соответствии с линеаризованными моделями динамики (11), и измерений (14):

$$\hat{\mathbf{X}}^k = \mathbf{K}^k \tilde{\mathbf{Y}}^k, \quad \mathbf{P}^k = \left( I_{15+3N} - \mathbf{K}^k \mathbf{H}^k \right) \tilde{\mathbf{P}}^k, \quad (16)$$

где  $\tilde{\mathbf{Y}}^k = \mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k$ ;  $\mathbf{K}^k = \tilde{\mathbf{P}}^k \mathbf{H}^T \left( \mathbf{H}^k \tilde{\mathbf{P}}^k \mathbf{H}^{kT} + \mathbf{M}_v^k \mathbf{M}_v^{kT} \right)^{-1}$ ;  $\tilde{\mathbf{P}}^k = \mathbf{F}^k \mathbf{P}^{k-1} \mathbf{F}^{kT} + \mathbf{M}_w^k \mathbf{M}_w^{kT}$ . Существуют различные варианты ОФК, математически эквивалентные (16) [24]. Мы будем рассматривать реализации, где обновляются не матрицы ковариаций, а их квадратно-корневые множители (факторы)  $\mathbf{L}^k$ :  $\mathbf{L}^k \mathbf{L}^{kT} = \mathbf{P}^k$  (см. прил.). Достоинство квадратно-корневых фильтров Калмана состоит в том, что для них характерна лучшая, чем у классических ФК, устойчивость при незначительном росте вычислительных затрат [24].

#### 4. Описание блочного фильтра

Кубическая зависимость вычислительной сложности ОФК от размерности вектора состояния обусловлена необходимостью учитывать все корреляционные связи между погрешностями оценок при нахождении расчетной матрицы ковариации  $\mathbf{P}^k$  или ее факторов. В ББФК вместо этого используется экономичное приближенное описание корреляционных связей с помощью метода главных компонент.

Рассмотрим момент инициализации первого набора из  $N$  визуальных признаков с использованием первых поступивших измерений СТЗ  $\mathbf{y}_i^0$ ,  $i = 1 \dots N$  и начальных оценок положения и ориентации БИНС. Предположим, что данные, привлекаемые

для инициализации каждого признака, независимы друг от друга (кроме оценок БИНС), что типично для ВИНС и SLAM. Тогда в линейном приближении погрешности выработки начальных оценок координат визуальных признаков  $\mathbf{X}_i^0$  можно разложить на две компоненты:

$$\mathbf{X}_i^0 = \mathbf{M}_{is}^0 \cdot \mathbf{X}_s^0 + \boldsymbol{\gamma}_i^0, \quad i = 1 \dots N, \quad (17)$$

где  $\mathbf{X}_s^0$  – погрешность параметров БИНС при инициализации;  $\boldsymbol{\gamma}_i^0 = \mathbf{M}_i^0 \mathbf{v}_{i0}^0$  – остаток, не коррелированный с  $\mathbf{X}_s$  и  $\boldsymbol{\gamma}_j^0, j \neq i$ , отражающий вклад погрешностей независимых данных, задействованных при инициализации  $i$ -го визуального признака;  $\mathbf{M}_{is}^0, \mathbf{M}_i^0$  – матрицы линеаризованной модели погрешностей инициализации признака.

Предлагаемая в настоящей статье модель погрешностей инициализации признака (15) также соответствует (17). Разложение (17) позволяет применять в качестве компактного набора параметров, однозначно задающих ковариационную матрицу  $\mathbf{P}^0$ , ковариационные матрицы  $\mathbf{P}_s^0 \triangleq \text{cov}(\mathbf{X}_s^0)$ ,  $\mathbf{P}_i^0 \triangleq \text{cov}(\boldsymbol{\gamma}_i^0)$  и матрицы  $\mathbf{M}_{is}^0$ , выражающие перекрестно коррелированные компоненты погрешностей различных признаков  $\mathbf{X}_i^0, i = 1 \dots N$  через вектор  $\mathbf{X}_s^0$  размерностью  $n_s = 15$ . Это много меньше суммарной размерности векторов погрешностей признаков  $Nn_f$ , где  $N$  порядка нескольких сотен, а  $n_f = 3$ .

Важно подчеркнуть, что в модели измерений (14) с блочно-диагональными матрицами измерений визуальных признаков  $\mathbf{H}_f$  и ковариаций шума  $\mathbf{M}_v \mathbf{M}_v^T$  некоррелированность остатков  $\boldsymbol{\gamma}_i^0, i = 1 \dots N$  (17) дает возможность вырабатывать оптимальные оценки параметров ВИНС с вычислительной сложностью  $O(N)$  в два этапа: сначала путем вычисления оценок (коррекции)  $\mathbf{X}_s^0$  с помощью ФК размерностью  $n_s$ , а затем, – независимо друг от друга – оценок  $\boldsymbol{\gamma}_i^0 (i = 1 \dots N)$  в наборе из  $N$  ФК размерностью  $n_f$  [21]. При этом после коррекции для  $\mathbf{X}_i^1$  действительно разложение (17):

$$\mathbf{X}_i^1 = \mathbf{M}_{is}^1 \cdot \mathbf{X}_s^1 + \boldsymbol{\gamma}_i^1, \quad i = 1 \dots N, \quad (18)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}_i^1$  – остаток, не коррелированный с  $\mathbf{X}_s^1$  и  $\boldsymbol{\gamma}_j^1, j \neq i$ .

К сожалению, такая двухэтапная процедура возможна только для случаев, не имеющих практической значимости: при отсутствии порождающего шума  $\mathbf{W}_s$  в модели динамики погрешностей БИНС (11) или при поступлении дополнительного набора измерений СТЗ в момент инициализации визуальных признаков. Это ограничение обусловлено нарушением (17) в иных ситуациях уже на первом этапе прогноза, в результате которого на каждом этапе минимальная размерность случайного вектора, через который выражаются перекрестно коррелированные компоненты погрешностей различных признаков, увеличивается на  $n_w \triangleq \text{dim}(\mathbf{w}_s) = 12$  элементов (далее этот вектор будем называть общим вектором погрешностей и обозначать  $\mathbf{X}_c$ ).

Действительно, выражение для погрешности прогноза после обработки первого измерения, использованного при инициализации, можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{X}}_s^1 = \mathbf{F}_s^1 \mathbf{X}_s^0 + \mathbf{M}_{ws}^1 \mathbf{w}_s^1, \quad \tilde{\mathbf{X}}_i^1 = \mathbf{X}_i^0 = \mathbf{M}_{is}^0 \cdot \mathbf{X}_s^0 + \boldsymbol{\gamma}_i^0, \quad (19)$$

$$\text{следовательно, } \tilde{\mathbf{X}}_i^1 = \mathbf{M}_{is}^0 \cdot (\mathbf{F}_s^1)^{-1} (\mathbf{X}_s^1 - \mathbf{M}_{ws}^1 \mathbf{w}_s^1) + \boldsymbol{\gamma}_i^0 = \mathbf{M}_{ic}^1 \tilde{\mathbf{X}}_c^1 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i^1, \quad i = 1 \dots N,$$

где  $\mathbf{M}_{ic}^1 = \mathbf{M}_{is}^0 \cdot (\mathbf{F}_s^1)^{-1} [I_{15}, -\mathbf{M}_{ws}^1]$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}_c^1 = [\tilde{\mathbf{X}}_s^{1T}, \mathbf{w}_s^{1T}]^T$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i^1 = \boldsymbol{\gamma}_i^0$ .

После обработки следующих измерений с помощью ОФК погрешности  $\mathbf{X}_i$  можно выразить аналогично (17), но с общим вектором, расширенным на  $n_e$  элементов относительно  $\mathbf{X}_s$ :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{M}_{ic} \cdot \mathbf{X}_c + \gamma_i, \quad i = 1 \dots N, \quad \mathbf{X}_c = [\mathbf{X}_s^T, \mathbf{X}_e^T]^T, \quad (20)$$

где  $\mathbf{X}_c$  – общий вектор погрешностей;  $\mathbf{X}_e$  – расширение общего вектора;  $\gamma_i$  – остаток, не коррелированный с  $\mathbf{X}_c$  и  $\gamma_j, j \neq i$ ;  $\mathbf{M}_{ic}$  – матрицы проекций  $\mathbf{X}_i$  на  $\mathbf{X}_c$ ; индекс шага опускаем для упрощения записи.

Матрицы проекций  $\mathbf{M}_{ic}$  и матрицы ковариаций  $\mathbf{P}_c, \mathbf{P}_i (i = 1 \dots N)$  для  $\mathbf{X}_c$  и  $\gamma_i$  в разложении (20) описывают корреляцию между погрешностями визуальных признаков  $\mathbf{X}_i$  и общим вектором  $\mathbf{X}_c$ , а также задают совместную ковариационную матрицу  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{1 \dots N}}$  для погрешностей всех  $N$  признаков:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{1 \dots N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1c} \mathbf{P}_c \mathbf{M}_{1c}^T + \mathbf{P}_1 & \cdots & \mathbf{M}_{1c} \mathbf{P}_c \mathbf{M}_{Nc}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{Nc} \mathbf{P}_c \mathbf{M}_{1c}^T & \cdots & \mathbf{M}_{Nc} \mathbf{P}_c \mathbf{M}_{Nc}^T + \mathbf{P}_N \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Уравнения (20) также позволяют осуществлять коррекцию в две стадии ( $\mathbf{X}_c$ , затем  $\gamma_i$ ), но ее эффективность будет снижаться с увеличением размерности  $\mathbf{X}_c$ . Чтобы предотвратить рост объема вычислений на каждом шаге, необходимо ограничить размерность  $\mathbf{X}_c$  путем выбора фиксированного значения  $n_e$ . В этом случае выражение (21) приобретает смысл аппроксимации ковариационной матрицы. Дальнейший анализ (см. п. 6) показывает, что при  $n_e$  порядка нескольких десятков достигаются пренебрежимые отклонения оценок ББФК от ОФК. С точки зрения вычислительных затрат значения  $n_e$  больше сотни не оправданы при типичном числе признаков  $N = 200 \dots 300$ . Процедура расширения общего вектора погрешностей, обеспечивающая наилучшую (с учетом заданной нормировки) низкоранговую аппроксимацию корреляционных связей между погрешностями различных признаков и основанная на методе главных компонент, описана ниже.

#### 4.1. Аппроксимация по методу главных компонент

Суть предлагаемой аппроксимации состоит в том, что на каждом этапе прогноза предлагается определять минимальный набор независимых случайных величин, с помощью которых можно выразить коррелированные друг с другом компоненты погрешностей оценок параметров для различных визуальных признаков. Затем среди этих величин выбирают фиксированное число «главных» и принимают их в качестве расширения общего вектора. Эти операции можно формализовать с использованием понятия подпространства  $\mathcal{H}_{(\cdot)}$ , порожденного всеми линейными комбинациями элементов гауссовского случайного вектора  $(\cdot)$  [25]. Опишем предлагаемую последовательность действий.

1. С помощью ортогонализации случайных векторов рассчитаем матрицу  $\mathbf{A}_d$ , задающую проекцию  $\tilde{\mathbf{X}}_i, i = 1 \dots N$  на  $(n_e + n_w)$ -мерное подпространство  $\mathcal{H}_d$ , которое определяем исходя из условия (22):

$$\mathcal{H}_{\mathbf{X}_c} + \mathcal{H}_{\mathbf{w}_s} = \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}_s} + \mathcal{H}_d, \quad (22)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_d} \left( \left[ \tilde{\mathbf{X}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_N^T \right]^T \right) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{d}, \quad (23)$$

где «+» – прямая сумма подпространств;  $\mathbf{d} \sim \mathcal{N}(0_{(n_e+n_w) \times 1}, I_{n_e+n_w})$ ;  $\mathcal{P}_{(\cdot)}$  – оператор проектирования на подпространство  $(\cdot)$ ;  $\mathbf{X}_c$  – общий вектор погрешностей оценок на предыдущем шаге.

2. Путем умножения  $\mathbf{A}_d$  на выбранную нормирующую матрицу находим нормированную матрицу проекций  $\tilde{\mathbf{A}}_d$ . Если вектор погрешностей визуальных признаков содержит компоненты с различной размерностью, то необходимо нормирование, которое устранил чувствительность метода главных компонент к выбору единиц измерения. В настоящей работе нормирование применяется для учета различий значимости коррелированных составляющих погрешностей различных признаков  $\mathbf{M}_{ic} \mathbf{X}_c$  на фоне дисперсии некоррелированных остатков погрешностей  $\gamma_i$ .

3. Вычисляем экономичное сингулярное разложение матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d$  [26]:

$$\tilde{\mathbf{A}}_d = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_e, \mathbf{U}_d] \begin{bmatrix} \Sigma_e & 0 \\ 0 & \Sigma_d \end{bmatrix} [\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_d]^T, \quad (24)$$

где  $\Sigma = \text{blkdiag}(\Sigma_e, \Sigma_d)$  – диагональная матрица, включающая все ненулевые сингулярные числа матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d$  (т.е. собственные числа матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d \tilde{\mathbf{A}}_d^T$ ), расположенные в порядке убывания;  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  – матрицы с ортогональными столбцами, образованные левыми и правыми сингулярными векторами матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d$  соответственно.

В качестве  $\tilde{\mathbf{X}}_e$  принимается линейная комбинация базисных случайных векторов  $\mathcal{H}_d$ , обусловленная первыми  $n_e$  правыми сингулярными векторами  $\tilde{\mathbf{A}}_d$ :  $\tilde{\mathbf{X}}_e = \mathbf{V}_e^T \mathbf{d}$ .

Элементы  $\tilde{\mathbf{X}}_e$  и  $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{V}_d^T \mathbf{d}$  определяют новый ортогональный базис  $\mathcal{H}_d$ . Поскольку сингулярные числа в матрице  $\Sigma$  стоят в порядке убывания, в  $\tilde{\mathbf{d}}$  собраны компоненты, вносящие наименьший вклад в норму матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d$ , которыми можно пренебречь при ее низкоранговой аппроксимации. Элементы  $\tilde{\mathbf{d}}$  не входят в общий вектор, поэтому проекции  $\tilde{\mathbf{X}}_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) на подпространство  $\mathcal{H}_d$  нужно включить в остатки  $\tilde{\gamma}_i$ . Полученные таким образом составляющие остатков  $\tilde{\gamma}_i$  обозначим  $\tilde{\gamma}_{id}$ . Так как совместная матрица ковариаций  $\tilde{\gamma}_{id}, i = 1 \dots N$ , неизвестна, то при совместной обработке данных разных визуальных признаков в ходе коррекции  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  следует задействовать ее верхнюю границу  $\tilde{\mathbf{P}}_d^+$ :

$$\tilde{\mathbf{P}}_d^+ = \text{blkdiag}(\alpha_1 \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{1d}, \dots, \alpha_N \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{Nd}) \succeq \text{cov}([\tilde{\gamma}_{1d}^T, \dots, \tilde{\gamma}_{Nd}^T]^T), \quad (25)$$

где  $\tilde{\mathbf{P}}_{id} = \text{cov}(\tilde{\gamma}_{id})$ ;  $\alpha_i$  – коэффициенты завышения ковариации [16], удовлетворяющие условию  $\sum_{i=1}^N 1/\alpha_i = 1$ .

Вследствие использования  $\tilde{\mathbf{P}}_d^+$  расчетную матрицу ковариаций  $\mathbf{P}_c$  для погрешности скорректированных оценок  $\mathbf{X}_c$  также можно рассматривать как верхнюю границу.

Предложенный в настоящем разделе подход, основанный на включении в  $\tilde{\mathbf{X}}_e$  главных компонент корреляции погрешностей визуальных признаков на этапе прогноза, обеспечивает хорошее приближение для совместной ковариационной матрицы погрешностей признаков (21) при условии, что  $n_e$  выбрано достаточно большим для соблюдения неравенства  $\text{trace}(\Sigma_d) \ll \text{trace}(\Sigma_e)$ .

#### 4.2. Матрицы-параметры моделей динамики погрешностей и измерений ББФК

В модели, используемой в ББФК, несколько обобщается модель (11)–(13). Кроме матриц-параметров динамики погрешностей БИНС  $\mathbf{F}_{s^2}, \mathbf{M}_{ws}$  введены дополнительные матрицы-параметры  $\mathbf{F}_{is^2}, \mathbf{M}_{iws^2}, \mathbf{F}_p, \mathbf{M}_{iw}$ . Это позволяет совмещать ББФК с моделью-

ми, в которых динамика погрешностей параметров визуальных признаков нетривиальна (например, при параметризации в ССК [3] или использовании инвариантных погрешностей [4]):

$$\tilde{\mathbf{X}}_s^k = \mathbf{F}_s^k \mathbf{X}_s^{k-1} + \mathbf{M}_{ws}^k \mathbf{w}_s^k, \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^k = \mathbf{F}_i^k \mathbf{X}_i^{k-1} + \mathbf{F}_{is}^k \mathbf{X}_s^{k-1} + \mathbf{M}_{iws}^k \mathbf{w}_s^k + \mathbf{M}_{iw}^k \mathbf{w}_i^k, \quad i = 1 \dots N, \quad (27)$$

где  $\mathbf{w}_p$ ,  $i = 1 \dots N$  – векторы нормализованного дискретного белого шума динамики;  $\mathbf{w}_i$  не коррелирован с  $\mathbf{w}_s$  и  $\mathbf{w}_j$ ,  $j \neq i$ .

Для рассматриваемой модели динамики (11)–(13) имеем:

$$\mathbf{F}_i = I_3, \mathbf{F}_{is} = \mathbf{0}_{3 \times 15}, \mathbf{M}_{iw} = \mathbf{0}_{3 \times 12}, \mathbf{M}_{iws} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, i = 1 \dots N.$$

Модель измерений ББФК, описывающая невязку измерения  $i$ -го визуального признака  $\mathbf{Y}_i$ , соответствует (14):

$$\mathbf{Y}_i^k = \mathbf{M}_{iv}^k \mathbf{v}_i^k - \mathbf{H}_{is}^k \mathbf{X}_s^k - \mathbf{H}_i^k \mathbf{X}_i^k, \quad i = 1 \dots N, \quad (28)$$

где  $\mathbf{v}_i^k \sim \mathcal{N}(0, I_2)$  – вектор порождающего дискретного белого шума измерений.

## 5. Квадратно-корневая реализация ББФК

В предлагаемом варианте фильтра используются процедуры, стандартные для библиотек линейной алгебры: QR- и SVD-разложения [26], матричные и векторно-матричные произведения.

Параметры ковариации:

- для общего вектора погрешностей  $\mathbf{X}_c = [\mathbf{X}_s^T, \mathbf{X}_e^T]^T$  применяется  $\mathbf{L}_s \triangleq \mathbf{P}_s^{1/2}$ , однозначно описывающий  $\mathbf{L}_c \triangleq \mathbf{P}_c^{1/2}$ , так как всегда выполняется условие  $\mathbf{L}_c = \text{blkdiag}(\mathbf{L}_s, I_{n_e})$ ;
- для погрешностей  $i$ -го признака  $\mathbf{X}_i = \mathbf{M}_{ic} \mathbf{X}_c + \boldsymbol{\gamma}_i$  используется  $\mathbf{L}_i = \mathbf{P}_i^{1/2}$ ,  $\mathbf{M}_{id} = \mathbf{P}_{id}^{1/2}$  и  $\mathbf{L}_{ic} \triangleq \mathbf{M}_{ic} \mathbf{L}_c$ ,  $i = 1 \dots N$ .

На  $k$ -м шаге на основе невязок измерений  $\tilde{\mathbf{Y}}_i^k$  рассчитываются поправки  $\hat{\mathbf{X}}_s^k$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_i^k$ , корректирующие погрешности прогнозируемых оценок, и обновляются факторы матриц ковариаций.

Матрицы модели динамики и измерений введены в (26)–(28). Факторы матриц ковариаций шумов измерений  $\mathbf{M}_{iv}$  в (28) должны быть невырожденными. В рассматриваемой задаче факторы  $\mathbf{L}_i$  невырожденные, и их обратные величины  $\mathbf{L}_i^{-1}$  используются как нормирующие множители при аппроксимации по методу главных компонент (допускается выбор любых других нормирующих множителей). Размерности векторов обозначены как

$$\begin{aligned} n_s &= \dim(\mathbf{X}_s), n_e = \dim(\mathbf{X}_e), n_c = \dim(\mathbf{X}_c), \\ n_w &= \dim(\mathbf{w}_s), n_f = \dim(\mathbf{X}_i), n_y = \dim(\mathbf{Y}_i). \end{aligned}$$

Псевдокод алгоритмов для этапов прогноза приведен в приложении.

Алгоритм этапа прогноза (алгоритм 1) служит для обновления факторов матриц ковариаций фильтра в соответствии с моделью динамики (26), (27) и процедурой низкоранговой аппроксимации на основе (24). При этом случайный вектор  $\mathbf{d}$  в (22) определяется как

$$\mathbf{d} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{X}_e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_s \\ \mathbf{d}_s \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_s \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где  $\tilde{\mathbf{X}}_s \triangleq \mathbf{L}_s^{-1} \mathbf{X}_s$  и  $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_s \triangleq \tilde{\mathbf{L}}_s^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_s$  – нормированные векторы погрешностей БИНС (вектор на предыдущем шаге и прогнозируемый);  $\mathbf{Q}$  – ортогональная матрица, такая что  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_s, \mathbf{0}_{n_s \times n_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \mathbf{L}_s, \mathbf{M}_{ws} \end{bmatrix} \mathbf{Q}$ .

Алгоритм этапа коррекции (алгоритм 2) предназначен для обновления факторов матриц ковариаций согласно модели измерений (28) и расчета поправок  $\hat{\mathbf{X}}_s, \hat{\mathbf{X}}_i, i = 1 \dots N$ . Эта процедура нуждается в комментариях.

На первой стадии алгоритма решается задача коррекции общего вектора погрешностей. Путем перегруппировки слагаемых в выражениях для невязок (28) с учетом разложения (20) формируется система уравнений невязок измерений для нормированного общего вектора погрешностей  $\tilde{\mathbf{X}}_c \triangleq \tilde{\mathbf{L}}_c^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_c$  :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{v}_{ic} - \mathbf{H}_{ic} \tilde{\mathbf{X}}_c, i = 1 \dots N, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{H}_{ic} = \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{L}}_{ic} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{is} \tilde{\mathbf{L}}_s, \mathbf{0}_{n_y \times n_e} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_{ic} = \mathbf{M}_{iv} \mathbf{v}_i - \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i,$$

$$\text{cov} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1c}^T, \dots, \mathbf{v}_{Nc}^T \end{bmatrix}^T \right) \preceq \text{blkdiag}(\mathbf{R}_{1c}^+, \dots, \mathbf{R}_{Nc}^+),$$

$\mathbf{R}_{ic}^+ = \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^+ \mathbf{H}_i^T + \mathbf{M}_{iv} \mathbf{M}_{iv}^T, \tilde{\mathbf{P}}_i^+ = \tilde{\mathbf{L}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i^T + (\alpha_i - 1) \tilde{\mathbf{M}}_{id} \tilde{\mathbf{M}}_{id}^T$  – верхние границы матриц ковариаций шума  $\mathbf{v}_{ic}$  и остатка прогнозируемых погрешностей признака  $\tilde{\mathbf{Y}}_i$  соответственно.

Далее для вычисления вектора поправок и параметров ковариации применяется обновление по невязкам  $\tilde{\mathbf{Y}}_i$  информационных векторов  $\mathbf{H}_{ic}^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_i$  и информационных матриц  $\mathbf{H}_{ic}^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \mathbf{H}_{ic}$  с учетом того, что информационная матрица для  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  является единичной, а суммарную информационную матрицу обновлений  $\Omega$  также можно диагонализировать путем разложения:

$$\Omega = \sum_i \mathbf{H}_{ic}^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \mathbf{H}_{ic} = \mathbf{V}_\Omega \Sigma_\Omega \mathbf{V}_\Omega^T, \quad (31)$$

где  $\mathbf{V}_\Omega$  – ортогональная матрица перехода в собственный базис  $\Omega$ ;  $\Sigma_\Omega$  – диагональная матрица с неотрицательными элементами на главной диагонали.

Вектор поправок  $\tilde{\mathbf{X}}'_c$  для нормированного вектора погрешностей  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  рассчитывается по следующим формулам:

$$\hat{\tilde{\mathbf{X}}}'_c = \tilde{\mathbf{S}}_c'^T \sum_i \mathbf{H}_{ic}^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_i, \tilde{\mathbf{S}}_c' = \mathbf{V}_\Omega (I_{n_c} + \Sigma_\Omega)^{-1/2}, \text{cov}(\tilde{\mathbf{X}}'_c) = I_{n_c}, \quad (32)$$

где значения со штрихом получены в промежуточном базисе (собственном базисе  $\Omega$ ), который в дальнейшем будет заменен.

С учетом  $\mathbf{X}_c = \tilde{\mathbf{L}}_c \tilde{\mathbf{S}}_c' \tilde{\mathbf{X}}'_c$  вектор поправок и матрицу ковариаций общего вектора погрешностей после коррекции можно рассчитать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}}_c = \mathbf{S}'_c \hat{\tilde{\mathbf{X}}}'_c, \mathbf{P}_c = \mathbf{S}'_c \mathbf{S}'_c{}^T, \mathbf{S}'_c = \tilde{\mathbf{L}}_c \tilde{\mathbf{S}}_c'. \quad (33)$$

Фактор матрицы ковариаций  $\mathbf{S}'_c$  является квадратной матрицей общего вида, так как исчезает некоррелированность входящих в  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  компонентов  $\tilde{\mathbf{X}}_s$  и  $\tilde{\mathbf{X}}_e$ .

Для удобства последующих вычислений  $\mathbf{P}_c$  можно привести к виду  $\mathbf{P}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{L}_c^T$ , где  $\mathbf{L}_c = \text{blkdiag}(\mathbf{L}_s, I_{n_e})$  путем следующих действий.

1. Через смену базиса первые  $n_s$  строк  $\tilde{\mathbf{S}}'_c$  приводятся к нижнетреугольному виду:

$$\tilde{\mathbf{S}}_c = \tilde{\mathbf{S}}'_c \mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_s & 0 \\ (*) & (*) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_c = \mathbf{Q}'^T \tilde{\mathbf{X}}'_c \triangleq [\tilde{\mathbf{X}}_s^T, \tilde{\mathbf{X}}_e^T]^T, \quad (34)$$

где  $\mathbf{Q}'$  – ортогональная матрица, приводящая  $\tilde{\mathbf{S}}'_c$  к заданному виду.

Теперь справедливы равенства  $\tilde{\mathbf{X}}_s = \tilde{\mathbf{L}}_s \tilde{\mathbf{L}}_s^T \tilde{\mathbf{X}}'_s$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}_e = \tilde{\mathbf{L}}_e \tilde{\mathbf{S}}'_e \tilde{\mathbf{X}}'_e$ , из которых следует, что

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}_c} = \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}_s} + \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}_e}. \quad (35)$$

2. Выражение (35) позволяет без потери информации о корреляциях погрешностей признаков переопределить их общий вектор, заменив в нем  $\tilde{\mathbf{X}}_e$  на  $\hat{\tilde{\mathbf{X}}}_e$ :  $\hat{\tilde{\mathbf{X}}}_c \triangleq [\hat{\tilde{\mathbf{X}}}_s^T, \hat{\tilde{\mathbf{X}}}_e^T]^T$ . Окончательно получаем:

$$\hat{\tilde{\mathbf{X}}}_s = \mathbf{L}_s \hat{\tilde{\mathbf{X}}}'_s, \quad \mathbf{L}_s = \tilde{\mathbf{L}}_s \tilde{\mathbf{L}}_s, \quad \hat{\tilde{\mathbf{X}}}_e = \tilde{\mathbf{S}}_c^T \sum_i \mathbf{H}_{ic}^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_i \triangleq [\hat{\tilde{\mathbf{X}}}_s^T, \hat{\tilde{\mathbf{X}}}_e^T]^T. \quad (36)$$

На второй стадии алгоритма коррекции локальные ФК размерностью  $n_f$  вырабатывают поправки к погрешностям признаков  $\tilde{\mathbf{X}}_i$  по невязкам  $\tilde{\mathbf{Y}}_i$  и их параметры ковариации после коррекции  $\mathbf{L}_{ic}$ ,  $\mathbf{L}_i$ ,  $\mathbf{M}_{id}$ :

$$\hat{\tilde{\mathbf{X}}}_i = \mathbf{L}_{ic} \hat{\tilde{\mathbf{X}}}'_i + \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i, \quad \mathbf{L}_{ic} = (\tilde{\mathbf{L}}_{ic} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_{ic}) \cdot \tilde{\mathbf{S}}_c, \quad [\mathbf{L}_i, 0_{n_f \times n_y}] = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{Q}_i, \quad (37)$$

$$\mathbf{S}_i = [(\mathbf{I}_{n_f} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \tilde{\mathbf{L}}_i, \mathbf{K}_i \mathbf{M}_{iv}], \quad \mathbf{M}_{id} = (\mathbf{I}_{n_f} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \tilde{\mathbf{M}}_{id}, \quad i = 1 \dots N, \quad (38)$$

где  $\mathbf{Q}_i$  – ортогональная матрица, приводящая  $\mathbf{S}_i$  к нижнетреугольному виду;

$$\mathbf{K}_i = \tilde{\mathbf{P}}_i^+ \mathbf{H}_i^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1}. \quad (39)$$

При  $\mathbf{M}_{id} = 0_{n_f \times n_f}$  коэффициент  $\mathbf{K}_i$  (39) совпадает с коэффициентами усиления ФК в задаче коррекции  $\tilde{\gamma}_i$  по невязке  $\tilde{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{M}_{iv} \mathbf{v}_i - \mathbf{H}_i \tilde{\gamma}_i$ . Расчет коэффициентов  $\mathbf{K}_i$ ,  $i = 1 \dots N$  в (37) согласно равенству (39) обеспечивает некоррелированность погрешностей визуальных признаков после коррекции  $\tilde{\mathbf{X}}_i$  с невязкой  $\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{\mathbf{Y}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}_N^T]^T$ :  $\text{cov}(\tilde{\mathbf{X}}_i, \tilde{\mathbf{Y}}) = 0_{n_f \times N n_f}$ , что соответствует оптимальной в линейном приближении обработке всех доступных измерений.

Описанный двухстадийный алгоритм этапа коррекции ББФК математически эквивалентен этапу коррекции ОФК в случае  $\mathbf{M}_{id} = 0_{n_f \times n_f}$ ,  $i = 1 \dots N$ . В предложенной реализации коэффициенты завышения ковариаций  $\alpha_i$  (44) пересчитываются на каждом шаге коррекции. Такой подход применен вместо увеличения  $\mathbf{L}_{i \text{wd}}$  (43) в  $\sqrt{N}$  раз на этапе прогноза (стандартная практика в ДФК [16]) для формирования более узкой верхней границы  $\mathbf{P}_d^+$  в условиях, когда с течением времени исчезают одни визуальные признаки и выделяются другие.

Вычислительная сложность описанных алгоритмов  $O(N)$ , поскольку операции с данными  $N$  визуальных признаков производятся независимо друг от друга (кроме операций суммирования). При коррекции  $\tilde{\mathbf{X}}_i$ ,  $i = 1 \dots N$  ковариационные матрицы  $\mathbf{L}_i$  обновляются независимо от  $\mathbf{L}_c$ , что снижает вычислительную сложность с  $O(Nn_c^3)$  до  $O(Nn_c^2)$  по сравнению с ДФК, где каждый локальный фильтр рассчитывает совместную ковариационную матрицу для вектора  $[\tilde{\mathbf{X}}_c^T, \tilde{\mathbf{X}}_i^T]^T$ .

## 6. Оценка эффективности

Сравнение оценок и длительности вычислений ББФК и квадратно-корневого ФК проведено в среде Matlab при моделировании работы ВИНС, оснащенной монокулярной камерой с коррекцией по статичным точечным визуальным признакам, параметризованным радиус-векторами в опорной СК. Использовалась классическая формулировка модели погрешностей БИНС. Начальное оценивание положения визуальных признаков осуществлялось в предположении, что они принадлежат земной поверхности, для карты высот которой задано СКО. Это позволяет инициализировать признак на основе первого измерения его проекций СТЗ, а последующие измерения использовать для коррекции оценок ВИНС. Таким образом можно избежать проблем, связанных с возникновением нелинейных эффектов при инициализации визуальных признаков по измерениям с малым параллаксом [22], которые не рассматриваются в настоящей работе.

### 6.1. Время вычислений ББФК

Требуемое соотношение скорости работы и точности ББФК достигается путем выбора размерности расширения общего вектора состояния  $n_e$ . На рис. 2 проиллюстрировано влияние  $n_e$  на длительность вычислений ББФК. Данные получены для процессора Intel Core 7255 H, 2 GHz в однопоточном режиме; размерности векторов системы –  $n_s = 15$ ,  $n_w = 12$ ,  $n_f = 3$ ,  $n_y = 2$ ; число признаков  $N = 300$  и  $1000$ .

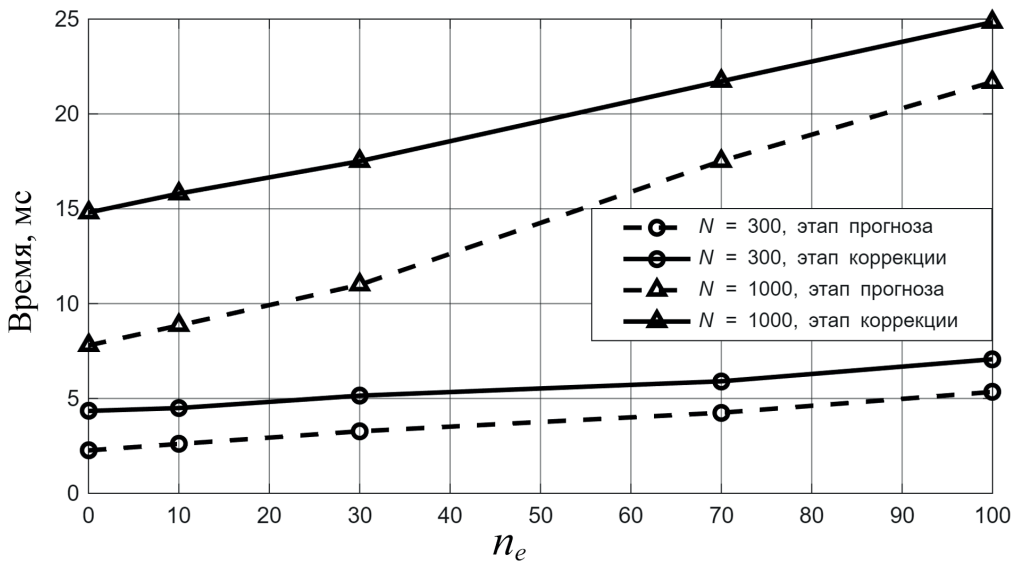


Рис. 2. Время вычислений ББФК при  $N = 300$ ,  $N = 1000$  и различных  $n_e$

Видно, что для  $n_e = 0$  время вычислений при  $N = 300$  составило 4,5 мс для этапа коррекции и 2,5 мс для этапа прогноза; при  $N = 1000$  – 15 мс для этапа коррекции и 8 мс для этапа прогноза. При увеличении значений  $n_e$  от 0 до 100 время возрастает примерно на 85%.

Длительность вычислений стандартного квадратно-корневого ФК при  $N = 300$  составила 175 мс для этапа коррекции и 55 мс для этапа прогноза; при  $N = 1000$  – 4300 мс

для коррекции и 1500 мс для прогноза. Реализация фильтра, использованная для тестирования, описана в приложении (алгоритм 3).

### 6.2. Точность оценок ББФК

Условия численного моделирования. Результаты получены в течение 15-секундного моделирования снижения объекта с ВИНС, оснащенной МЭМС-датчиками низкой точности и корректируемой по данным KLT-трекера визуальных признаков [27, 28] на изображениях с бортовой камеры частотой 20 Гц. Максимальное количество одновременно наблюдаемых признаков – 300, среднее – 205. Новые точки выделялись детектором ORB [29], для их дальнейшего отслеживания применялся KLT-трекер [27, 28]. По мере выхода точек из поля зрения камеры в систему добавлялись новые таким образом, что их число не превышало заданного максимума  $N = 300$  и не опускалось существенно ниже. Имитировалось снижение с 20 до 2 м над текстурированной сценой (рис. 3, 4).

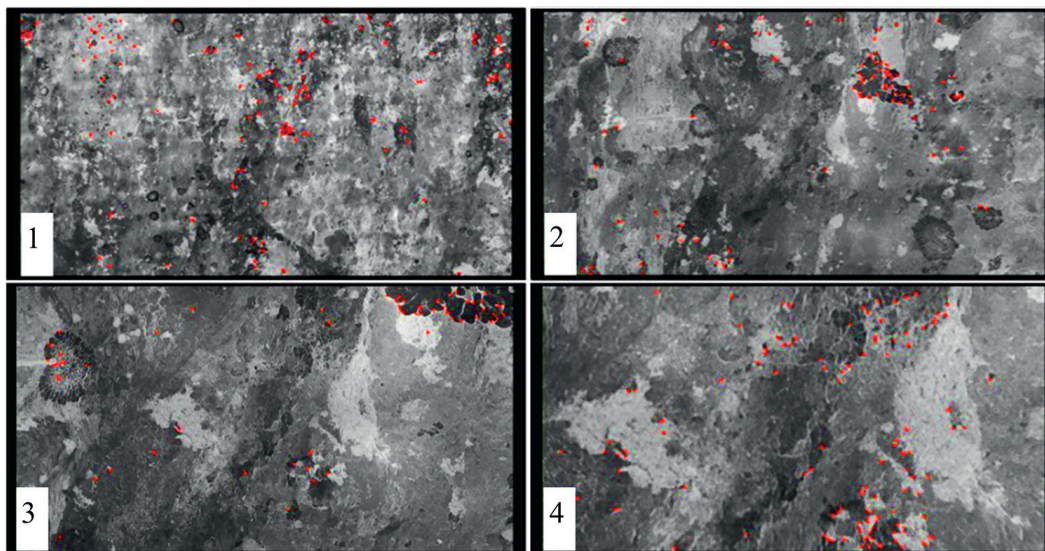


Рис. 3. Изображения с бортовой камеры во время моделирования снижения

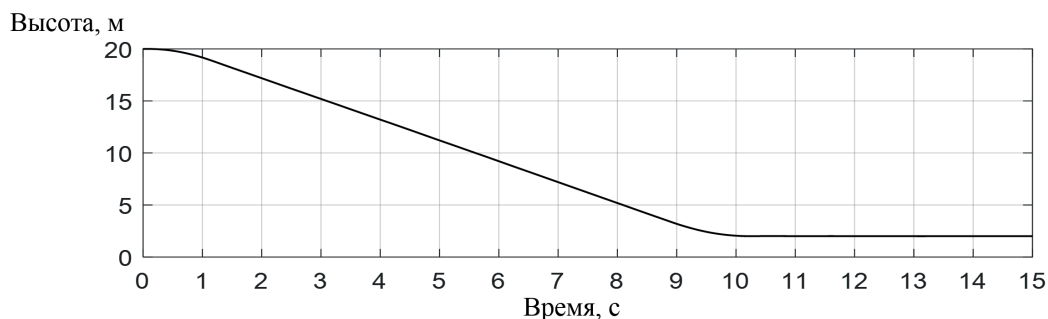


Рис. 4. Высота бортовой камеры над сценой (м) во время моделирования снижения

Выбраны следующие параметры моделирования.

Инерциальные датчики: случайное блуждание угла ДУС  $ARW = 0,015^\circ / \text{с} / \sqrt{\text{Гц}}$ ; параметры экспоненциально-коррелированного шума для ДУС  $\sigma_{m \text{ gyr}} = 0,05^\circ / \text{с}$ ,

$T_{m\text{ гир}} = 20$  с, для акселерометра –  $\sigma_{m\text{ acc}} = 0,001$  м/с<sup>2</sup>,  $T_{m\text{ acc}} = 20$  с; случайное блуждание скорости акселерометра  $VRW = 0,03$  м/с<sup>2</sup> /  $\sqrt{\text{Гц}}$ ; рабочая частота БИНС 400 Гц.

Техническое зрение: СКО шума измерений координат проекции визуального признака на плоскость кадра  $\sigma_{CV} = 0,003$ ; СКО карты высот при инициализации положения признака  $\sigma_{z0} = 0,1$  м; разрешение кадров 1920×1080, дисторсия не моделируется; рабочая частота технического зрения 20 Гц.

Начальные погрешности навигационных параметров: погрешности ориентации  $\delta\Phi_h^0 = [-0,1^\circ, 0,1^\circ, 0^\circ]^T$ , остальных параметров – нулевые; начальные СКО оценок  $\sigma_{r0}$ ,  $\sigma_{v0}$ ,  $\sigma_{\psi0}$  нулевые;  $\sigma_\phi = 0,1^\circ$ .

**Примечание.** Принятые параметры инерциальных датчиков соответствуют МЭМС низкой точности, поэтому в изменение погрешностей БИНС вносится большой порождающий шум. Вклад начальных погрешностей, напротив, намеренно занижен. Это оправдано в рамках тестирования ББФК, так как именно порождающий шум динамики БИНС приводит к необходимости аппроксимации и отклонению оценок ББФК от оптимальных. Значения  $\sigma_{r0}$ ,  $\sigma_{\psi}$  также приняты нулевыми, поскольку относятся к ненаблюдаемым погрешностям и имеют значение только при анализе состоятельности.

При таких параметрах моделирования дрейф оценок БИНС в некорректируемом режиме за 15 с составил 6 м по координатам, 0,4° по ориентации и 1,2 м/с по скорости. При коррекции по визуальным данным с использованием ОФК дрейф по координатам снизился до 4,2 см, по остальным параметрам не проявился, среднеквадратическая погрешность ориентации составила 0,09°, а скорости – 0,01 м/с.

### 6.3. Сравнение оценок ББФК и ОФК

Выбранной длительности моделирования (15 с) достаточно для сравнения, поскольку она существенно превышает типичное время отслеживания точек (о чем будет сказано ниже), и с учетом того, что в ББФК аппроксимации подвержены только корреляции между визуальными признаками, совместно оцениваемыми в течение некоторого времени, а корреляции между вновь добавляемыми признаками передаются точно.

На рис. 5 показаны графики влияния варьирования  $n_e$  в диапазоне  $0 \dots n_{max}$  на относительное расхождение оценок ББФК и ОФК  $c_x \triangleq \frac{\|\hat{x}_{\text{ББФК}} - \hat{x}_{\text{ОФК}}\|_2}{\|\hat{x}_{\text{ОФК}} - x\|_2}$  для оценок положения (*pos*), скорости (*vel*) и ориентации (*att*).

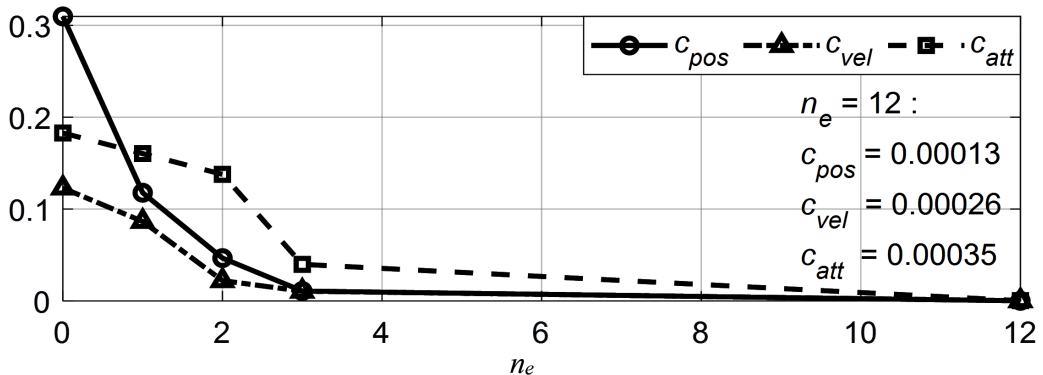


Рис. 5. Относительное расхождение оценок ББФК и ОФК при различных  $n_e$

При  $n_e = 12$  отклонения оценок ББФК от ОФК составили менее 0,05% для всех навигационных параметров. С дальнейшим ростом  $n_e$  значения  $c_x$  продолжают убывать. ББФК становится математически эквивалентным ОФК при  $n_e = Nn_f$ .

#### 6.4. Длительность отслеживания признаков

Из-за быстрой смены ракурсов при перемещении и поворотах видеокамеры обычно большинство точек удается отследить лишь на сравнительно короткой последовательности кадров, что способствует распространению в визуально-инерциальной навигации алгоритмов на базе относительно короткого скользящего временного окна. Например, в оригинальной версии MSCKF [11] максимальное число кадров, где наблюдается один и тот же признак, ограничено 30, что соответствует 1,5 с при частоте съемки 20 Гц.

Однако время обзора признака сильно зависит от характера движения объекта. Рассмотрим статистику работы трекера при 15-секундном снижении над сценой. На рис. 6 представлено эмпирическое распределение времени отслеживания. Среднее время составило 3,1 с (62 кадра). Время наблюдения 30% признаков превысило 5 с, 10% – 6 с, 5% – 8 с, что соответствует 100, 120 и 160 кадрам. Ввиду отсутствия в ББФК жестких ограничений времени обзора несколько точек отслеживались на всем протяжении моделирования (15 с), т.е. на 300 кадрах.

Доля потерянных признаков

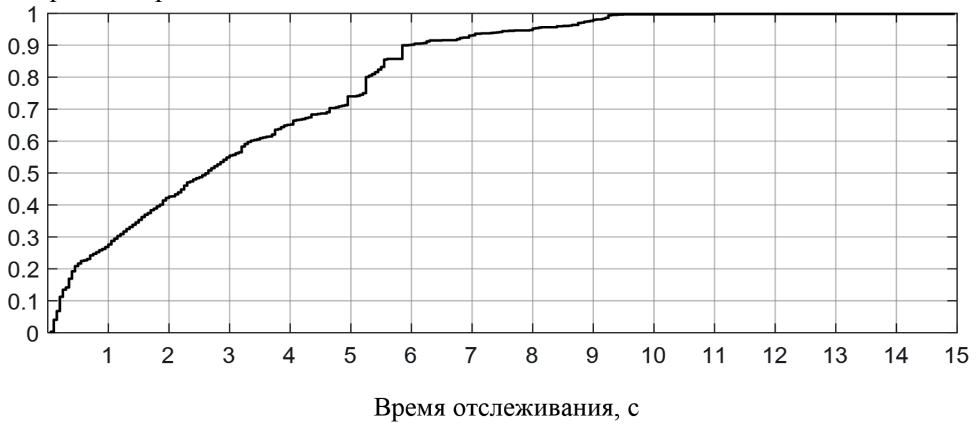


Рис. 6. Эмпирическое распределение времени отслеживания признаков при моделировании

### 7. Заключение

Для решения задачи визуально-инерциальной навигации предложен ББФК, при одновременном отслеживании  $N$  визуальных признаков вырабатывающий оценки навигационных параметров подвижного объекта и координат визуальных признаков с вычислительной сложностью  $O(N)$ . Они практически совпадают с оценками ОФК при значительно меньшем времени вычисления. В отличие от алгоритмов на основе скользящего окна ББФК реализует полностью рекуррентное оценивание без ограничения длительности отслеживания визуальных признаков.

Сохранение точности при ускорении вычислений в ББФК достигнуто за счет декомпозиции алгоритма оценивания и применения экономичной аппроксимации

корреляционных связей между оценками фильтра с помощью метода главных компонент. Последнее отличает ББФК от известных рекуррентных ДФК.

ББФК позволяет оперировать блоками модели погрешностей БИНС независимо от блоков, связанных с визуальными признаками, что облегчает их добавление и исключение, а также обеспечивает эффективную параллелизацию по  $N$  для систем с большим числом визуальных признаков. Моделирование работы ВИНС демонстрирует возможность обработки сотен признаков в реальном времени в однопоточном режиме. В рассматриваемых условиях пренебрежимо малые отклонения от оценок ОФК достигнуты при размерности расширения исходного вектора состояния, незначительно влияющей на объем вычислений. При моделировании работы ВИНС использовалась классическая параметризация визуальных признаков радиус-вектором в опорной СК.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (гос. задание FENU-2024-0004 от 17.01.24).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Huang, G.**, Visual-Inertial Navigation: A Concise Review, *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Montreal, 2019, pp. 9572–9582, <https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8793604>.
2. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. Изд. 4-е, испр. и доп. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2025. 498 с.
3. **Bloesch, M., Burri, M., Omari, S., Hutter, M., Siegwart, R.**, Iterated extended Kalman filter based visual-inertial odometry using direct photometric feedback, *The International Journal of Robotics Research*, 2017, vol. 36, no. 10, pp. 1053–1072, <https://doi.org/10.1177/0278364917728574>.
4. **Wu, K., Zhang, T., Su, D., Huang, S., Dissanayake, G.**, An Invariant-EKF VINS Algorithm for Improving Consistency, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vancouver, BC, Canada, 2017, pp. 1578–1585, <https://doi.org/10.1109/IROS.2017.8205965>.
5. **Степанов О.А., Исаев А.М.** Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательно-го моделирования // *Гироскопия и навигация*. 2023. Т. 31. №3 (122). С. 48–65. EDN: MVWKGK.
6. **Болотин Ю.В., Брагин А.В., Гулевский Д.В.** Исследование состоятельности расширенного фильтра Калмана в задаче навигации пешехода с БИНС, закрепленными на стопах // *Гироскопия и навигация*. 2021. Т. 29. № 2 (113). С. 59–77. DOI: 10.17285/0869-7035.0063.
7. **Gui, J., Gu, D., Wang, S., Hu, H.**, A Review of Visual Inertial Odometry from Filtering and Optimisation Perspectives, *Advanced Robotics*, 2015, vol. 29, no. 1, pp. 1–13, <https://doi.org/10.1080/01691864.2015.1057616>.
8. **Qin, T., Li, P., Shen, S.**, VINS-Mono: A Robust and Versatile Monocular Visual-Inertial State Estimator, *IEEE Transactions on Robotics*, 2018, vol. 34, no. 4, pp. 1004–1020, <https://doi.org/10.1109/TRO.2018.2853729>.
9. **Leutenegger, S., Lynen, S., Bosse, M., Siegwart, R., Furgale, P.**, Keyframe-Based Visual-Inertial Odometry Using Nonlinear Optimization, *The International Journal of Robotics Research*, 2014, vol. 34, no. 3, pp. 314–334, <https://doi.org/10.1177/0278364914554813>.
10. **Mourikis, A.I.**, Characterization and optimization of the accuracy of mobile robot localization: PhD thesis. Minneapolis: University of Minnesota, 2008. 210 p.
11. **Mourikis, A.I., Roumeliotis, S.I.**, A Multi-State Constraint Kalman Filter for Vision-aided Inertial Navigation, *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Rome, 2007, pp. 3565–3572, <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2007.364024>.
12. **Huai Z., Huang, G.**, Robocentric visual-inertial odometry, *The International Journal of Robotics Research*, 2019, vol. 41, no 7, pp. 667–689, <https://doi.org/10.1177/0278364919853361>.

13. **Kaess, M., Ranganathan, A., Dellaert, F.**, iSAM: Fast Incremental Smoothing and Mapping with Efficient Data Association, *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Rome, 2007, pp. 1670–1677, <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2007.363563>.
14. **Kazerouni, I. A., Fitzgerald, L., Dooly, G., Toal, D.**, A survey of state-of-the-art on visual SLAM, *Expert Systems with Applications*, 2022, vol. 205, pp. 117734, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117734>.
15. **Barrau, A., Bonnabel, S.**, The Invariant Extended Kalman Filter as a Stable Observer, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, no. 4, pp. 1797–1812, <https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2594085>.
16. **Carlson, N.A.**, Federated square root filter for decentralized parallel processors, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1990, vol. 26, no. 3, pp. 517–525, <https://doi.org/10.1109/7.106130>.
17. **Paik, B.S., Oh, J.H.**, Gain fusion algorithm for decentralised parallel Kalman filters, *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 2000, vol. 147, no. 1, pp. 97–103, <https://doi.org/10.1049/ip-cta:20000141>.
18. **Roy, S., Hashemi, R.H., Laub, A.J.**, Square root parallel Kalman filtering using reduced-order local filters, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 276–289, <https://doi.org/10.1109/7.78303>.
19. **Stepanov, O., Litvinenko, Y.**, Research of Nonrecursive Federated Filtering Algorithms under Non-White Noise Measurement Errors, *Ronzhin, A., Truong, XT., Meshcheryakov, R. (eds) Interactive Collaborative Robotics, ICR 2025*, Lecture Notes in Computer Science, 2026, vol. 16304, Springer, Cham., [https://doi.org/10.1007/978-3-032-11903-2\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-032-11903-2_23).
20. **Holmes, M.**, Introduction to Scientific Computing and Data Analysis, Cham: Springer, 2016, 440 p., <https://doi.org/10.1007/978-3-319-30256-0>.
21. **Циоплиакис Н.И.** Блочный фильтр Калмана с линейной вычислительной сложностью для комплексов с техническим зрением инерциальных навигационных систем // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2024. Т. 24. № 4. С. 43–56. DOI: 10.14529/ctcr240404.
22. **Civera, J., Davison, A.J., Montiel, J.M.M.**, Inverse Depth Parametrization for Monocular SLAM, *IEEE Transactions on Robotics*, 2008, vol. 24, no. 5, pp. 932–945, <https://doi.org/10.1109/TRO.2008.2003276>.
23. **Hesch, J.A., Kottas, D.G., Bowman, S.L., Roumeliotis, S.I.**, Observability-Constrained Vision-Aided Inertial Navigation, University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., MARS Lab., Tech. Rep., 2012, vol. 1.
24. **Цыганова Ю.В., Куликова М.В.** О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2018. Т. 11. № 4. С. 5–30. DOI: 10.14529/mmp180401.
25. **Афанасьев В.Н.** Стохастические системы. Оценки и управление. 1-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2018. 152 с.
26. **Адамов Б.И., Маслов А.Н., Осадченко Н.В.** Применение основных матричных разложений в задачах механики и робототехники. М.: МЭИ, 2019.
27. **Shi, J., Tomasi, C.**, Good Features to Track, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Seattle, 1994, pp. 593–600, <https://doi.org/10.1109/CVPR.1994.323794>.
28. **Kalal, Z., Mikolajczyk, K., Matas, J.**, Forward-Backward Error: Automatic Detection of Tracking Failures, *20th International Conference on Pattern Recognition*, Istanbul, 2010, pp. 2756–2759, <https://doi.org/10.1109/ICPR.2010.675>.
29. **Rublee, E., Rabaud, V., Konolige, K., Bradski, G.R.**, ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF, *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Barcelona, 2011, pp. 2564–2571, <https://doi.org/10.1109/ICCV.2011.6126544>.

## Приложение

В псевдокоде использованы следующие обозначения процедур:

$\text{qr}(*).R$  – возвращение фактора  $R$  экономичного QR-разложения матрицы  $(*)$  без вычисления фактора  $Q$ ;

$\text{qr}_{\text{full}}(*)$  – вычисление обоих факторов полного QR-разложения матрицы  $(*)$ ;

$\text{svd}(*)$  – экономичное SVD-преобразование матрицы  $(*)$ ;

$\leftarrow$  – присвоение значения.

Диапазоны строк и столбцов подматриц обозначены аналогично синтаксису Matlab с использованием символа «:», например  $A_{[1:a:b]}$  – это подматрица из столбцов матрицы  $A$  в диапазоне  $a\dots b$ .

### Алгоритм 1. Этап прогноза ББФК

Вход:  $\mathbf{L}_{s_s}, \mathbf{F}_{s_s}, \mathbf{M}_{ws_s}, \mathbf{L}_{ic_s}, \mathbf{L}_i, \mathbf{M}_{id_s}, \mathbf{F}_{is_s}, \mathbf{F}_i, \mathbf{M}_{iws_s}, \mathbf{M}_{iws_s}, i = 1 \dots N$ .

Выход:  $\tilde{\mathbf{L}}_s, \tilde{\mathbf{L}}_{ic}, \tilde{\mathbf{L}}_i, \tilde{\mathbf{M}}_{id}, i = 1 \dots N$ .

Начало алгоритма 1.

1. Вычисление параметров ковариации погрешностей прогнозируемых оценок  $\tilde{\mathbf{X}}_s$ .

$$\mathbf{Q}, \mathbf{R} \leftarrow \text{qr}_{\text{full}}([\mathbf{F}_s \mathbf{L}_s, \mathbf{M}_{ws}]^T)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_s \leftarrow \mathbf{R}_{[1:n_s, 1:n_s]}^T$$

2. Расчет параметров ковариации погрешностей прогнозируемых оценок  $\tilde{\mathbf{X}}_i$ .

Начало. Для каждого  $i$ -го признака,  $i = 1 \dots N$ .

$$\tilde{\mathbf{L}}_{ic} \leftarrow \mathbf{F}_i \mathbf{L}_{ic}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{ic}[:, 1:n_s] \leftarrow \tilde{\mathbf{L}}_{ic}[:, 1:n_s] + \mathbf{F}_{is} \mathbf{L}_s$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_i \leftarrow \text{qr}([\mathbf{F}_i \mathbf{L}_i, \mathbf{M}_{iws}]^T) \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{id} \leftarrow \mathbf{F}_i \mathbf{M}_{id}$$

Конец.

3. Выработка параметров ковариации  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  и аппроксимация.

Примечания. В матрице  $\mathbf{A}$  (40) проекций векторов состояния признаков на подпространство  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}_s} + \mathcal{H}_{\mathbf{d}}$  первые  $n_s$  столбцов содержат проекции на  $\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{X}}_s}$ , последние  $n_e + n_w$  столбцов – проекции на  $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$  (22), (29). Для нормирования векторов состояния при вычислении  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}$  (41) использованы обратные факторы матриц ковариаций  $\mathbf{L}_i^{-1}$ . В (42) реализуется аппроксимация расширения общего вектора погрешностей с сохранением  $n_e$  главных компонент корреляции погрешностей признаков.  $\mathbf{L}_{iwd}$  в (43) – это факторы матрицы ковариаций коррелированных компонентов погрешностей, не учтенных при аппроксимации, т. е. проекции  $\tilde{\mathbf{X}}_i$  на  $\mathcal{H}_{\mathbf{d}}$  (24).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{fc} &\leftarrow [\tilde{\mathbf{L}}_{1e}^T, \dots, \tilde{\mathbf{L}}_{Nc}^T]^T \\ \mathbf{M}_{fws} &\leftarrow [\mathbf{M}_{1ws}^T, \dots, \mathbf{M}_{Nws}^T]^T \\ \mathbf{A} &\leftarrow [[\tilde{\mathbf{L}}_{fc}[:, 1:n_s], \mathbf{M}_{fws}] \cdot \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{L}}_{fc}[:, n_s+1:n_c]] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_d \leftarrow \text{blkdiag}(\tilde{\mathbf{L}}_1^{-1}, \dots, \tilde{\mathbf{L}}_N^{-1}) \cdot \mathbf{A}_{[:, n_s+1: n_c+n_w]} \quad (41)$$

$$\mathbf{V}_d \leftarrow \text{svd}(\tilde{\mathbf{A}}_d^T \tilde{\mathbf{A}}_d) \cdot \mathcal{V}$$

$$\mathbf{W}_d \leftarrow \mathbf{A}_{[:, n_s+1: n_c+n_w]} \mathbf{V}_d$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{fc} \leftarrow \left[ \mathbf{A}_{[:, 1: n_s]}, \mathbf{W}_d[:, 1: n_c] \right] \quad (42)$$

Начало. Для каждого  $i$ -го признака,  $i = 1 \dots N$ .

$$\tilde{\mathbf{L}}_{ic} \leftarrow \tilde{\mathbf{L}}_{fc}[:, (i-1)n_f + 1 : in_f, :]$$

$$\mathbf{L}_{iwd} \leftarrow \text{qr} \left( \mathbf{W}_d^T[:, (i-1)n_f + 1 : in_f, n_c+1: n_c+n_w] \right) \cdot \mathbf{R}^T \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{id} \leftarrow \text{qr} \left( \left[ \tilde{\mathbf{M}}_{id}, \mathbf{L}_{iwd} \right]^T \right) \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_i \leftarrow \text{qr} \left( \left[ \tilde{\mathbf{L}}_i, \mathbf{L}_{iwd} \right]^T \right) \cdot \mathbf{R}^T$$

Конец.

Конец алгоритма 1.

### Алгоритм 2. Этап коррекции ББФК

Вход:  $\tilde{\mathbf{L}}_s, \tilde{\mathbf{L}}_{ic}, \tilde{\mathbf{L}}_i, \tilde{\mathbf{M}}_{id}, \mathbf{H}_{is}, \mathbf{H}_i, \mathbf{M}_{iv}, \tilde{\mathbf{Y}}_i, i = 1 \dots N$ .

Выход:  $\hat{\mathbf{X}}_s, \mathbf{L}_s, \hat{\mathbf{X}}_i, \mathbf{L}_{ic}, \mathbf{L}_i, \mathbf{M}_{id}, i = 1 \dots N$ .

Начало алгоритма 2.

1. Вычисление поправок  $\hat{\mathbf{X}}_c, \hat{\mathbf{X}}_s$  и параметров ковариации погрешностей скорректированных оценок  $\mathbf{X}_c$ .

$$\sigma_d \leftarrow 0$$

Начало. Для каждого  $i$ -го признака,  $i = 1 \dots N$ .

$$\tilde{\mathbf{M}}_{id} \leftarrow \tilde{\mathbf{L}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{id}$$

$$\sigma_{id} \leftarrow \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{M}}_{id} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_{id}^T)}$$

$$\sigma_d \leftarrow \sigma_d + \sigma_{id}$$

Конец.

Начало. Для каждого  $i$ -го признака,  $i = 1 \dots N$ .

$$\alpha_i \leftarrow \sigma_d / \sigma_{id} \quad (44)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^+ \leftarrow \tilde{\mathbf{L}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i^T + (\alpha_i - 1) \tilde{\mathbf{M}}_{id} \tilde{\mathbf{M}}_{id}^T$$

$$\mathbf{R}_{ic}^+ \leftarrow \mathbf{M}_{iv} \mathbf{M}_{iv}^T + \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^+ \mathbf{H}_i^T$$

$$\mathbf{H}_{ic} \leftarrow \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{L}}_{ic}$$

$$\mathbf{H}_{ic[:, 1: n_s]} \leftarrow \mathbf{H}_{ic[:, 1: n_s]} + \mathbf{H}_{is} \tilde{\mathbf{L}}_s$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{ic} \leftarrow (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \mathbf{H}_{ic}$$

Конец.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &\leftarrow [\tilde{\mathbf{Y}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}_N^T]^T \\ \mathbf{H}_c &\leftarrow [\mathbf{H}_{1c}^T, \dots, \mathbf{H}_{Nc}^T]^T \\ \tilde{\mathbf{H}}_c &\leftarrow [\tilde{\mathbf{H}}_{1c}^T, \dots, \tilde{\mathbf{H}}_{Nc}^T]^T \\ \Sigma_\Omega, \mathbf{V}_\Omega &\leftarrow \text{svd}(\tilde{\mathbf{H}}_c^T \mathbf{H}_c) \\ \tilde{\mathbf{S}}'_c &\leftarrow \mathbf{V}_\Omega \cdot (I_{n_c} + \Sigma_\Omega)^{-1/2} \\ \mathbf{Q}' &\leftarrow \text{qr}_{\text{full}}(\tilde{\mathbf{S}}'^T_{c[1:n_s, :]}) \cdot \mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{S}}_c &\leftarrow \tilde{\mathbf{S}}'_c \cdot \mathbf{Q}' \\ \mathbf{L}_s &\leftarrow \tilde{\mathbf{L}}_s \tilde{\mathbf{S}}_{c[1:n_s, 1:n_s]} \\ \hat{\mathbf{X}}_c &\leftarrow \tilde{\mathbf{S}}_c^T \tilde{\mathbf{H}}_c^T \tilde{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{X}}_s &\leftarrow \mathbf{L}_s \hat{\mathbf{X}}_{c[1:n_s]} \end{aligned}$$

2. Расчет поправок  $\hat{\mathbf{X}}_i$  и параметров ковариации погрешностей скорректированных оценок  $\mathbf{X}_i$ .

Начало. Для каждого  $i$ -го признака,  $i = 1 \dots N$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &\leftarrow \tilde{\mathbf{P}}_i^+ \mathbf{H}_i^T (\mathbf{R}_{ic}^+)^{-1} \\ \mathbf{G}_i &\leftarrow I_{n_f} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i \\ \mathbf{L}_i &\leftarrow \text{qr}([\mathbf{G}_i \tilde{\mathbf{L}}_i, \mathbf{K}_i \mathbf{M}_{iv}]^T) \cdot \mathbf{R}^T \\ \mathbf{M}_{id} &\leftarrow \mathbf{G}_i \tilde{\mathbf{M}}_{id} \\ \mathbf{L}_{ic} &\leftarrow (\tilde{\mathbf{L}}_{ic} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_{ic}) \cdot \tilde{\mathbf{S}}_c \\ \hat{\mathbf{X}}_i &\leftarrow \mathbf{L}_{ic} \hat{\mathbf{X}}_c + \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i \end{aligned}$$

Конец.

Конец алгоритма 2.

### Алгоритм 3. Квадратно-корневой ФК

Для сравнения с ББФК была определена длительность вычислений на этапах прогноза и коррекции квадратно-корневого ОФК, описанного ниже.

Вход:  $\mathbf{L}, \mathbf{F}, \mathbf{M}_w, \mathbf{H}, \mathbf{M}_v, \mathbf{Y}$ .

Выход:  $\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{L}$ .

Начало алгоритма 3.

1. Этап прогноза.

$$\tilde{\mathbf{L}} \leftarrow \text{qr}([\mathbf{FL}, \mathbf{M}_w]^T) \cdot \mathbf{R}^T$$

2. Этап коррекции.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{xy} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \leftarrow qr \left( \begin{bmatrix} (\mathbf{H}\tilde{\mathbf{L}})^T & \tilde{\mathbf{L}}^T \\ \mathbf{M}_v^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \cdot \mathbf{R}^T$$

$$\hat{\mathbf{X}} \leftarrow \mathbf{L}_{xy} \cdot \text{mldivide}(\mathbf{L}_y, \mathbf{Y})$$

Конец алгоритма 3.

Здесь матрицы моделей динамики и измерений соответствуют (11) и (14). Стандартная matlab-функция  $x = \text{mldivide}(L, b)$  реализует решение системы  $Lx = b$  обратной подстановкой, если  $L$  – треугольная матрица, а  $b$  – вектор.

---

**Tsiopliakis, N.** (South Ural State University, Chelyabinsk)

Fast Block Kalman Filter (FBKF) for Visual-Inertial Navigation Tasks, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2026, vol. 34, no. 1 (132), pp. 71–95.

**Abstract.** This paper presents a Fast Block Kalman Filter (FBKF) for visual-inertial navigation. The filter recursively estimates the state vector describing the navigation parameters of a moving object and the coordinates of  $N$  visual features with reduced computational complexity,  $O(N)$ , achieved through the decomposition of the estimation algorithm. It is shown that through applying the principal component analysis, the estimates of the block filter remain close to those of the Extended Kalman Filter (EKF), which, as shown previously, provides high estimation accuracy when consistent error models are used. The  $O(N)$  complexity is maintained even when all  $N$  features are observed simultaneously for an arbitrary time interval. The trade-off between computational time and FBKF accuracy is achieved by using a special procedure based on expanding the original state vector; negligible deviations from the EKF estimates are obtained for expansion dimensions that have only a minor effect on the computational burden of the proposed filter. A comparison with the EKF in terms of computational time and produced estimates is carried out by simulation of a visual aided INS. The results demonstrate the possibility of processing hundreds of features in real time in single-threaded mode.

**Key words:** visual-inertial navigation, Kalman filtering, computational efficiency, INS, visual features.

Материал поступил 30.06.2025